

برمجة الأعداد الصحيحة

في البرامج الخطية كثيراً ما يعطي الحل الأمثل متغيرات قيمها تحوي أرقام بعد الفاصلة، لكن بعض المتغيرات الاقتصادية خاصة المتعلقة بالمتغيرات الفيزيائية لا يمكن تجزئتها وهو ما أدى إلى البحث في التخلص من هذا المشكل فنتج ما يسمى **بالبرمجة بالأعداد الصحيحة**.

برمجة الأعداد الصحيحة هي طريقة من طرق البرمجة الخطية تقتضي البحث عن الحل الأمثل للبرامج الخطية بحيث يحتوي الحل الأمثل على متغيرات قيمها أعداد طبيعية ويتطلب ذلك المرور بالمراحل التالية:

المرحلة الأولى:

إيجاد الحل الأمثل وفق البرنامج الأصلي، فإذا حصل على حل أمثل متغيراته لا تكون كلها قيم طبيعية ننتقل إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية:

وتسمى مرحلة التفريغ وفيها تتم إضافة قيود جديدة للبرنامج الأصلي بهدف الحصول على الحصول على حل أمثل آخر متغيراته تأخذ قيم صحيحة، وتستمر عملية إضافة القيود لحين التوصل إلى حل أمثل متغيراته لأعداد طبيعية.

طريقة التحديد والتفريغ:

إذا كانت قيم المتغيرات المتحصل عليها في الحل الأمثل طبيعية نتوقف ويكون ذلك هو الحل الأمثل المراد الوصول إليه، وإذا كانت قيم المتغيرات المتحصل عليها في الحل الأمثل غير ذلك فعندها نقوم بتوليد برنامج جديد بإضافة قيد آخر للبرنامج الأصلي وفق الآتي:

إذا كان المتغير في الحل الأمثل X_i يأخذ قيم غير صحيحة نكتبه ضمن المجال التالي:

$$b_{i1} < X_i < b_{i2}$$

حيث b_{i1} ، b_{i2} أعداد طبيعية وعليه يتم اشتقاق قيدين جديدين هما: $X_i \leq b_{i1}$ و $X_i \geq b_{i2}$

ونضيف كل قيد لوحده للبرنامج الأصلي فنحصل على برنامجين آخرين، طبعا نقوم بحل كل برنامج حلا مستقلا.

إذا كانت متغيرات الحل الأمثل طبيعية نتوقف ونأخذ الحل الذي يعطي أكبر قيمة لدالة الهدف بين الحلين في حالة التعظيم والعكس في حالة التدنئة.

أما في حالة كانت متغيرات الحل الأمثل غير طبيعية نستمر في تفريغ البرنامج الذي أعطى أمثل قيمة لدالة الهدف لغاية الحصول على حل أمثل قيم متغيراته طبيعية.

مثال (1):

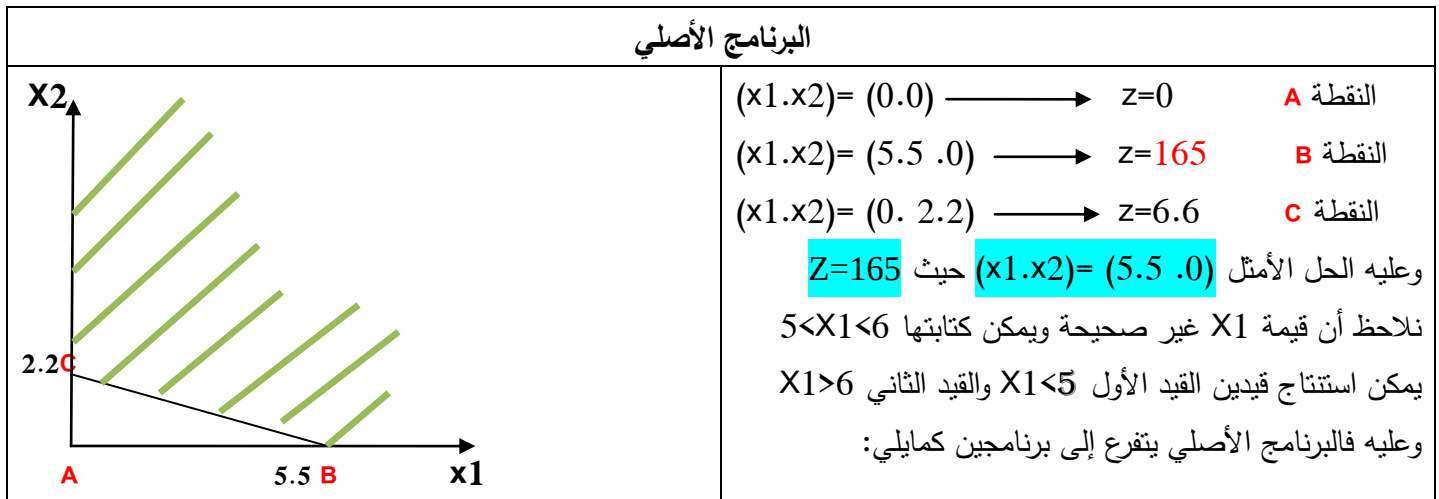
$$\text{Max : } Z = 30X_1 + 3X_2$$

$$\text{s / c } \begin{cases} 6X_1 + 15X_2 \leq 33 \\ X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0 \end{cases}$$

وهي صحيحة $X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0$

المطلوب: أوجد حلول البرنامج الخطي.

