تحليل الانحدار الخطي البسيط

يعتبر نموذج الانحدار الخطي البسيط أبسط أنواع الانحدار نظرا لاعتماده على متغير واحد مستقل وأخر تابع، حيث توجد عديد العلاقات الاقتصادية التي يمكن قياسها باستخدام هذا الأسلوب مثل علاقة الإنفاق الاستهلاكي بالدخل المتاح، وكذا علاقة الكمية المطلوبة من السلعة مع سعرها.

لكنه قد لا يعبر في كثير من الأحيان عن واقع سلوك المتغيرات والظواهر الاقتصادية، ومع ذبك فهو بشكل منطلقا أساسيا نحو التوسع في عدد المتغيرات والمعادلات.

صياغة النموذج الخطي البسيط:

يمكن نمذجة العلاقة بين المتغيرين Y_i و X_i على الشكل :

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i , \quad i = 1.........n$$

حيث :

Y_i يسمى بالمتغير التابع

و X_i بالمتغير المستقل

β_0 وβ_1 هما معلما النموذج.

أما ε_i فيمثل الخطأ العشوائي لأنه من غير الممكن أن تقع النقاط الفعلية تماما على خط واحد، لذا وجب أن تعدل باستخدام ε_i، وعليه يكون $\varepsilon_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i$

ويرجع وجود حد الخطأ إلى عدة أسباب منها :

- الصياغة الرياضية غير السليمة للنموذج.
- إهمال بعض المتغيرات المستقلة التي يمكن أن تؤثر على المتغير التابع في النموذج.

- حدوث خطأ في كل من تجميع البيانات وقياس المتغيرات الاقتصادية.

ويترتب على إسقاط هذا الافتراض حدوث أخطاء تحديد تتمثل فيما يلي:

- تحديد خاطئ للمتغيرات المستقلة : ويتمثل ذلك في إغفال متغيرات مستقلة هامة في نموذج الانحدار المراد تقديره، أو احتواء هذا النموذج على متغيرات مستقلة غير هامة.
- تغير معاملات الانحدار: إن معاملات الانحدار قد لا تظل ثابتة أثناء الفترة الزمنية التي تم تجميع البيانات عنها.
- العلاقة الحقيقية بين المتغير التابع والمستقل قد تكون غير خطية.

فرضيات نموذج الانحدار الخطي البسيط

يستند نموذج الانحدار الخطي البسيط على مجموعة من الفرضيات يمكن إيجازها في:

الفرضية الأولى: التوقع الرياضي للأخطاء معدوم

وبصيغة أخرى مجموع الانحرافات السالبة يساوي مجموع الانحرافات الموجبة:

تكتب رياضيا: $E(\varepsilon_i)=0 \qquad ,\forall i=1.....n$

الفرضية الثانية: تجانس تباين الأخطاء

بمعنى أن تشتت القيم حول المتوسط ثابت (قيم ε_i تتغير حول مدى ثابت)

تكتب رياضيا: $Var(\varepsilon_i)=E(\varepsilon_i^2)=\sigma^2 \quad ,\forall i=1.....n$

الفرضية الثالثة: عدم وجود ارتباط خطي بين الأخطاء

بمعنى أن التباينات المشتركة بين الأخطاء المختلفة تكون معدومة

تكتب رياضيا: $Cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0 \quad ,\forall i\neq j \qquad i,j=1.....n$

الفرضية الرابعة: عدم وجود ارتباط خطي بين X_i, و ε_i

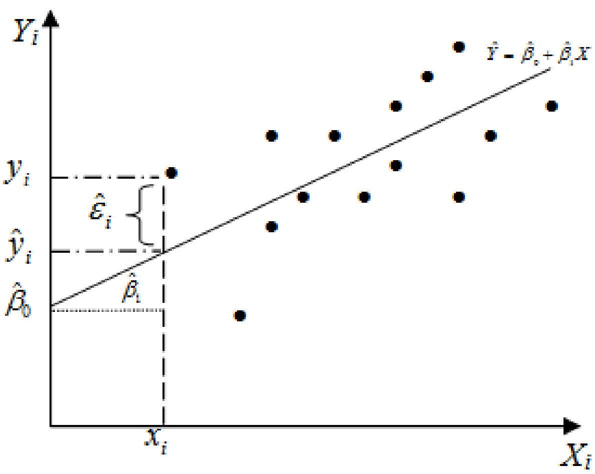
تكتب رياضيا: $Cov(X_i, \varepsilon_i) = 0, \forall i = 1, \dots, n$

