# الفصل الأول: مسائل النقل

أدى ازدياد حجم الشركات وانتشار فروعها محليا ودوليا في مناطق عديدة إلى تحمل تكاليف باهظة لنقل المنتجات من مواقع إنتاجها إلى مواقع تخزينها أو استهلاكها، لكن المبادئ الاقتصادية تقتضي ضرورة ترشيد نفقات النقل وتخفيضها إلى أدنى حد ممكن خصوصا في ظل المنافسة الشرسة بين الشركات، الأمر الذي عجل بظهور مشاكل النقل، وقد ظهر نموذج النقل كأداة كمية تهتم بتحديد الحجم الأمثل من الوحدات التي يتم نقلها من المصانع إلى المستودعات أو المخازن وبالشكل الذي يجعل تكلفة النقل في حدودها الدنيا.

تعود الجذور التاريخية لمشاكل النقل إلى عام 1941 حيث قدم F.L.Hitchcock دراسة بعنوان توزيع الإنتاج من عدة مصادر إلى عدة مناطق محلية، وقام كذلك T.C.Kopmans في عام 1947 بنشر دراسة تحت عنوان الاستثمار الأمثل لنظام النقل.

سنعرض في هذا الفصل صياغة مسائل النقل والتي تعد حالة خاصة من مسائل البرمجة الخطية، سنعرض أيضا طرق إيجاد الحل الأساسي الأول وطرق تحسينه، ثم تمثيل مشكلة النقل بشبكة.

## 1. صياغة مسائل النقل:

تُعرض مسائل النقل في حالة التعظيم وحالة التدنئة، لكن هذه الأخيرة أكثر شيوعاً لذا سنبدأ بعرضها أولا، على أن يتم عرض الحالة الثانية لاحقاً.

تتضمن مشكلة النقل عدد من المصادر m لكل منها عدد متاح من الوحدات لمنتج متجانس $a_i$ حيث $i = (1,2,.....,m)$، وكذلك أماكن وصول n كل منها تتطلب عدد من الوحدات من هذا المنتج $b_j$ حيث $j = (1,2,......,n)$، والأعداد $a_i$ و $b_j$ أعداد صحيحة موجبة، وتعطى التكلفة $c_{ij}$ اللازمة لنقل وحدة واحدة من المصدر i إلى مكان الوصول j على أن يكون الهدف هو إنشاء جدول انتقال أعداد صحيحة موجبة $x_{ij}$ ليواجه كل المتطلبات من المخزون الحالي بتكلفة انتقال كلية أقل ما يمكن، مع افتراض أن العرض الكلي

و الطلب الكلي متساويان. ويمكن تلخيص مشاكل النقل في جدول على النحو التالي:

| | المصب1 | المصب 2 | ........... | المصب n | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| المصدر1 | $C_{11}$ $X_{11}$ | $C_{12}$ $X_{12}$ | ........ | $C_{1n}$ $X_{1n}$ | $a_1$ |
| المصدر2 | $C_{21}$ $X_{21}$ | $C_{22}$ $X_{22}$ | ........ | $C_{2n}$ $X_{2n}$ | $a_2$ |
| ........ | ......... | .......... | ........ | .......... | ....... |
| المصدرm | $C_{m1}$ $X_{m1}$ | $C_{m2}$ $X_{m2}$ | ......... | $C_{mn}$ $X_{mn}$ | $a_m$ |
| الطلب | $b_1$ | $b_2$ | ......... | $b_n$ | |

ويمكن كتابة مشاكل النقل في صيغة برمجة خطية كمايلي:

### 1.1. دالة الهدف:

دالة الهدف هي عبارة عن تدنئة التكاليف المترتبة عن عملية النقل. والتي يمكن كتابتها من الشكل التالي:

$$\min : Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + \ldots\ldots + C_{1n}X_{1n} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + \ldots\ldots +$$
$$C_{2n}X_{2n} + \ldots\ldots\ldots + C_{m1}X_{m1} + C_{m2}X_{m2} + \ldots\ldots\ldots + C_{mn}X_{mn}$$

ويمكن كتابتها اختصارا من الشكل التالي:

$$\min : Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

### 2.1. القيود:

يوجد في مشاكل النقل قيود العرض وقيود الطلب.

- **قيود العرض:**

$$X_{11}+X_{12}+......+X_{1n}=a_1$$
$$X_{21}+X_{22}+.....+X_{2n}=a_2$$
$$.......................................$$
$$X_{m1}+X_{m2}+....+X_{mn}=a_n$$

ويمكن كتابتها مختصرة على النحو التالي:

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij}=a_i \qquad ,(i=1,2,......m)$$

- **قيود الطلب:**

$$X_{11}+X_{21}+......+X_{m1}=b_1$$
$$X_{12}+X_{22}+.....+X_{m2}=b_2$$
$$.........................................$$
$$X_{1n}+X_{2n}+....+X_{mn}=b_n$$

ويمكن كتابتها مختصرة من الشكل: $\sum_{i=1}^{m} X_{ij}=a_i \qquad ,(j=1,2,......n)$

**3.1. شرط عدم السلبية:** $X_{ij}\geq 0$

من خلال كتابة مشاكل النقل في صيغة برمجة خطية فإنه من الممكن حلها باستخدام طريقة السمبلكس، لكن يصعب الحل بهذه الطريقة في حالة وجود عدد معتبر من القيود والمتغيرات، لذا نلجأ إلى طرق حل أبسط.

## 2. طرق حل مشاكل النقل:

لغرض حل مشاكل النقل نتبع الخطوات التالية:

- إيجاد الحل الأساسي الأولي الممكن
- اختبار أمثلية الحل ( نتوقف في حالة الحل الأمثل وإلا فإننا نواصل الخطوتين ج، د )
- تحسين الحل إذ لم يكن أمثل

- تكرار الخطوتين ب، ج حتى نحصل على الحل الأمثل.

