Chapitre I : Résolution numérique des équations non linéaires à une seule variable

Dans ce chapitre on va étudier trois méthodes pour la résolution des équations non linéaires à une variable aussi dites équations à variable transcendante. Comme exemple de ces équations, on peut citer $\mathbf{f(x) = sin(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x} = 0}$, $\mathbf{f(x) = ln(\boldsymbol{x}) - 2\boldsymbol{x} + 3 = 0}$. Ces équations ne possèdent pas une ou des racines exactes qui peuvent être calculées directement, c'est pourquoi on fait recours aux méthodes numériques pour trouver les solutions approchées de ces équations. Les racines calculées sont autant précises que l'on veut surtout lorsqu'on dispose des moyens de calcul.

Ces méthodes numériques permettent seulement le calcul d'une seule racine sur un intervalle bien choisi. Donc si l'équation possède plus d'une racine, il est nécessaire de les localiser dans des intervalles choisis soigneusement et de faire le calcul pour chaque racine à part.

1 Localisation des racines d'une équation *f(x)=0*.

Soit une équation ***f(x)=0*** dont on cherche la solution sur un intervalle **[a,b],** on commence par un tracé grossier de la fonction sur l'intervalle donnée puis on isole chaque racine dans un sous intervalle le plus étroit possible. La Fig. 1 montre le tracé d'une fonction ***f*** qui coupe l'axe des ***x*** en trois points , c'est-à-dire que l'équation ***f(x)=0*** possède trois racines, on note les racines exates par $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ et $\bar{x}_3$.

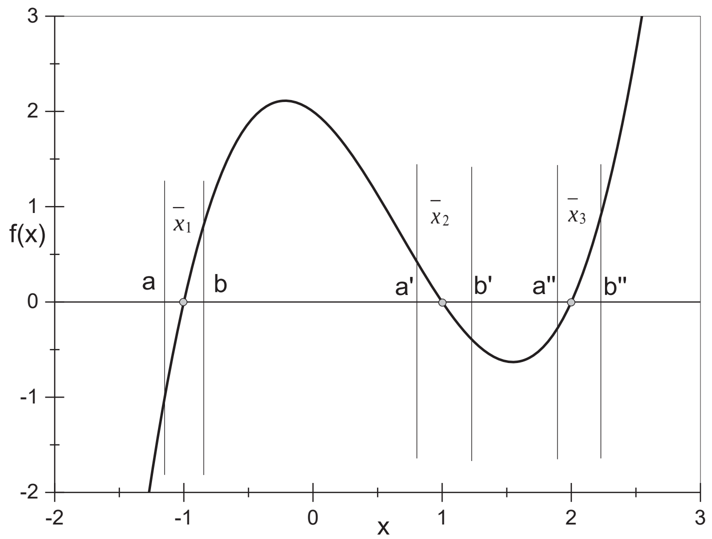


Fig. 1.1. Localisation des racines

On remarque que la fonction est continue sur chaque sous intervalle, aussi chaque sous intervalle :

- Englobe une seule racine tel que $\bar{x}_1 \in [a\ \ ,b\ \ ], \bar{x}_2 \in [a', b']$et $\bar{x}_3 \in [a'', b'']$.
- Vérifie la condition $f(a)f(b) < 0$, $f(a')f(b') < 0$ et $f(a'')f(b'') < 0$.

La forme de l'équation ***f(x)=0*** peut etre compliquée, dans ce cas s'il est possible on peut la décomposer en deux parties simples ***g(x)=h(x)***.

Par exemple $f(x) = \ln(x) - x^2 + 2 = 0$, qui est assez compliqué pour le tracé, peut être décomposée en :

$$g(x) = h(x) \text{ avec } g(x) = \ln(x) \text{ et } h(x) = x^2 - 2$$

Le tracé de g et h est très simple, la solution de ***f(x)=0*** se situe à l'intersection de g et h. Ensuite, on projete les points des intersection sur l'axe des x et on localise les racines. On peut facilement vérifier les intervalles trouvées en calculant $f(a_i)f(b_i) < 0$.

Exemple :

Prenons l'équation **:** $\ln(x) - x^2 + 2 = 0$ localisant ses racines, à ce point on ne connait pas le nombre de racines de cette équation. On trace la courbe de la fonction :
$f(x) = \ln(x) - x^2 + 2 = 0$**,** les intersections de la courbe avec l'axe des x représentent les racines de cette fonction.