تقدير معالم النموذج باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية:

تهدف هذه الطريقة إلى تحديد تقديرات لمعلنتي الخط المستقيم $\hat{\beta}_0$ $\hat{\beta}_1$ واللتان تجعلان هذا الخط يمثل هذه البيانات ويتطلب ذلك أن يكون مجموع الأخطاء العشوائية أو الانحرافات بين القيم الفعلية Y_i والمقدرة $\hat{y}_1$ تساوي الصفر أي: $\sum\left(y_i - \hat{y}_i\right)$

هذا الشرط ضروري لكنه غير كافي لأنه يمكن أن يتوفر عدد لا نهائي من الخطوط المستقيمة وتحقق هذا الشرط ولذلك الشرط الضروري والكافي الحصول على مجموع مربعات الأخطاء (الانحرافات) حول خط انحدار أقل ما يمكن أي: $\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2$ ، حيث: $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$. وهو ما يمكن الحصول عليه بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية من بيانات العينة، وبناء على هذا الشرط سميت بطريقة المربعات الصغرى العادية.

(أنظر الشكل).



وهذا ما يمكن كتابته رياضيا بـ :

$$Min \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = \underset{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1}{Min} \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)^2$$

والشرط اللازم لتدنئة هذه العلاقة هو أن تكون المشتقات الجزئية بالنسبة $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0$ معدومة أي :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_0} \sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)^2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}_1} \sum_i \left(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i\right)^2 = 0 \end{cases}$$

بعد حل جملة المعادلين السابقة نتحصل على تقدير معلمتي النموذج :

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \dfrac{n\sum_i X_i Y_i - \sum_i X_i \sum_i Y_i}{n\sum_i X_i^2 - \left(\sum_i X_i\right)^2} \\ \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} \end{cases}$$

ويمكن استخدام صيغة مكافئة لتقدير $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$$

ويكون النموذج المقدر (خط الانحدار) بطريقة المربعات الصغرى المقدرة (OLS) كما يلي:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

مثال 1:

يبين الجدول التالي تطور كل من حجم الإنتاج وعدد العمال في مؤسسة ما خلال فترات متعددة:

حجم الإنتاج Y_i	عدد العمال X_i
80	11
90	13
130	16
120	15
90	12
110	12
120	13

المطلوب:

1. أوجد معادلة خط الانحدار المقدر بطريقة المربعات الصغرى المقدرة (OLS).

الحل:

للحصول على $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ نستعين ب: $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$ و $\bar{Y} = \beta_0 + \beta_1 \bar{X}$

ملاحظة هامة: نأخذ رقمين بعد الفاصلة مع استخدام التقريب

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y_i}{7} = \frac{740}{7} = 105.71 \qquad {}_1\ \bar{X} = \frac{\sum X_i}{7} = \frac{92}{7} = 131.43$$

وعليه يمكن الاستعانة بالجدول التالي:

عدد العمال X_i	حجم الإنتاج بالطن Y_i	$(X_i - \bar{X})$	$(Y_i - \bar{Y})$	$(Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})$	$(X_i - \bar{X})^2$
110	80	- 21,43	- 25,71	550,96	459,24
130	90	- 1,43	- 15,71	22,46	2,04
160	130	28,57	24,29	693,96	816,24
150	120	18,57	14,29	265,36	344,84
120	90	- 11,43	- 15,71	179,56	130,64
120	110	- 11,43	4,29	- 49,03	130,64
130	120	1,43	14,29	- 20,43	2,04
				$\sum_{i=1}^{7} = 1642.84$	$\sum_{i=1}^{7} = 1885.68$

وعليه يكون: $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \dfrac{1642.84}{1885.68} = 0.87$

ويكون أيضا:

$$\bar{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X} \quad \Rightarrow \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \beta_1 \bar{X} \quad \Rightarrow \hat{\beta}_0 = 105.71 - (0.87)114.34 \Rightarrow \quad \hat{\beta}_0 = -8.63$$

تكون في الأخير معادلة الخط المقدر من الشكل: $\hat{Y}_i = -8.63 + 0.87 X_i$

خصائص المقدر الجيد:

1,عدم التحيز: $E(\hat{\beta}_0) = \beta_0$, $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$

ومنه نقول أن $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ هما مقدرتين غير متحيزتين لـ β_0 و β_1 على التوالي.