### 1.2. إيجاد الحل الأساسي الأولي الممكن:

توجد عدة طرق لإيجاد الحل الأساسي الأولي لمشاكل النقل منها:

- طريقة الركن الشمالي الغربي
- طريقة أقل تكلفة
- طريقة فوجل

### 1.1.2. طريقة الركن الشمالي الغربي:

تعتبر طريقة الركن الشمالي الغربي أبسط وأسهل طريقة يمكن من خلالها إيجاد الحل الأساسي الأولي، تبدأ هذه الطريقة بالخلية العليا في أقصى اليسار (الخلية (1،1))، حيث نخصص لها $X_{11}$ والذي يمثل كل الوحدات الممكنة دون الخروج عن القيود، وهذا سيكون طبعا الأصغر من بين $a_1, b_1$ ، بعد ذلك نستمر في التحرك خلية واحدة جهة اليمين إذا تبقى بعض الإمداد (العرض) ، فإن لم يتبقى أي إمداد نتحرك خلية للأسفل ونخصص كل الوحدات الممكنة لهذه الخلية دون الإخلال بقيود العرض والطلب بحث لا يمكن أن تزيد مجموع تخصيصات الصف رقم i عن $a_i$ ، ولا يمكن أن تزيد تخصيصات العمود رقم j عن $b_j$، يمكن للتخصيص أن يكون مساوياً للصفر لكن لا يمكنه أن يكون سالب.

**مثال (1−1):**

شركة جزائرية لها ثلاث وحدات إنتاجية متجانسة الإنتاج، تقوم بتموين ثلاث مناطق في جهات مختلفة، إذ علمت أن كميات عرض كل وحدة إنتاجية وطاقات استقبال كل منطقة، وتكاليف نقل الوحدة الواحدة بالدينار مدونة في الجدول أدناه:

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7 | 3 | 10 | 22 |
| وحدة إنتاجية2 | 4 | 6 | 0 | 24 |
| وحدة إنتاجية3 | 5 | 8 | 9 | 14 |
| الطلب | 18 | 22 | 20 | |

**المطلوب:** استخدام طريقة الركن الشمالي الغربي لإيجاد الحل الأساسي الأول.

**الحل:**

قبل أن نبدأ الحل يتم التأكد من أن كميات العرض مساوية لكميات الطلب، وفي مثالنا نلاحظ تساوي بين كمية العرض وكمية الطلب. وعليه يتم توزيع كميات السلع من الوحدات الإنتاجية إلى المناطق المختلفة باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي على النحو التالي:

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7<br>18 | 3<br>4 | 10<br>/ | ~~22~~ ~~4~~ 0 |
| وحدة إنتاجية2 | 4<br>/ | 6<br>18 | 0<br>6 | ~~24~~ ~~6~~ 0 |
| وحدة إنتاجية3 | 5<br>/ | 8<br>/ | 9<br>14 | ~~14~~ 0 |
| الطلب | ~~18~~ 0 | ~~22~~ ~~18~~ 0 | ~~20~~ ~~14~~ 0 | 60/60 |

تكون عملية النقل في الحل الأساسي الأول باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي كمايلي:

$X_{11}=18$ : نقل 18 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية1 إلى المنطقة1.

$X_{12}=4$ : نقل 4 وحدات من المنتج في الوحدة الإنتاجية1 إلى المنطقة2.

$X_{22}=18$ : نقل 18 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية2 إلى المنطقة2.

$X_{23}=6$ : نقل 6 وحدات من المنتج في الوحدة الإنتاجية3 إلى المنطقة3.

$X_{33}=14$ : نقل 14 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية3 إلى المنطقة3.

أما تكاليف النقل الكلية فتحسب كالأتي:

$$TC=(7)(18)+(3)(4)+(6)(18)+(0)(6)+(9)(14)=372DZ$$

### 2.1.2. طريقة أقل التكاليف:

تعتبر هذه الطريقة أفضل من طريقة الركن الشمالي الغربي لأننا في هذه الطريقة نبدأ بتشبيع الخلايا انطلاقا من أقل تكلفة في الجدول، ثم التكلفة المساوية أو الموالية لها وهكذا حتى يتم استفاء كل العرض والطلب. ولمزيد من التوضيح يمكن حل المثال السابق باستخدام طريقة أقل التكاليف على النحو التالي:

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7<br>/ | 3<br>22 | 10<br>/ | ~~22~~ 0 |
| وحدة إنتاجية2 | 4<br>4 | 6<br>/ | 0<br>20 | ~~24~~ ~~4~~ 0 |
| وحدة إنتاجية3 | 5<br>14 | 8<br>/ | 9<br>/ | ~~14~~ 0 |
| الطلب | ~~18~~ ~~14~~ 0 | ~~22~~ 0 | ~~20~~ 0 | 60/60 |

وعليه تكون عملية النقل في الحل الأساسي الأول باستخدام طريقة أقل التكاليف كمايلي:

$X_{12} = 22$ : نقل 22 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية1 إلى المنطقة2.

$X_{21} = 4$ : نقل 4 وحدات من المنتج في الوحدة الإنتاجية2 إلى المنطقة1.

$X_{23} = 20$ : نقل 20 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية2 إلى المنطقة3.

$X_{31} = 14$ : نقل 14 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية3 إلى المنطقة1.

أما تكاليف النقل الكلية فتحسب كالأتي:

$$TC = (3)(22) + (4)(4) + (0)(20) + (5)(14) = 152DZ$$

**ملاحظة:**

في حالة تساوي تكلفتين تعطى الأولوية إلى الخلية المرفقة بأكبر كمية لكونها تؤدي إلى تكلفة إجمالية أقل.

