Chapitre II : Interpolation polynômiale

Soit par exemple une expérience où on enregistre la distance parcourue par un objet en fonction du temps, les résultats sont donnés dans le tableau suivant :

t(sec)	0	1	2	3	4
X(m)	0	5	15	0	3

On veut par exemple calculer la position de l'objet au temps ***t=2.5 sec*** ou la vitesse de l'objet à un temps donné. Pour cela, il faut avoir une forme analytique de $\boldsymbol{x}$ en fonction de ***t, X(t)***. Cette forme doit au moins coïncider avec les points donnés dans le tableau. Ensuite on peut calculer ***X(2.5),*** $\int_0^4 X(t)dt$ où bien $v(t) = \frac{dX(t)}{dt}$.

Dans ce chapitre, on va considérer l'approximation de ***X(t)*** par une forme polynômiale c'est-à-dire :

$$X(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

Avec $a_i\ (i = 0, n)$ sont des coefficients à déterminer.

Les polynômes que nous allons étudier différent seulement par la façon de déterminer les coefficients $a_i\ (i = 0, n)$**,** car pour un tableau de valeurs données le polynôme d'interpolation est unique.

2.1 Polynôme d'interpolation de Lagrange.

Soient ***(n+1)*** points distincts $x_0, x_1, \dots\dots, x_n$ et f une fonction dont les valeurs sont $f(x_0), f(x_1), \dots\dots, f(x_n)$. Alors, il existe un seul polynôme de degré inférieur ou égal à n et qui coïncide avec les points d'interpolation, i e :

$$f(x_k) = P_n(x_k), \qquad k = 0, 1, 2, \dots\dots, n$$

Ce polynôme est donné par :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + \cdots\dots + f(x_n)L_n(x)$$

Avec $$L_k(x) = \sum_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{(x-x_i)}{(x_k-x_i)} = \frac{(x-x_0)}{(x_k-x_0)} \frac{(x-x_1)}{(x_k-x_1)} \dots\dots \frac{(x-x_{k-1})}{(x_k-x_{k-1})} \frac{(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k+1})} \cdots \frac{(x-x_n)}{(x_k-x_n)} \quad \textbf{\textit{(k=0,..,n)}}$$

$L_k(x)$ sont dits coefficients polynômes de Lagrange, ils sont orthogonaux c'est-à-dire $L_k(x_j) = 0$ et $L_k(x_k) = 1$.

Exemple : Reprenons la table donnée au début du chapitre et essayons de calculer le polynôme de Lagrange pour cette table. Notons que pour ***n+1*** points le degré du polynôme est inférieure ou égal à ***n***. Pour notre cas on a ***5*** points, cela nous donne un polynôme de de gré inférieur ou égal à ***4***.

$$X(t) \approx P_4(t) = \sum_{i=0}^{4} f(t_i)L_i(t) = f(t_0)L_0(t) + f(t_1)L_1(t) + f(t_2)L_2(t) + f(t_3)L_3(t) + f(t_4)L_4(t)$$

Avec les coefficients $f(t_i)$ sont les valeurs de X(t$_i$) aux points donnés t$_i$, on remplace et on écrit donc :

$$X(t) \approx P_4(t) = 0 * L_0(t) + 5 * L_1(t) + 15 * L_2(t) + 0 * L_3(t) + 3 * L_4(t)$$

Ensuite, on calcule les coefficients polynômes de Lagrange :

$L_0(t) = \sum_{i=0, i\neq 0}^{4} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_1)}{(t_0-t_1)}\frac{(t-t_2)}{(t_0-t_2)}\frac{(t-t_3)}{(t_0-t_3)}\frac{(t-t_4)}{(t_0-t_4)}$ Noter bien qu'il est inutile de calculer les coefficients polynômes $L_0(t)$ et $L_3(t)$ car ils seront multipliés par zéro dans le remplacement.

$$L_1(t) = \sum_{i=0, i\neq 1}^{4} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_0)}{(t_1-t_0)}\frac{(t-t_2)}{(t_1-t_2)}\frac{(t-t_3)}{(t_1-t_3)}\frac{(t-t_4)}{(t_1-t_4)} = \frac{(t-0)}{(1-0)}\frac{(t-2)}{(1-2)}\frac{(t-3)}{(1-3)}\frac{(t-4)}{(1-4)} = -\frac{1}{6}(t^4 - 9t^3 + 26t^2 - 24t)$$