2. خطية المقدرات: لحساب β_0 و β_1 نستعمل المتغير التابع في صورته الخطية فقط لتبسيط الحسابات.

3. أقل تباين: عند مقارنة المقدر مع بقية المقدرات الخطية غير المتحيزة الأخرى فنجده أقل تباين.

اختبار القدرة (القوة) التفسيرية للنموذج:

يستخدم معامل التحديد كمقياس يحدد القدرة التفسيرية لنموذج الانحدار الخطي البسيط، حيث يشير معامل التحديد R^2 إلى النسبة المئوية للتغير الكلي في المتغير التابع (Y_i) والتي يمكن تفسيرها بواسطة المتغير المستقل (X_i) معبرا عنها بمجموع مربعات انحرافات قيم المتغير التابع (Y_i) عن وسطه الحسابي $(\bar{Y})$

بمعنى:
$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{\varepsilon}_i$$
$$Y_i - \bar{Y} = \hat{Y}_i - \bar{Y} + \hat{\varepsilon}_i$$

وبتربيع طرفي المعادلة أعلاه وجمعها بالنسبة لكل i نجد :

$$\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$$

- $\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2$ يمثل مجموع مربعات الانحرافات الكلية في المتغير Y: Total Sum of Squares (TSS)
- $\sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ يمثل مجموع مربعات الانحرافات المشروحة : Explained Sum of Squares (ESS)
- $\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$ يمثل مجموع مربعات البواقي : Residual Sum of Squares (RSS)

تصبح المعادلة السابقة من الشكل :

$$\boxed{TSS = ESS + RSS}$$

وبتقسيم كل الأطراف على TSS نجد :

$$1 = \frac{ESS}{TSS} + \frac{RSS}{TSS}$$

وعليه يكون معامل التحديد R^2 من الشكل:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

أي:

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

وتجدر الإشارة أن: $0 \le R^2 \le 1$

ويمكن تمييز الحالات التالية:

- عندما يأخذ R^2 أكبر قيمة وهي 1، تكون كل نقاط الملاحظات (Y_i, X_i) تقع على الخط المقدر، فالقدرة التفسيرية للنموذج عالية جدا.
- أما إذا كان R^2 يأخذ أصغر (أسوء) قيمة له وهي الصفر، فليس هناك جودة في التوفيق و الارتباط بين المتغير التابع و المستقل أي ليس للنموذج قدرة تفسيرية على الإطلاق ويعود دلك إلى سببين، إما العلاقة الموجودة بين المتغيرين هي غير خطية أو غياب السببية بينهما.

العلاقة بين R^2 و $\hat{\beta}_1$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = \frac{\hat{\beta}_1 \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

الفرق بين معامل التحديد R^2 و معامل الارتباط r^2 :

إن الفرق الجوهري بين معامل التحديد و معامل الارتباط يكمن في السببية حيث يقيس معامل الارتباط العلاقة بين متغيرين بغض النظر عن الدور الذي يلعبه كل متغير، أما معامل التحديد فيقيس أيضا الارتباط ولكن يأخذ بعين الاعتبار السببية حيث أن المتغير X_i هو الذي يشرح الظاهرة Y_i.

حدود (فترات) الثقة لمعالم النموذج:

نقصد بحدود الثقة تلك الحدود التي يمكن أن تقع داخلها معلمة المجتمع بدرجة ثقة معينة، فعند مستوى معنوية 5% فإن ذلك يعني أنه احتمال 95% أن تقع معلمة النموذج داخل الحدود واحتمال 5% أن تقع خارجها. ويسمى الاحتمال 95% مستوى الثقة.