الحل: الحل البياني

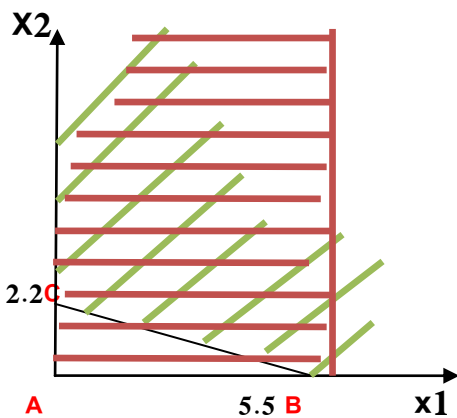


البرنامج الثاني

$$\text{Max : } Z = 30X_1 + 3X_2$$

$$s / c \begin{cases} 6X_1 + 15X_2 \leq 33 \\ X_1 \geq 6 \end{cases}$$

وهي صحيحة $X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0$



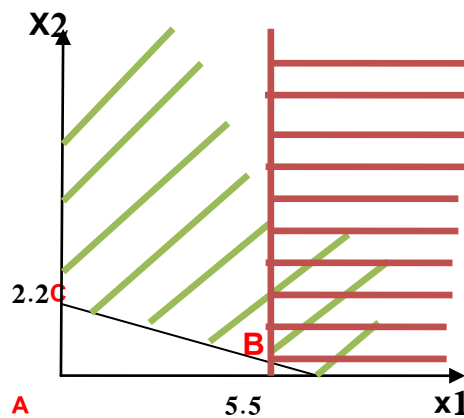
برنامج متناقض
وليس له حلول لذلك
يتم الاستغناء عنه

البرنامج الأول

$$\text{Max : } Z = 30X_1 + 3X_2$$

$$s / c \begin{cases} 6X_1 + 15X_2 \leq 33 \\ X_1 \leq 5 \end{cases}$$

وهي صحيحة $X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0$



النقطة A $(x_1, x_2) = (0, 0) \longrightarrow z = 0$
النقطة B $(x_1, x_2) = (5, 0.2) \longrightarrow z = 150.6$
النقطة C $(x_1, x_2) = (0, 2.2) \longrightarrow z = 6.6$
وعليه الحل الأمثل $(x_1, x_2) = (5, 0.2)$ حيث $Z = 150.6$
نلاحظ أن قيمة X_2 غير صحيحة ويمكن كتابتها $0 < X_2 < 1$
يمكن استنتاج قيدين الأول $X_1 < 0$ والقيد الثاني $X_1 > 1$
وعليه فالبرنامج الثاني يتفرع إلى برنامجين كمايلي:

البرنامج الرابع

$$\text{Max : } Z = 30X_1 + 3X_2$$

$$s / c \begin{cases} 6X_1 + 15X_2 \leq 33 \\ X_1 \geq 6 \\ X_2 \leq 0 \end{cases}$$

وهي صحيحة $X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0$

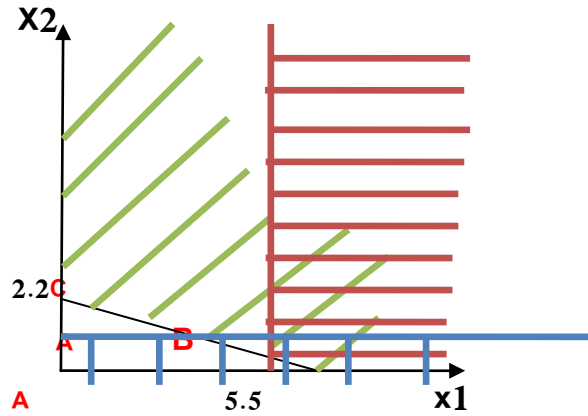
البرنامج الثالث

$$\text{Max : } Z = 30X_1 + 3X_2$$

$$s / c \begin{cases} 6X_1 + 15X_2 \leq 33 \\ X_1 \leq 5 \\ X_2 \geq 1 \end{cases}$$

وهي صحيحة $X_1 \geq 0 ; X_2 \geq 0$

برنامج متناقض
وليس له حلول لذلك
يتم الاستغناء عنه



النقطة A $(x_1, x_2) = (0.1) \longrightarrow z=3$

النقطة B $(x_1, x_2) = (3, 1) \longrightarrow z=93$

النقطة C $(x_1, x_2) = (0, 2.2) \longrightarrow z=6.6$

وعليه الحل الأمثل $(x_1, x_2) = (3, 1)$ حيث $Z=93$

نلاحظ أن قيمة كل من x_1 x_2 هي قيم أعداد طبيعية وعليه
فالحل هو الحل الأمثل للبرنامج الأصلي

ملاحظة:

قمنا في المثال السابق بحل البرنامج الخطي بالطريقة البيانية لأنه يوجد متغيرين فقط، أما في حالة وجود أكثر من متغيرين فإننا نقوم بحل البرنامج بطريقة السمبلكس