$$L_2(t) = \sum_{i=0, i\neq 2}^{4} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_0)}{(t_2-t_0)}\frac{(t-t_1)}{(t_2-t_1)}\frac{(t-t_3)}{(t_2-t_3)}\frac{(t-t_4)}{(t_2-t_4)} = \frac{(t-0)}{(2-0)}\frac{(t-1)}{(2-1)}\frac{(t-3)}{(2-3)}\frac{(t-4)}{(2-4)} = \frac{1}{4}(t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t)$$

$$L_4(t) = \sum_{i=0, i\neq 4}^{4} \frac{(t-t_i)}{(t_k-t_i)} = \frac{(t-t_0)}{(t_4-t_0)}\frac{(t-t_1)}{(t_4-t_1)}\frac{(t-t_2)}{(t_4-t_2)}\frac{(t-t_3)}{(t_4-t_3)} = \frac{(t-0)}{(4-0)}\frac{(t-1)}{(4-1)}\frac{(t-2)}{(4-2)}\frac{(t-3)}{(4-3)} = \frac{1}{24}(t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t)$$

Finalement on remplace les coefficients polynômes et on obtient :

$$X(t) \approx P_4(t) = -25.75t + 50.95833t^2 - 23.25t^3 + 3.04167t^4$$

2.2 Polynôme d'interpolation de Newton

On a vu que le polynôme de Lagrange utilise ***(n+1)*** coefficients polynômes qui sont eux aussi des polynômes de degré inférieur ou égal à $\boldsymbol{n}$. Le calcul de ces coefficients polynômes est aussi une tâche délicate, c'est pourquoi il est intéressant d'utiliser une autre formulation plus souple ; c'est le polynôme de Newton.

Le calcul du polynôme de Newton commence par la construction d'un polynôme de degré ***1***, $\boldsymbol{P_1(x)}$ qui passe par les deux premiers points. Ensuite, ce dernier sera utilisé pour calculer un autre de degré ***2***, $\boldsymbol{P_2(x)}$ qui passe par les trois premiers points et ainsi de suite jusqu'au polynôme final de degré inférieur ou égal à ***n***, $\boldsymbol{P_n(x)}$. On a la relation de récurrence suivante entre deux polynômes successifs $\boldsymbol{P_{i-1}(x)}$ et $\boldsymbol{P_i(x)}$ ***(i=2,3,..,n+1)***:

$$\begin{cases} P_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) \\ P_2(x) = P_1(x) + a_2(x - x_0)(x - x_1) \\ P_3(x) = P_2(x) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n(x) = P_{n-1}(x) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}) \end{cases}$$

On remarque que les coefficients $\boldsymbol{a_k}$ ***(k=0,…,n)*** sont les éléments essentiels dans le calcul des polynômes de Newton. Ces coefficients sont les différences divisées d'ordre ***k*** de la fonction ***f***.

2.3 Calcul des différences divisées d'une fonction *f*.

Les différences divisées d'une fonction ***f*** basée sur les points $\boldsymbol{x_0, x_1, \dots\dots, x_n}$ sont données par : $$a_k = f[x_0, x_1, \dots\dots, x_k] = \sum_{i=0}^{k} \frac{y_i}{\prod_{j=0, j\neq i}^{k}(x_i - x_j)}$$

En pratique et pour le nombre limité de points, les différences divisées sont calculées en utilisant un tableau qui a la forme suivante :

x_k	$f(x_k) = f[x_k]$	***DD¹***	***DD²***	***DD³***	***DD⁴***
x_0	$f[x_0]$				
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$	$f[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]$
x_3	$f[x_3]$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$	
x_4	$f[x_4]$	$f[x_3, x_4]$			

Avec : $f[x_0,x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$, $f[x_1,x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$, ……..

$$f[x_0,x_1,x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}, \quad f[x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}, \ldots\ldots$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}, \quad f[x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_1}$$

$$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] = \frac{f[x_1,x_2,x_3,x_4]-f[x_0,x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_0}$$

2.4 Erreur d'interpolation

C'est l'erreur commise lorsqu'on remplace la fonction $\boldsymbol{f}$ par le polynôme d'interpolation équivalent. Elle est notée par $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x})$ car elle varie d'un point à un autre dans l'intervalle d'interpolation. Cette erreur doit être nulle aux points d'interpolation, $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x_i}) = \mathbf{0}$, ***(i=0,…n)***.