في حالة $N \le 30$ و σ^2 غير معروف:

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \longrightarrow t_{(n-2)}$$

$$\frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \longrightarrow t_{(n-2)}$$

عند مستوى معنوية $(\%\alpha)$ يكون مجال الثقة لكلا المعلمين :

$$\Pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \leq +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha$$
$$\Pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \leq +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right]=1-\alpha$$

إذا ضربنا (داخل الاحتمال) كل الأطراف في $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}$ $(\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1})$ وأضفنا β_0 (β_1) لأطراف المتراجحة نجد :

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}, \hat{\beta}_0 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$
$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}, \hat{\beta}_1 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

حيث: $t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ تمثل القيمة الحرجة لتوزيع *Student* بدرجة حرية $n-2$ و نسبة معنوية $(\%\alpha)$

حساب قيمة $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}$ و $\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$

نحسب أولا تباين البواقي:
$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2=\frac{\sum_{i=1}^{7}\hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}$$

ثم نقوم بحساب تباين كل مقدر:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2=\operatorname{var}(\hat{\beta}_1)=\frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$$
$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}^2=\operatorname{var}(\hat{\beta}_0)=\frac{\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2}{n}+\bar{X}^2\operatorname{var}(\hat{\beta}_1)$$

و الأخطاء المعيارية:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_1)}$$
$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\text{var}(\hat{\beta}_0)}$$

في حالة $N \geq 30$ و σ^2 معروف: نستخدم التوزيع الطبيعي بدل لتوزيع *Student*

اختبار الفرضيات

اختبار المعنوية الإحصائية للمعالم

تثبت صحة النموذج أو عدم صحته من خلال اختباره، ولكن قبل أ، نختبر صحة النموذج ككل يمكن اختبار معالمه.

اختبار المعلم β_0

$H_0 : \beta_0 = 0$ (فرضية العدم)

ضد : $H_1 : \beta_0 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

نكتب: $t_c = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$ وهي القيمة المحسوبة. لينتج $t_c = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$ لأننا نختبر $\beta_0 = 0$

- إذا كانت $\left|\frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}\right| \leq t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ فإن المعلم β_0ليس له معنوية إحصائية أي يساوي معنويا الصفر (نقبل H_0)
- إذا كانت $\left|\frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}\right| > t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلم β_0 له معنوية إحصائية فهو يختلف معنويا عن الصفر(نرفض H_0)

حيث $t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ مأخوذة من جدول التوزيع *t* (ستودنت) وتسمى بالقيمة المجدولة،

ملاحظة هامة: عندما يكون حجم العينة كبيرا ($n > 30$) فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ و ذلك بحساب المساحة المظللة للتوزيع الطبيعي.

اختبار المعلم β_1

$H_0 : \beta_1 = 0$ (فرضية العدم)

ضد : $H_1 : \beta_1 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

نكتب: $t_c = \dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$ وهي القيمة المحسوبة. لينتج $t_c = \dfrac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$ لأننا نختبر $\beta_1 = 0$

- إذا كانت $\left|\dfrac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| \leq t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ فإن المعلم β_1ليس له معنوية إحصائية أي يساوي معنويا الصفر (نقبل H_0)
- إذا كانت $\left|\dfrac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| > t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ أي المعلم β_1 له معنوية إحصائية فهو يختلف معنويا عن الصفر(نرفض H_0)

. اختبار التوزيع *F* (اختبار المعنوية الكلية للنموذج)

إن اختبار معنوية (أثر) المتغير المستقل X_i $(H_0 : \beta_1 = 0)$ يمكن أن يكون في شكل توزيع *Fisher*،

$$F = \frac{R^2/1}{\left(1-R^2\right)/(n-2)} = \frac{R^2}{\left(1-R^2\right)}.(n-2) \sim F_{1,n-2}$$

$H_0 : \beta_1 = \beta_1 = 0$ فرضية العدم

$H_1 : \beta_1 \neq 0$ فرضية بديلة

- إذا كانت $F_c \leq F_{1\ n-2}$ فإننا نقبل H_0 وبالتالي النموذج ليس له معنوية إحصائية
- إذا كانت $F_c > F_{1\ n-2}$ فإننا نرفض H_0 وبالتالي النموذج له معنوية إحصائية (مقبول إحصائيا)