### 3.1.2. طريقة أقل فوجل:

تعتبر طريقة أهم الطرق الثلاثة حيث تتميز بقدرة الوصول إلى الحل الأمثل بأسرع وقت ممكن، إلا أنها تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه الطرق الأخرى، وتتلخص خطوات إيجاد الحل الأساسي الأول بهذه الطريقة بعد التأكد من أن جدول النقل متوازن كالأتي:[1]

- نحسب حاصل الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف وعمود من جدول النقل، نسمي حاصل الفرق بأرقام فوجل.
- نحدد الصف أو العمود الذي له أعلى رقم من أرقام فوجل ونخصص أكبر عدد من الوحدات إلى الخلية التي تحتوي على أقل كلفة الصف أو العمود الذي تم اختياره.
- ننقص العرض في الصف والطلب في العمود بنفس عدد الوحدات المخصصة للخلية.
- إذا أصبح العرض في الصف مساويا للصفر نلغي الصف، وإذا أصبح الطلب مساويا للصفر نلغي العمود، أما إذا أصبح الصف والعمود مساويان للصفر فنقوم بإلغاء الصف والعمود معا.
- تستمر الخطوات الأربعة أعلاه ونستمر إلى أن يتم توزيع جميع الوحدات المعروضة على الوحدات المطلوبة.

ولنفهم أكثر هذه الطريقة نأخذ نفس المثال السابق ونقوم باستخدام طريقة فوجل لإيجاد الحل الأساسي الأول، ويتم تطبيق خطوات طريقة فوجل كمايلي:

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض | فرق1 | فرق2 | فرق3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7 / | 3 22 | 10 / | ~~22~~ 0 | 4 | 4 | |
| وحدة إنتاجية2 | 4 4 | 6 / | 0 20 | ~~24~~ ~~4~~ 0 | 4 | 2 | |
| وحدة إنتاجية3 | 5 14 | 8 / | 9 / | ~~14~~ 0 | 3 | 3 | |
| الطلب | ~~18~~ ~~14~~ 0 | ~~22~~ 0 | ~~20~~ 0 | 60/60 | | | |
| فرق1 | 1 | 3 | 9 | | | | |
| فرق2 | 1 | 3 | | | | | |
| فرق3 | 1 | | | | | | |

[1] دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، **مرجع سابق**، ص148.

- **الفروقات الأولى:**

أعطت الفروقات الأول بين أقل تكلفتين على مستوى الصفوف الأرقام التالية: 3،4،4، أما الفروقات على مستوى الأعمدة فأعطت الأرقام التالية: 1،3،9، وعليه تكون أكبر فرق هو الرقم 9 المقابل للعمود الثالث، لذا نبدأ بتخصيص الوحدات (20 وحدة) في هذا العمود وبالضبط في الخلية ذات تكلفة 0 باعتبارها أقل تكلفة في العمود ذو الفرق الأكبر، ونلاحظ أن هذا العمود قد تشبع لذا فإننا نضع رمز (/) في الخليتين المتبقيتين في هذا العمود كدليل على أنهما لا يقبلان أي تخصيص.

- **الفروقات الثانية:**

نعود من جديد إلى إجراء الفروقات مع تفادي إعادة إيجادها للعمود المشبع، فنجد أن أكبر فرق هو 4 والذي يمثل الصف الأول، فنقوم بتخصيص مقدار 22 وحدة للخلية ذات التكلفة 3 باعتبارها أقل تكلفة في الصف الأول ، فنلاحظ أن الصف الأول والعمود الثاني قد تشبعا في آن واحد.

- **الفروقات الثالثة:**

نلاحظ أنه لم يتبقى في الجدول عدا الخليتين الواقعتين في العمود الأول، لذا نقوم بتخصيص 4 وحدات إلى الخلية ذات أقل تكلفة، ليتبقى في الأخير تخصيص 14 وحدة للخلية المتبقية ذات التكلفة5.

وعليه تكون عملية النقل في الحل الأساسي الأول باستخدام طريقة فوجل كمايلي:

$X_{12}=22$ : نقل 22 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية1 إلى المنطقة2.

$X_{21}=4$ : نقل 4 وحدات من المنتج في الوحدة الإنتاجية2 إلى المنطقة1.

$X_{23}=20$ : نقل 20 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية2 إلى المنطقة3.

$X_{31}=14$ : نقل 14 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية3 إلى المنطقة1.

أما تكاليف النقل الكلية فتحسب كالأتي:

$$TC=(3)(22)+(4)(4)+(0)(20)+(5)(14)=152DZ$$

**ملاحظة:**

- في حالة وجود تساوي قيمتين كبيرتين لأرقام فوجل بدل قيمة واحدة كبيرة فإننا نقوم بإشباع الخلية ذات أقل تكلفة و المقابلة لأرقام فوجل الكبيرتين، وفي حالة وجود تكلفتين أقل متساويتين فإننا نختار أحدهما لا على التعيين.
- يكون رقم فوجل مساويا للصفر في حالة وجود تكلفتين أقل متساويتين في نفس الصف أو العمود.

### 2.2. اختبار أمثلية الحل وتحسينه:

لمعرفة أمثلية الحل الأساسي الأول من عدمها، فإنه يمكننا استخدام طريقتين مختلفتين، يتعلق الأمر بطريقة التخطي وطريقة التوزيع المعدل.

### 1.2.2. طريقة التخطي:

تتطلب هذه الطريقة تقييم كل خلية غير مشغولة في جدول الحل الأساسي الأول لمعرفة ماذا سيحدث لتكاليف النقل الكلية إذا نقلت وحدة واحدة إلى أحد الخلايا غير المشغولة فإذا وجدنا أن ملء خلية معينة غير مشغولة ستؤدي إلى تقليل التكاليف، يتم تعديل الحل الراهن وتستمر عملية التقييم كل الخلايا غير المشغولة إلى أن نتوصل إلى أن ملء أي خلية غير م شغولة لا يؤدي إلى تقليل التكاليف الكلية للنقل.

كما يجب ملاحظة أن مشكلة للنقل تكون قابلة للحل الأمثل دون أي إجراءات إضافية إذا تحقق الشرط الأتي:

**عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1 أو عدد الخلايا المشغولة = (m+n-1)**

ولتطبيق هذه الطريقة يتم إتباع الخطوات التالية:

1. يتم رسم مسار مغلق لكل خلية غير مشغولة يتكون هذا المسار من مجموعة من القطع المستقيمة المتعاقبة الأفقية والعمودية، بحيث يبدأ من الخلية غير المشغولة المراد اختبارها إلى خلية مملوءة أخرى حتى يتم الوصول إلى الخلية غير المشغولة نفسها، ويسمح بتجاوز خلايا غير مشغولة أو مملوءة قصد الوصول إلى خلية مملوءة.