Si la fonction f est continue et ***(n+1)*** fois dérivable sur l'intervalle d'interpolation $[\boldsymbol{a} = \boldsymbol{x_0},\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x_n}]$. Alors pour tout $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ il existe $\boldsymbol{z} \in [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ tel que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{P_n}(\boldsymbol{x})| = \prod_{i=0}^{n} \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_i})}{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})!} \boldsymbol{f}^{(n+1)}(\boldsymbol{z})$$

Si $\left|\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\boldsymbol{z})\right| \leq \boldsymbol{M} \quad \forall\, \boldsymbol{z} \in [\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ on peut écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{P_n}(\boldsymbol{x})| \leq \prod_{i=0}^{n} \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_i})}{(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})!} \boldsymbol{M}$$

Dans ce cas **M** est majorant de la fonction $\boldsymbol{f}^{(n+1)}(\boldsymbol{x})$ sur l'intervalle ***[a,b]***.

Exemple : Reprenons la table donnée au début du chapitre et essayons de calculer le polynôme de Newton pour cette table. Notons que pour ***n+1*** points le degré du polynôme est inférieure ou égal à ***n***. Pour notre cas on a ***5*** points, cela nous donne un polynôme de de gré inférieur ou égal à ***4***. Ecrivons les polynômes de Newton :

$$\begin{cases} \boldsymbol{P_1}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{a_0} + \boldsymbol{a_1}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_0}) \\ \boldsymbol{P_2}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{P_1}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{a_2}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_0})(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_1}) \\ \boldsymbol{P_3}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{P_2}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{a_3}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_0})(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_1})(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_2}) \\ \boldsymbol{P_4}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{P_3}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{a_4}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_0})(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_1})(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_2})(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t_3}) \\ \text{Les } \boldsymbol{a_i} \text{ sont les différences divisées d'ordre } \boldsymbol{i} \end{cases}$$

Calculons la table des différences divisées.

t_k	$f(t_k) = f[t_k]$	DD^1	DD^2	DD^3	DD^4
0	$\mathbf{0} = \boldsymbol{a_0}$				
1	5	$\mathbf{5} = \boldsymbol{a_1}$	$\mathbf{2.5} = \boldsymbol{a_2}$		
2	15	10	−12.5	$\mathbf{-5} = \boldsymbol{a_3}$	$\mathbf{3.04167} = \boldsymbol{a_4}$
3	0	−15	9	7.1667	
4	3	3			

Remplaçant les a_i et les t_i par leurs valeurs dans les polynômes de Newton, on trouve :

$\boldsymbol{P_1(t) = a_0 + a_1(t - t_0) = 0 + 5(t - 0) = 5t}$

$\boldsymbol{P_2(t) = P_1(t) + a_2(t - t_0)(t - t_1) = 5t + 2.5(t - 0)(t - 1) = 2.5t^2 + 2.5t}$

$\boldsymbol{P_3(t) = P_2(t) + a_3(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2) = 2.5t^2 + 2.5t - 5(t - 0)(t - 1)(t - 2) = -5t^3 + 17.5t^2 - 7.5t}$

$\boldsymbol{P_4(t) = P_3(t) + a_4(t - t_0)(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) = -5t^3 + 17.5t^2 - 6t + 3.0417(t - 0)(t - 1)(t - 2)(t - 3)}$

$\boldsymbol{P_4(t)} = 3.04167t^4 - 23.25t^3 + 50.95833t^2 - 25.75t$ C'est le même polynôme que celui de Lagrange.

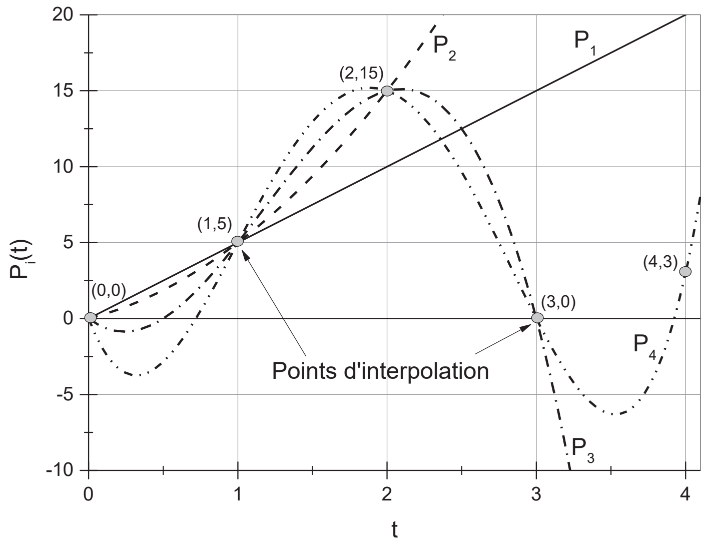

Fig. 2.1. Tracés des polynômes d'interpolation de Newton