تابع للمثال 1:

باستخدام معطيات المثال 1 أوجد:

1. القوة التفسيرية للنموذج
2. أوجد مجال الثقة لمعالم النموذج بنسبة معنوية $\alpha = 0.05$، مع العلم بأن $t_t = 2.57$

3. اختبر المعنوية الإحصائية لمعالم النموذج ثم اختبر المعنوية الإحصائية الكلية للنموذج إذا علمت أن

$F_t = 5.99$

الحل:

1. القوة التفسيرية للنموذج يعني حساب قيمة R^2

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} \qquad R^2 = \frac{\sum(\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2}$$

وعليه يجب حساب قيمة $\sum \hat{\varepsilon}_i^2$ من المعادلة $\hat{Y}_i = -8.63 + 0.87 X_i$ وعليه يكون من الأحسن الاستعانة بالجدول التالي:

عدد العمال X_i	حجم الإنتاج بالطن Y_i	$\hat{Y}$	$Y_i - \hat{Y}$	$\hat{\varepsilon}_i^2 = (Y_i - \hat{Y})^2$
110	80	87.07	-7.007	48.98
130	90	104.47	-14.47	209.38
160	130	130.57	-0.57	0.32
150	120	121.87	-1.87	3.5
120	90	95.77	-5.77	33.29
120	110	95.77	14.23	202.49
130	120	104.47	15.53	241.18
				$\sum \hat{\varepsilon}_i^2 = 740.14$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum(Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{740.14}{2171.4} = 1 - 0.34 = 0.66$$

2. مجال الثقة لمعالم النموذج بنسبة معنوية $\alpha = 0.05$، مع العلم بأن $t_t = 2.57$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2} = \frac{740.14}{7-2} = 148.02$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 = \text{var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^{7}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{148.02}{1885.68} = 0.08 \Rightarrow \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = 0.28$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}^2 = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{n} + \bar{X}^2 \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}^2 = \frac{148.02}{7} + (131.43)^2 (0.08) = 1403.06 \Rightarrow \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = 37.46$$

- المعلم β_0 :

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{0.025}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} , \hat{\beta}_0 + t_{0.025}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_0 \in [-8.63 - (2.57)(37.46), \quad -8.63 + (2.57)(37.46)]$$

$$\beta_0 \in [-104.90 \quad , \quad 87.64]$$

- المعلم β_1 :

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{0.025}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} , \hat{\beta}_1 + t_{0.025}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

$$\beta_1 \in [0.87 - (2.57)(0.28), \quad 0.87 + (2.57))(0.28)]$$

$$\beta_1 \in [0.15 \quad , \quad 1.59]$$

3, المعنوية الإحصائية لمعالم النموذج ثم اختبر المعنوية الإحصائية الكلية للنموذج إذا علمت أن $F_t = 5.99$

- المعلم β_0 : $H_0 : \beta_0 = 0$ (فرضية العدم)

ضد : $H_1 : \beta_0 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

$$\left|\frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}\right| < t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \qquad t_c = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} = \frac{-8.63}{39.46} = -0.22$$

وعليه نقبل H_0 أي أن المعلم β_0 ليس له معنوية إحصائية

- المعلم β_1 : $H_0 : \beta_1 = 0$ (فرضية العدم)

ضد : $H_1 : \beta_1 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

$$\left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| > t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \qquad t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \frac{0.87}{0.28} = 3.11$$

نقبل H_1 أي أن المعلم β_1 له معنوية إحصائية

اختبار المعنوية الإحصائية الكلية:

$H_0 : \beta_1 = 0$ فرضية صفرية

ضد : $H_1 : \beta_1 \neq 0$ فرضية بديلة

$$F_c = \frac{R^2/1}{(1-R^2)/(n-2)} = \frac{0.66/1}{(1-0.66)/(7-2)} = 9.43$$

$$F_c = 9.43 > F_{0.05}(2,7)$$

وعليه نقبل الفرضية البديلة H_1 أي أن للنموذج معنوية إحصائية بنسبة معنوية $\alpha = 5\%$.