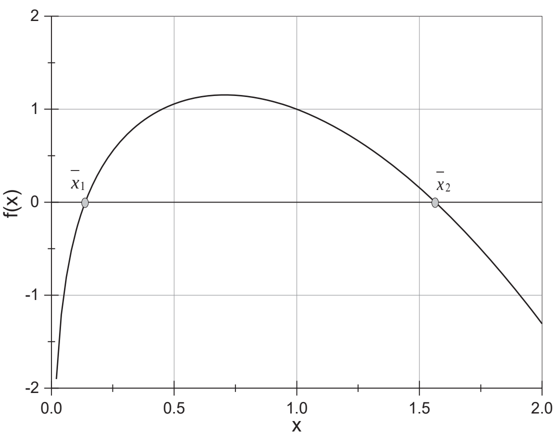


Fig. 1.2. Tracé de la fonction f

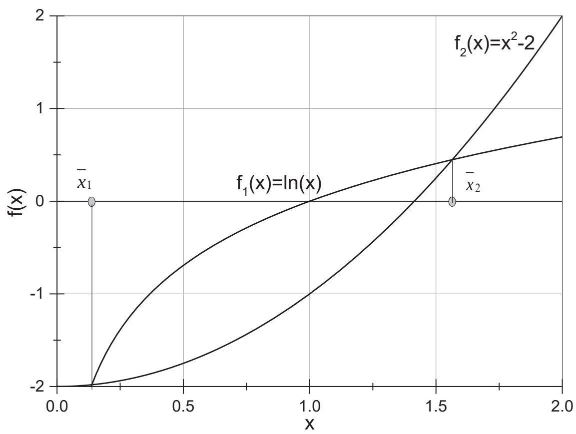


Fig. 1.3. Tracés des fonction f_1 et f_2

On note que cette équation a deux racines (Fig. 2) qui appartiennent par exemple aux intervalles [0.1,0.5] et [1,2]. On peut aussi rééerire la fonction f(x)=0 sous une forme plus simple, par exemple : $\ln(x) - x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = x^2 - 2$ ou bien $f_1(x) =$

$f_2(x)$; avec $f_1(x) = \mathbf{ln}(x)$ et $f_2(x) = x^2 - 2$. Ensuite on trace ces deux fonctions (Fig. 3), qui sont faciles sur les même axes, leurs intersections représentent les racines de f(x)=0.

2 Méthode de bissection où de dichothomie

C'est la méthode la plus simple et qui nécessite le plus de calculs, elle est basée sur le cas particulier (Théorème de Bolzano) du théorème des valeurs intermédiaires qui dit que :

1. Si **f(x)** est continue sur l'intervalle **[a,b],**
2. Si **f(a)** et **f(b)** ne sont pas de même signe, il existe au moins un réel ***c*** compris entre ***a*** et ***b*** tel que ***f(c) = 0*** (car ***0*** est compris entre ***f(a)*** et ***f(b)***).

2.1 Principe de la méthode

Une fois les racines sont localisées chacune dans un intervalle, pour simplifier l'écriture soit par exemple [a,b] :

1. On divise l'intervalle en deux parties égales tel que $x_0 = \frac{a+b}{2}$.
2. On obtient deux sous intervalles $[\mathbf{a},\ x_0]$ et $[x_0\ ,\mathbf{b}]$, la racine $\bar{x}$ doit obligatoirement appartenir à l'un d'eux. Pour vérifier, on calcule $f(a)f(x_0)$ et $f(x_0)f(b)$**,** le produit qui est négatif c'est celui qui correspond à l'intervalle qui contient la solution.

Notons le nouvel intervalle par $[a_1, b_1]$tel que (Fig. 4):

$$a_1 = \begin{cases} a\ si\ \bar{x} \in [a, x_0] \\ x_0\ si\ \bar{x} \in [x_0, b] \end{cases} \quad et \quad b_1 = \begin{cases} x_0\ si\ \bar{x} \in [a, x_0] \\ b\ si\ \bar{x} \in [x_0, b] \end{cases}$$