2. يبدأ المسار بعلامة موجبة (+) للخلية المراد تقييمها تعقبها علامة سالبة (–) للخلية التي تليها في المسار ثم علامة موجبة للخلية التي تليها وهكذا لجميع الخلايا التي يتكون منها المسار.

3. نحسب الكلفة غير المباشرة للخلية (تقييم الخلية) وذلك بجمع الكلفة للخلايا الواقعة على المسار، فإذا كانت هذه القيمة سالبة فمعنى ذلك أن ملء الخلية سيساهم في تخفيض التكاليف.

4. نكرر الخطوات السابقة وفي حالة وجود أكثر من خلية غير مشغولة، فإن كانت الكلف غير المباشرة موجبة أو معدومة فإن الحل الذي بين يدينا هو الحل الأمثل، أما إذا كانت هناك خلية غير مشغولة أو أكثر تكون كلفتها غير المباشرة سالبة فهذا يعني أن هناك إمكانية تحسين الحل وتخفيض التكاليف الكلية للنقل، بحيث تعطى الأولوية للخلية التي لها أكبر قيمة سالبة للكلفة غير المباشرة لأنها تساهم في تخفيض التكاليف وتؤدي إلى تحسين الحل.

5. يتم إشغال الخلية غير المشغولة من الخلايا المشغولة التي تحمل إشارة سالبة في نفس المسار.

6, نكرر الخطوات السابقة بنقل القيم بين الخلايا واختبار الخلايا غير المشغولة بنفس الطريقة حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل.

**مثال(1−2):** الجدول التالي يمثل الحل الأساسي الأول للمثال السابق والذي قمنا بإيجاده باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي :

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7<br>**18** | 3<br>**4** | 10<br>/ | **22** |
| وحدة إنتاجية2 | 4<br>/ | 6<br>**18** | 0<br>**6** | **24** |
| وحدة إنتاجية3 | 5<br>/ | 8<br>/ | 9<br>**14** | **14** |
| الطلب | **18** | **22** | **20** | |

**المطلوب :** أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة التخطي

**الحل:**

**أولا:** يتم التأكد من أن تحقق شرط: **عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة − 1**

من خلال الجدول نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة − 1 = 5، وعليه الشرط محقق.

**ثانيا:** يتم حساب الكلف غير مباشرة للخلايا غير المشغولة باستخدام مسارات مغلقة. والجداول التالية توضح كيفية رسم المسارات المغلقة للخلايا غير مشغولة:

المسار المغلق للخلية ( 1 , 3 )

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7 <br> 18 | 3 <br> 4 (−) | 10 <br> (+) | 22 |
| وحدة إنتاجية2 | 4 <br> / | 6 <br> 18 (+) | 0 <br> (−) 6 | 24 |
| وحدة إنتاجية3 | 5 <br> / | 8 <br> / | 9 <br> 14 | 14 |
| الطلب | 18 | 22 | 20 | |

المسار المغلق للخلية ( 2 , 1 )

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7 <br> 18 (−) | 3 <br> (+) 4 | 10 <br> / | 22 |
| وحدة إنتاجية2 | 4 <br> (+) | 6 <br> (−) 18 | 0 <br> 6 | 24 |
| وحدة إنتاجية3 | 5 <br> / | 8 <br> / | 9 <br> 14 | 14 |
| الطلب | 18 | 22 | 20 | |

المسار المغلق للخلية ( 3 , 1 )

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7 <br> 18 (−) | 3 <br> 4 (+) | 10 <br> / | 22 |
| وحدة إنتاجية2 | 4 <br> / | 6 <br> 18 (−) | 0 <br> (+) 6 | 24 |
| وحدة إنتاجية3 | 5 <br> (+) | 8 <br> / | 9 <br> ((−) 14 | 14 |
| الطلب | 18 | 22 | 20 | |

المسار المغلق للخلية ( 3 , 2 )

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7 <br> 18 | 3 <br> 4 | 10 <br> / | 22 |
| وحدة إنتاجية2 | 4 | 6 <br> 18 (−) | 0 <br> (+) 6 | 24 |
| وحدة إنتاجية3 | 5 <br> / | 8 <br> / (+) | 9 <br> (−) 14 | 14 |
| الطلب | 18 | 22 | 20 | |

وعليه تكون الكلف غير مباشرة للخلايا غير مشغولة كما يلي:

| الخلية غير المشغولة ( i , j ) | التكلفة غير المباشرة لنقل وحدة واحدة عبر المسار المغلق |
|---|---|
| ( 1 , 3 ) | $\delta_{13}=10-0+6-3=13$ لا تتطلب تحسين |
| ( 2 , 1 ) | $\delta_{21}=4-7+3-6=-6$ يمكن تحسينها |
| ( 3 , 1 ) | $\delta_{31}=5-7+3-6+0-9=-14$ يمكن تحسينها |
| ( 3 , 2 ) | $\delta_{32}=8-6+0-9=-7$ يمكن تحسينها |

من خلال التكاليف غير المباشرة لنقل وحدة واحدة عبر المسارات المغلقة يتبين:

- نقل وحدة واحدة إلى الخلية ( 3 , 1 ) عبر المسار المغلق سيرفع التكاليف الكلية لعملية النقل بمقدار 13 وحدة نقدية.
- نقل وحدة واحدة إلى الخلية ( 1 , 2 ) عبر المسار المغلق سيخفض التكاليف الكلية لعملية النقل بمقدار 6 وحدات نقدية.
- نقل وحدة واحدة إلى الخلية ( 1 , 3 ) عبر المسار المغلق سيخفض التكاليف الكلية لعملية النقل بمقدار 14 وحدة نقدية.
- نقل وحدة واحدة إلى الخلية ( 2 , 3 ) عبر المسار المغلق سيخفض التكاليف الكلية لعملية النقل بمقدار 7 وحدات نقدية.

وعليه سيتم اختيار الخلية ( 1 , 3 ) ليتم تحسين الحل من خلالها كونها تعطينا أكبر تخفيض للتكاليف الكلية لعملية النقل ( باعتبار أنها تحمل أكبر قيمة سالبة للتكلفة غير مباشرة).

**ثالثا:** تتم عملية التحسين بنقل كميات إلى الخلية المراد تحسينها، حيث يكون مقدار الكميات المنقولة مساوياً لأقل كمية في الخلايا السالبة التي يمر بها المسار المغلق.

وفي مثالنا أقل كمية في الخلايا السالبة التي يمر بها المسار المغلق هي 14وحدة، وبالتالي يتم طرح 14 وحدة من الخلايا ذات الإشارة السالبة وإضافتها إلى الخلايا ذات الإشارة الموجبة للمسار المغلق لينتج الجدول التالي:

| | منطقة1 | منطقة2 | منطقة3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| وحدة إنتاجية1 | 7 / 4 | 3 / 18 | 10 / / | 22 |
| وحدة إنتاجية2 | 4 / / | 6 / 4 | 0 / 20 | 24 |
| وحدة إنتاجية3 | 5 / 14 | 8 / / | 9 / / | 14 |
| الطلب | 18 | 22 | 20 | |

لتصبح تكاليف النقل الكلية كالأتي:

$$TC = (7)(4) + (3)(18) + (6)(4) + (0)(20) + (5)(14) = 176DZ$$

يظهر جليا أن التكاليف الكلية لعملية النقل انخفضت إلى 176 دج بعدما كانت 372 دج

**رابعا:** يتم التأكد مرة أخرى من تحقق شرط: **عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1**

عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1 = 5، وعليه الشرط محقق.

**خامسا:** يتم حساب الكلف غير مباشرة للخلايا غير المشغولة باستخدام مسارات مغلقة كما تطرقنا إليه سابقاً

وعليه تكون الكلف غير مباشرة للخلايا غير مشغولة كما يلي:

| **التكلفة غير المباشرة لنقل وحدة واحدة عبر المسار المغلق** | **الخلية غير المشغولة ( i , j )** |
|---|---|
| $\delta_{13}=10-0+6-3=13$ لا تتطلب تحسين | ( 1 , 3 ) |
| $\delta_{21}=4-7+3-6=-6$ يمكن تحسينها | ( 2 , 1 ) |
| $\delta_{32}=8-3+7-5=7$ لا تتطلب تحسين | ( 3 , 2 ) |
| $\delta_{33}=9-0+6-3+7-5=14$ لا تتطلب تحسين | ( 3 , 3 ) |

وعليه سيتم اختيار الخلية ( 2 , 1 ) ليتم تحسين الحل من خلالها كونها الخلية الوحيدة التي تحمل كلفة غير مباشرة سالبة. أما مقدار الكميات التي يمكن نقلها إلى الخلية ( 2 , 1 ) فهو 4 وحدات لينتج الجدول التالي:

| العرض | منطقة3 | منطقة2 | منطقة1 | |
|---|---|---|---|---|
| **22** | 10 / | 3 **18** | 7 / | **وحدة إنتاجية1** |
| **24** | 0 **20** | 6 $\varepsilon$ | 4 **4** | **وحدة إنتاجية2** |
| **14** | 9 / | 8 / | 5 **14** | **وحدة إنتاجية3** |
| | **20** | **22** | **18** | **الطلب** |

**6.** يتم التأكد مرة أخرى من تحقق شرط: **عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1**

عدد الخلايا المشغولة = 4، أما عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1 = 5، وعليه **الشرط غير محقق**

**وتعتبر حالة خاصة في مسائل النقل تدعى حالة التفكك.**

يتم معالجتها بوضع خلية تصورية أو أكثر –حسب الحالة– من الخلايا غير مشغولة على أنها خلايا مشغولة قيمتها $\varepsilon$ بجوار الصفر، لنقوم بإيجاد الحل الأمثل مع عدم الأخذ بعين الاعتبار $\varepsilon$ كونها قيمة مساعدة فقط.

وفي مثالنا سنقوم بوضع $\varepsilon$ في الخلية ( 2 , 2 ).

7. يتم حساب الكلف غير مباشرة للخلايا غير المشغولة باستخدام المسارات المغلقة لتكون الكلف غير مباشرة للخلايا غير مشغولة كما يلي:

| التكلفة غير المباشرة لنقل وحدة واحدة عبر المسار المغلق | الخلية غير المشغولة ( i , j ) |
|---|---|
| لا تتطلب تحسين $\delta_{11} = 7 - 3 + 6 - 4 = 6$ | ( 1 , 1 ) |
| لا تتطلب تحسين $\delta_{13} = 10 - 0 + 6 - 3 = 13$ | ( 1 , 3 ) |
| لا تتطلب تحسين $\delta_{32} = 8 - 6 + 4 - 5 = 1$ | ( 3 , 2 ) |
| لا تتطلب تحسين $\delta_{33} = 9 - 0 + 6 - 8 = 7$ | ( 3 , 3 ) |

الملاحظ أن كل قيم الكلف غير المباشرة للخلايا غير المشغولة هي قيم موجبة، لذلك فإن إشغال أي من هذه الخلايا سوف لن يخفض من التكاليف الكلية لعملية النقل ، وبذلك يكون الحل أمثل والذي يمكن تفصيله على النحو التالي:

$X_{12} = 22$ : يتم نقل 22 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية1 إلى المنطقة2.

$X_{21} = 4$ : يتم نقل 4 وحدات من المنتج في الوحدة الإنتاجية2 إلى المنطقة1.

$X_{23} = 20$ : يتم نقل 20 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية2 إلى المنطقة3.

$X_{31} = 14$ : يتم نقل 14 وحدة من المنتج في الوحدة الإنتاجية3 إلى المنطقة1.