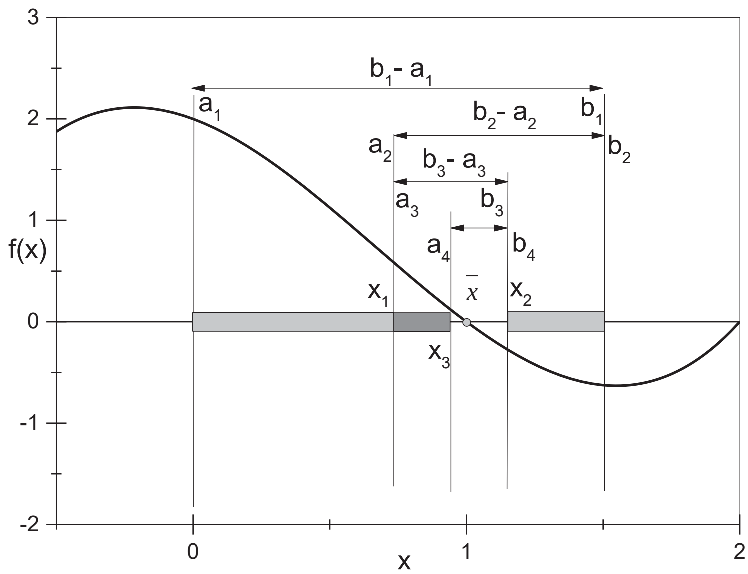


Fig. 1.4. Illustration de la méthode de bissection

En répétant (itérant) la même méthode pour l'intervalle obtenu on aura les valeurs :

$$x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}, x_2 = \frac{a_2+b_2}{2}, \dots\dots\dots\dots, \; x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$$

La suite $\{x_n\}_{n=0,\infty}$ converge vers la solution $\bar{x}$ de ***f(x)=0*** lorsque $\mathbf{n \to \infty}$.

2.2 Nombre de divisions pour avoir une précision ε donnée.

Puisque à chaque fois on divise l'intervalle en deux parties égales, on a :

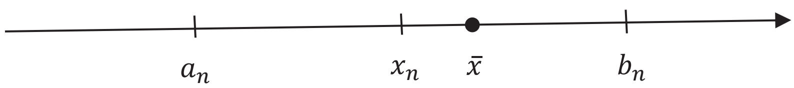
$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2};$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{1}{2}\frac{b-a}{2} = \frac{b-a}{2^2};$$

$$b_3 - a_3 = \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^2} = \frac{b-a}{2^3};$$

………………………………………………………………

$$b_n - a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^{n-1}} = \frac{b-a}{2^n}.$$



Puisque $\bar{x} \in [a_n, b_n] = [a_n, x_n] \cup [x_n, b_n]$ on a $|x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$

Il faut que la différence $|x_n - \bar{x}|$ qui est l'erreur du calcul soit inférieure à une précision donnée ε, c'est-à-dire :

$$|x_n - \bar{x}| \leq \varepsilon$$

Alors, il suffit que $\frac{b-a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon$

Cela donne $n \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\ln(2)}$

Le nombre de divisions ne dépend que de la longueur de l'intervalle et de la précision.

Cette méthode est inconditionnellement convergente, son problème c'est qu'elle est lente c'est pourquoi elle est utilisée pour démarrer d'autres méthodes plus élaborées.

<u>Exemple :</u> Calculons la première racine de l'équation $\mathbf{ln}(x) - x^2 + 2 = 0$ qui appartient à **[0.1, 0.5]** avec une précision de **0.01**.

Calculons le nombre de divisions à faire :

$\boldsymbol{n} \geq \frac{\ln\left(\frac{b-a}{2\varepsilon}\right)}{\ln(2)} = \frac{\ln\left(\frac{0.5-0.1}{2*0.01}\right)}{\ln(2)} = \mathbf{4.32}$ on prend **n=5** puisque **n** est entier et supérieur à **4.32**.

$$f(a_1) = f(0.1) = -0.313 \quad \text{et} \quad f(b_1) = f(0.5) = 1.057$$

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{0.1 + 0.5}{2} = 0.30; \quad f(0.3) = 0.706 > 0 \text{ donc } a_2 = 0.1 \text{ et } b_2 = 0.3$$

$$x_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{0.1 + 0.3}{2} = 0.20; \quad f(0.2) = 0.351 > 0 \text{ donc } a_3 = 0.1 \text{ et } b_3 = 0.2$$

$$x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{0.1 + 0.2}{2} = 0.15; \quad f(0.15) = 0.080 > 0 \text{ donc } a_4 = 0.1 \text{ et } b_4 = 0.15$$

$$x_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = \frac{0.1 + 0.15}{2} = 0.125; \quad f(0.125) = -0.095 < 0 \text{ donc } a_5 = 0.15 \text{ et } b_4 = 0.125$$

$$x_5 = \frac{a_5 + b_5}{2} = \frac{0.15 + 0.125}{2} = 0.1375; \quad f(0.125) = -0.003 \text{ La solution est } x_5 = 0.1375$$

3 Méthode des approximations successives où du point fixe.

Soit g une fonction définie sur un intervalle ***[a,b]*,** le point $\bar{x}$ qui vérifie $\bar{x} = g(\bar{x})$ avec $\bar{x} \in [a, b]$ est dit point fixe de la fonction g.