أما تكاليف النقل تكون:

$$TC = (3)(22) + (4)(4) + (0)(20) + (5)(14) = 152DZ$$

### 2.2.2. طريقة التوزيع المعدل:

تفترض هذه الطريقة وجود مجهولين $V_j$ ويعبر عن الأعمدة و $U_i$ يعبر عن الصفوف، ثم نتبع الخطوات التالية:

- **الخطوة الأولى:**

يتم إيجاد قيم من $V_j$ و خلال $U_i$ من خلال الخلايا المشغولة باستخدام المعادلة التالية: $V_j + U_i = C_{ij}$

حيث: $C_{ij}$ تمثل تكلفة الخلية في الصف i والعمود j. مع افتراض أن $U_1 = 0$

- **الخطوة الثانية:**

يتم إيجاد التكاليف الحدية للخلايا غير مشغولة عن طريق المعادلة التالية: $\delta_{ij} = C_{ij} - V_j - U_i$

- **الخطوة الثالثة:**

إذا كانت كل التكاليف الحدية موجبة أو معدومة فإن الحل الذي بين يدينا هو الحل الأمثل، أما إذا كانت هناك خلية غير مشغولة أو أكثر تكون تكلفتها الحدية سالبة فهذا يعني أن هناك إمكانية تحسين الحل وتخفيض التكاليف الكلية للنقل، و تعطى الأولوية للخلية التي لها أكبر تكلفة حدية بقيمة سالبة.

**مثال (1-3)** : ليكن لدينا جدول النقل التالي:

| | مصب1 | مصب2 | مصب3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| منبع1 | 5<br>5 | 1<br>7 | 8<br>/ | 12 |
| منبع2 | 2<br>/ | 4<br>3 | 0<br>11 | 14 |
| منبع3 | 3<br>4 | 6<br>/ | 7<br>/ | 4 |
| الطلب | 9 | 10 | 11 | 30/30 |

**المطلوب** : أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدل

**الحل:**

يتم التأكد أولا أن: **عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة − 1**

من خلال الجدول نلاحظ أن عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة − 1 = 5، وعليه الشرط محقق. يمكن اختبار أمثلية الحل وتحسينه بإتباع الخطوات التالية:

- **الخطوة الأولى:**

يتم إيجاد قيم من $V_j$ و خلال $U_i$ من خلال الخلايا المشغولة باستخدام المعادلة التالية: $V_j+U_i=C_{ij}$ مع أخذ $U_1=0$

| | | $V_1=5$<br>**مصب1** | $V_2=1$<br>**مصب2** | $V_3=-3$<br>**مصب3** | **العرض** |
|---|---|---|---|---|---|
| $U_1=0$ | **منبع1** | 5<br>**5** | 1<br>**7** | 8<br>/ | **12** |
| $U_2=3$ | **منبع2** | 2<br>/ | 4<br>**3** | 0<br>**11** | **14** |
| $U_3=-2$ | **منبع3** | 3<br>**4** | 6<br>/ | 7<br>/ | **4** |
| **الطلب** | | **9** | **10** | **11** | **30/30** |

- **الخطوة الثانية:**

يتم إيجاد التكاليف الحدية للخلايا غير مشغولة عن طريق المعادلة التالية: $\delta_{ij}=C_{ij}-V_j-U_i$

| **الخلية غير المشغولة ( i , j )** | **التكاليف الحدية للخلايا غير مشغولة** |
|---|---|
| ( 1 , 3 ) | $\delta_{13}=8-(-3)-0=11$ لا تتطلب تحسين |
| ( 2 , 1 ) | $\delta_{21}=2-5-3=-6$ يمكن تحسينها |
| ( 3 , 2 ) | $\delta_{32}=6-1-(-2)=7$ لا تتطلب تحسين |
| ( 3 , 3 ) | $\delta_{33}=7-(-3)-(-2)=12$ لا تتطلب تحسين |

- **الخطوة الثالثة:**

الخلية التي لها تكلفة حدية بقيمة سالبة هي الخلية ( 2 , 1 ) وبالتالي نقوم بتحسينها.

بعد تحسين الخلية ( 2 , 1 ) من خلال نقل كميات إليها عبر المسار المغلق كما في طريقة التخطي حصلنا على الجدول التالي:

| | مصب1 | مصب2 | مصب3 | العرض |
|---|---|---|---|---|
| منبع1 | 5<br>2 | 1<br>10 | 8<br>/ | 12 |
| منبع2 | 2<br>3 | 4<br>/ | 0<br>11 | 14 |
| منبع3 | 3<br>4 | 6<br>/ | 7<br>/ | 4 |
| الطلب | 9 | 10 | 11 | 30/30 |

يتم اختبار فيما كان الحل المتوصل إليه أمثل أم لا. وفي البداية نلاحظ أن:

**عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1 = 5، وعليه الشرط محقق.**

- **المرحلة الأولى:**

يتم إيجاد قيم من $V_j$ و خلال $U_i$

| | | $V_1=5$ | $V_2=1$ | $V_3=3$ | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| | | مصب1 | مصب2 | مصب3 | |
| $U_1=0$ | منبع1 | 5<br>2 | 1<br>10 | 8<br>/ | 12 |
| $U_2=-3$ | منبع2 | 2<br>3 | 4<br>/ | 0<br>11 | 14 |
| $U_3=-2$ | منبع3 | 3<br>4 | 6<br>/ | 7<br>/ | 4 |
| الطلب | | 9 | 10 | 11 | 30/30 |

- **المرحلة الثانية:**

يتم إيجاد التكاليف الحدية للخلايا غير مشغولة عن طريق المعادلة التالية: $\delta_{ij}=C_{ij}-V_j-U_i$

| الخلية غير المشغولة ( i , j ) | التكاليف الحدية للخلايا غير مشغولة |
|---|---|
| ( 1 , 3 ) | $\delta_{13}=8-3-(-3)=8$ لا تتطلب تحسين |
| ( 2 , 2 ) | $\delta_{22}=4-1-(-3)=6$ لا تتطلب تحسين |
| ( 3 , 2 ) | $\delta_{32}=6-1-(-2)=7$ لا تتطلب تحسين |
| ( 3 , 3 ) | $\delta_{33}=7-3-(-2)=6$ لا تتطلب تحسين |

- **المرحلة الثالثة:**

نلاحظ من خلال جدول التكاليف الحدية للخلايا غير مشغولة أن كل التكاليف الحدية موجبة، وعليه يكون الحل الذي بين أيدينا هو الحل الأمثل. وبالتالي تتم عملية النقل على النحو التالي:

$X_{11}=2$ : يتم نقل 2 وحدات من المنتج في المنبع1 إلى المصب1.

$X_{12}=10$ : يتم نقل 10 وحدات من المنتج في المتبع1 إلى المصب2.

$X_{21}=3$ : يتم نقل 3 وحدات من المنتج في المنبع2 إلى المصب1.

$X_{23}=11$ : يتم نقل 11 وحدات من المنتج في المنبع2 إلى المنطقة3.

$X_{31}=4$ : يتم نقل 4 وحدات من المنبع3 إلى المصب1.

أما تكلفة النقل الكلية تكون:

$$TC=(5)(2)+(1)(10)+(2)(3)+(0)(11)+(2)(4)=38DZ$$

**ملاحظة:**

إن استخدامات مسائل النقل لا تقتصر فقط على حالة التدنئة، وإنما تستخدم أيضاً في حالة التعظيم ، ففي بعض الأحيان تكون الشركة متخصصة في النقل لصالح الغير وهنا يكون هدفها تحقيق أكبر ربح ممكن جراء عملية النقل ، لذا فهي تركز على المسارات ذات أكبر كلفة، و في جدول النقل يكون البحث على الخلايا ذات أكبر كلفة لإرسال الكميات لها، وتكون في هذه الحالة دالة الهدف تعظيم وتستبدل تكاليف نقل الوحدة بالربح المحصل عليه جراء نقل الوحدة الواحدة.

أما حل مسائل النقل في حالة التعظيم فهي لا تختلف كثيراً عن حالة التدنئة، إذ يتم إيجاد الحل الأساسي الأول بطريقة الركن الشمالي الغربي أو طريقة أعلى عائد وطريقة فوجل، غير أنه في الطريقة الأخيرة بدلا عن البحث عن أقل كلفة لإيجاد الفرق بينهما فإننا نبحث عن أعلى عائد والذي يليه وإيجاد الفرق بينهما,

وفي حالة اختبار الحل وتحسينه نتبع أيضاً طريقة التخطي أو طريقة التوزيع المعدل، غير أنه تعطى الأولوية للخلية الحاصلة على أعلى رقم موجب عوضاً عن السالب، ويكون الحل أمثل عندما تكون جميع القيم الحدية سالبة أو معدومة.

**حالات خاصة في مسائل النقل:**

**1. عدم تساوي العرض مع الطلب:** في الحياة العملية كثيراً ما يحصل عدم توازن بين الطاقة الإنتاجية المتاحة واحتياجات السوق لذا لابد من موازنة العرض مع الطلب لحل المسألة، في هذه الحالة نلجأ إلى إضافة عمود وهمي عندما يكون العرض أكبر من الطلب، أي إيجاد مصب وهمي وتكون تكلفة النقل إليه معدومة، أما في حالة الطلب أكثر من العرض فإننا نقوم بإضافة صف وهمي، وتكون قيمة الوحدات المنقولة في الصف أو العمود الوهمي هي الفرق بين العرض والطلب.

**2. وجود أكثر من حل أمثل:** قد نصادف في حلنا لمسائل النقل وجود حلول مثلى متعددة، ويمكن اكتشافه عندما تكون نتائج تقييم الخلايا غير مشغولة معدومة لخلية واحدة أو أكثر، ويمكن تفسير ذلك إلى أنه يمكننا تغيير اتجاه بعض الشحنات إلى اتجاهات أخرى وتبقى نفس التكلفة الكلية للنقل، وتجدر الإشارة إلى أن وجود حلول مثلى متعددة يعطي للإدارة مرونة أكبر في توزيع المنتجات.

**3. حالة التفسخ (عدم الانتظام):** تظهر هذه الحالة عندما يكون الشرط الأتي غير محقق: (عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1)، لمعالجة هذه الحالة نقوم بوضع خلية تصورية أو أكثر –حسب الحالة– من الخلايا غير مشغولة على أنها خلايا مشغولة قيمتها $\varepsilon$ بجوار الصفر، ثم نقوم بعدها بإيجاد الحل الأمثل.

**مثال (1-4):**

كلفت شركة نقل للقيام بنقل منتجات ثلاث مصانع إلى أربع مراكز تسويقية، فإذ علمت أن سعر نقل القنطار الواحد من كل مصنع إلى المراكز التسويقية وكذا الطاقة الإنتاجية لكل مصنع وطلب كل مركز تسويقي موضحة في الجدول التالي:

| العرض | مركز تسويقي4 | مركز تسويقي3 | مركز تسويقي2 | مركز تسويقي1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 500 | 10 | 3 | 8 | 6 | مصنع1 |
| 700 | 11 | 7 | 2 | 9 | مصنع2 |
| 200 | 10 | 4 | 5 | 12 | مصنع3 |
| | 800 | 100 | 400 | 200 | الطلب |

**المطلوب:** أوجد أفضل عملية نقل تحقق من خلالها شركة النقل أفضل ربح ممكن مستخدما طريقة فوجل لإيجاد الحل الأساسي الأول وطريقة التوزيع المعدل لبلوغ الحل الأمثل.

**الحل:**

من الملاحظ أن جدول النقل غير متوازن لأن كمية العرض لا تساوي كمية الطلب.