Cette méthode est basée sur le principe du point fixe d'une fonction, on écrit l'équation ***f(x)=0*** sous la forme ***x=g(x)***, ensuite on cherche le point fixe $\bar{x}$ de la fonction g. Pour cela on crée la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ **(n=0,1,2….)** avec x_0 donnée par dichotomie par exemple.

On démarre de x_0 pour ***n=0***, on calcule $x_1 = g(x_0)$ ensuite ***n=1***, on calcule $x_2 = g(x_1)$,…, $x_{n+1} = g(x_n)$. Sous certaines conditions, la suite $\{x_n\}_{n=0,\infty}$ converge vers la solution $\bar{x}$ point fixe de g et solution de l'équation ***f(x)=0***.

Exemple : Ecrire l'équation ***f(x)=0*** sous la forme ***x = g(x)*** si $f(x) = x^2 + 3e^x - 12$.

On peut écrire

$$x = g_1(x) = x^2 + 3e^x - 12 + x$$

$$x = g_2(x) = \sqrt{12 - 3e^x}$$

$$x = g_3(x) = ln\left(\frac{12-x^2}{3}\right)$$

Pour pouvoir choisir la forme de g adéquate pour le calcul, un critère de convergence de cette méthode doit être vérifié.

3.1 Critère de convergence et d'arrêt de calculs pour la méthode des approximations successives.

Soit g une fonction dérivable définie de **[a,b]** → **[a,b]** tel que (condition suffisante) :

$$|g'(x)| \leq k < 1 \qquad \forall\, x \in [a, b]$$

Alors la suite $\{x_n\}_{n=0,\infty}$ définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ **(n=0,1,2….)** converge indépendamment de la valeur de x_0 vers l'unique point fixe $\bar{x}$ de g.

Si plusieurs formes de g vérifient cette condition, on aura plusieurs valeurs de k. On choisit celle avec la valeur minimale de k. En pratique, on calcule $k = max_{x\in[a,b]}|g'(x)|$ qui doit être inférieure à l'unité pour que la méthode converge.

On arrête les calculs pour cette méthode lorsque la différence absolue entre deux itérations successives est inférieure à une certaine précision ε donnée.

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$$

<u>Exemple :</u> Trouver la première racine de l'équation $\mathbf{ln}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2} = \mathbf{0}$ qui appartient à **[0.1, 0.5]** avec une précision **ε=0.001**. On écrit cette équation sous la forme ***x = g(x)*** et on vérifie les conditions de convergence. On peut écrire :

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}^{x^2-2} = \boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{x})$ et

$\boldsymbol{x} = \sqrt{\boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x}) + \mathbf{2}} = \boldsymbol{g_2}(\boldsymbol{x})$

Vérifions la condition de convergence pour cette méthode $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{max}_{x\in[a,b]}|\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{x})|$

$\boldsymbol{k_1} = \boldsymbol{max}_{x\in[0.1,0.5]}|\boldsymbol{g_1}'(\boldsymbol{x})| = \boldsymbol{max}_{x\in[0.1,0.5]}\left|2\boldsymbol{x}\boldsymbol{e}^{x^2-2}\right|$ on a $\boldsymbol{g_1}'(\boldsymbol{x})$ strictement croissante donc $\boldsymbol{k_1} = \boldsymbol{max}_{x=0.5}\left|2 * \mathbf{0.5}\boldsymbol{e}^{0.5^2-2}\right| = \mathbf{0.174} < \mathbf{1}$ cette forme converge.

On écrit : $\boldsymbol{x_{n+1}} = \boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{x_n}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x_n^2}-2}$ **(n=0,1,2,.....)**

Commençons ***x₀=0.3*** le milieu de l'intervalle initial donné :

$$\boldsymbol{n} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{x_1} = \boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x_0^2}-2} = 0.148$$

On calcule $|x_1 - x_0| = 0.152 > \varepsilon$;

On continue $\boldsymbol{n} = \mathbf{1},\ \boldsymbol{x_2} = \boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{x_1}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x_1^2}-2} = 0.138.$

On calcule $|x_2 - x_1| = 0.01 > \varepsilon$

On continue $\boldsymbol{n} = \mathbf{2},\ \boldsymbol{x_3} = \boldsymbol{g_1}(\boldsymbol{x_2}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x_2^2}-2} = 0.138.$