كمية العرض = 500+700+200 = 1400

كمية الطلب = 200+400+100+800 =1500

وعليه يتم إضافة صف وهمي على أساس أنه مصنع وهمي بأرباح صفرية، بحيث تكون الكميات المنقولة عبر الصف مساوية للفرق بين العرض والطلب وهو 100 قنطار، ليصبح جدول النقل متوازن من الشكل التالي:

| | مركز تسويقي1 | مركز تسويقي2 | مركز تسويقي3 | مركز تسويقي4 | العرض |
|---|---|---|---|---|---|
| مصنع1 | 6 | 8 | 3 | 10 | 500 |
| مصنع2 | 9 | 2 | 7 | 11 | 700 |
| مصنع3 | 12 | 5 | 4 | 10 | 200 |
| مصنع4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 100 |
| الطلب | 200 | 400 | 100 | 800 | 1500/1500 |

**استخدام طريقة فوجل في إيجاد الحل الأساسي الأول**

| | مركز تسويقي1 | مركز تسويقي2 | مركز تسويقي3 | مركز تسويقي4 | العرض | الفرق1 | الفرق2 | الفرق3 | الفرق4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| مصنع1 | 6<br>/ | 8<br>400 | 3<br>/ | 10<br>100 | ~~500~~<br>~~100~~<br>0 | 2 | 2 | 7 | |
| مصنع2 | 9<br>/ | 2<br>/ | 7<br>/ | 11<br>700 | ~~700~~<br>0 | 2 | 4 | 4 | 4 |
| مصنع3 | 12<br>200 | 5<br>/ | 4<br>/ | 10<br>/ | ~~200~~<br>0 | 2 | | | |
| مصنع4 | 0<br>/ | 0<br>/ | 0<br>100 | 0<br>/ | ~~100~~<br>0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| الطلب | ~~200~~<br>0 | ~~400~~<br>0 | ~~100~~<br>0 | ~~800~~<br>~~700~~ 0 | | | | | |
| الفرق1 | 3 | 3 | 3 | 1 | | | | | |
| الفرق2 | | 6 | 4 | 1 | | | | | |
| الفرق3 | | | 4 | 1 | | | | | |
| الفرق4 | | | 7 | 11 | | | | | |

يتم اختبار فيما كان الحل المتوصل إليه أمثل أم لا.

نبدأ بالتحقق من الشرط: **عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1**

عدد الخلايا المشغولة = 5 أما عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1 = 7 الشرط غير محقق، في هذه الحالة يتم إضافة $\varepsilon_1$، $\varepsilon_2$ إلى جدول النقل كما تم التطرق إليه أنفا. ويصبح جدول النقل من الشكل التالي:

| العرض | مركز تسويقي4 | مركز تسويقي3 | مركز تسويقي2 | مركز تسويقي1 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 500 | 10<br>100 | 3 | 8<br>400 | 6 | مصنع1 |
| 700 | 11<br>700 | 7<br>$\varepsilon_1$ | 2 | 9 | مصنع2 |
| 200 | 10<br>$\varepsilon_2$ | 4 | 5 | 12<br>200 | مصنع3 |
| 100 | 0 | 0<br>100 | 0 | 0 | مصنع4 |
| 1500/1500 | 800 | 100 | 400 | 200 | الطلب |

بما أن الشرط: **عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – 1** أصبح محققاُ يمكن اختبار أمثلية الحل بطريقة التوزيع المعدل على النحو التالي:

- **الخطوة الأولى:**

يتم إيجاد قيم من $V_j$ و خلال $U_i$ من خلال الخلايا المشغولة باستخدام المعادلة التالية: $V_j+U_i=C_{ij}$ مع أخذ $U_1=0$

| | | $V_1=12$ | $V_2=8$ | $V_3=6$ | $V_4=10$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | مركز تسويقي1 | مركز تسويقي2 | مركز تسويقي3 | مركز تسويقي4 | العرض |
| $U_1=0$ | مصنع1 | 6 | 8<br>400 | 3 | 10<br>100 | 500 |
| $U_2=1$ | مصنع2 | 9 | 2 | 7<br>$\varepsilon_1$ | 11<br>700 | 700 |
| $U_3=0$ | مصنع3 | 12<br>200 | 5 | 4 | 10<br>$\varepsilon_2$ | 200 |
| $U_4=-6$ | مصنع4 | 0 | 0 | 0<br>100 | 0 | 100 |
| | الطلب | 200 | 400 | 100 | 800 | 1500/1500 |

- **الخطوة الثانية:**

يتم إيجاد الأرباح الحدية للخلايا غير مشغولة عن طريق المعادلة التالية: $\delta_{ij}=C_{ij}-V_j-U_i$

| الأرباح الحدية للخلايا غير مشغولة | الخلية غير المشغولة ( i , j ) |
|---|---|
| $\delta_{13}=6-12-0=-6$ لا تتطلب تحسين | ( 1 , 3 ) |
| $\delta_{13}=3-6-0=-3$ لا تتطلب تحسين | ( 1 , 3 ) |
| $\delta_{21}=9-12-1=-4$ لا تتطلب تحسين | ( 2 , 1 ) |
| $\delta_{22}=2-8-1=-7$ لا تتطلب تحسين | ( 2 , 2 ) |
| $\delta_{32}=5-8-0=-3$ لا تتطلب تحسين | ( 3 , 2 ) |
| $\delta_{33}=4-6-0=-2$ لا تتطلب تحسين | ( 3 , 3 ) |
| $\delta_{41}=0-12-(-6)=-6$ لا تتطلب تحسين | ( 4 , 1 ) |
| $\delta_{42}=0-8-(-6)=-2$ لا تتطلب تحسين | ( 4 , 2 ) |
| $\delta_{44}=0-10-(-6)=-4$ لا تتطلب تحسين | ( 4 , 4 ) |

- **الخطوة الثالثة:**

يبين الجدول أن كل الأرباح الحدية سالبة، وعليه يكون الحل المتوصل إليه هو الحل الأمثل. وبالتالي تتم عملية النقل التي تعظم أرباح الشركة على النحو التالي:

$X_{12} = 400$ : يتم نقل 400 قنطار منتج من المصنع1 إلى المركز التسويقي2.

$X_{14} = 100$ : يتم نقل 100 قنطار منتج من المصنع1 إلى المركز التسويقي4.

$X_{24} = 700$ : يتم نقل 700 قنطار منتج من المصنع2 إلى المركز التسويقي4.

$X_{31} = 200$ : يتم نقل 200 قنطار منتج من المصنع3 إلى المركز التسويقي1.

أما أرباح النقل الكلية تكون:

$$TR = (8)(400) + (10)(100) + (11)(700) + (12)(200) = 14300DZ$$