On calcule $|x_3 - x_2| = 0.00 < \varepsilon$, **La solution est** $\boldsymbol{x_2} = \mathbf{0.138}$

4 Méthode de Newton-Raphson

C'est la méthode la plus efficace et la plus utilisée, elle repose sur le développement de Taylor. Si ***f(x)*** est continue et continument dérivable dans le voisinage de $\overline{x}$ solution de ***f(x)=0***, alors le développement en série de Taylor autour d'un estimé x_n proche de $\overline{x}$ s'écrit :

$$f(\overline{x}) = f(x_n) + \frac{(\overline{x}-x_n)}{1!}f'(x_n) + \frac{(\overline{x}-x_n)^2}{2!}f''(x_n) + \cdots.$$

Si x_n est un estimé proche de $\overline{x}$, alors le carré de l'erreur $\varepsilon_n = \overline{x} - x_n$ et les termes de degrés supérieurs sont négligeable. Sachant que $f(\overline{x}) = 0$ on obtient la relation approximative :

$$f(x_n) + (\overline{x} - x_n)f'(x_n) \approx 0$$

Donc $$\overline{x} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

On peut écrire la $(n+1)^{eme}$ itération approximant $\bar{x}$ est :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \textit{(n=0,1,2,.....)}$$

Cette suite, si elle converge, doit converger vers la solution $\overline{x}$ de ***f(x)=0***. On remarque que ***f'(x)*** doit être non nulle.

4.1 Critère de convergence de la méthode de Newton-Raphson

Soit une fonction ***f*** définie sur ***[a,b]*** telle que :

i. $f(a)f(b) < 0$
ii. $f'(x)$ *et* $f''(x)$ sont non nulles et gardent un signe constant sur l'intervalle donné.

4.2 Critère d'arrêt de calcul pour la méthode de Newton-Raphson

Si la condition de convergence est vérifiée, le procédé itératif doit converger. Cela veut dire que chaque nouvelle itération est meilleure que la précédente, de ce fait on peut dire que si on a une précision ε, on arrête le calcul lorsque la différence absolue entre deux approximations successives est inférieure à la précision donnée. C'est-à-dire :

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \varepsilon$$

Si cette condition est vérifiée on prend x_{n+1} comme solution de ***f(x)=0***.

Exemple : Trouver la première racine de l'équation $f(x) = \ln(x) - x^2 + 2 = 0$ qui appartient à **[0.1, 0.5]** avec une précision **ε=0.0001**. On calcule la dérivée première et seconde de f et on vérifie les conditions de convergence.

On a : $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x$ qui est strictement décroissante et positive sur l'intervalle donné. $f'(x) > 0$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2$, $f''(x) < 0$ sur l'intervalle donné**.** La condition de convergence est vérifiée. On écrit donc : $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{\ln(x_n) - x_n{}^2 + 2}{\frac{1}{x_n} - 2x_n}$, (n=0,1,2,.....).

Commençons x_0**=0.3** le milieu de l'intervalle initial donné :

$$n = 0, \qquad x_1 = x_0 - \frac{\ln(x_0) - x_0{}^2 + 2}{\frac{1}{x_0} - 2x_0} = 0.0417$$

On calcule	$\lvert x_1 - x_0 \rvert > \varepsilon$;
On continue	$n = 1,\ x_2 = 0.0910.$
On calcule	$\lvert x_2 - x_1 \rvert => \varepsilon$
On continue	$n = 2,\ x_3 = 0.1285.$
On calcule	$\lvert x_3 - x_2 \rvert > \varepsilon$;
On continue	$n = 3,\ x_4 = 0.1376.$
On calcule	$\lvert x_4 - x_3 \rvert => \varepsilon$
On continue	$n = 4,\ x_5 = 0.1379.$
On calcule	$\lvert x_5 - x_4 \rvert => \varepsilon$

On continue $n = 5,\ x_6 = 0.1379$. **La solution est** $x_6 = 0.1379$

Remarques :

- La méthode de bissection est inconditionnellement convergente, son inconvénient est sa lenteur pour obtenir la solution avec une grande précision. Elle peut servir pour démarrer d'autres méthodes plus performantes.
- La méthode des approximations successives est plus rapide que celle de bissection à condition qu'elle converge.
- La méthode de Newton-Raphson est la plus rapide, elle permet d'obtenir des solutions très précises en un nombre réduit d'itérations.