Universitaire Larbi Ben M'hidi O.E.B

Département de MI

3ème Année Licence Maths(S5) Module : Optimisation

# Série 1

**Exercice 01 :**

1. Calculer le gradient de $f(x, y, z)$ dans les cas suivants.
   a. $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$.
   b. $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$.
   c. $f(x, y, z) = e^x \sin y \ln z$.
2. Déterminer les points stationnaires de la fonction $f$ de deux variables définie par
$$f(x; y) = x(x+1)^2 - y^2.$$
3. Calculer la dérivée ou le gradient de $(g \circ f)$ par deux méthodes dans les cas suivants
   a. $f(x, y) = \exp(x) + \cos(y)$, $g(x) = 4x + 1$.
   b. $f(x) = (\exp(x), \cos(x))$, $g(x, y) = 4x + 2y$.

**Exercice 02 :**

1. Montrez que
   a.
$$\nabla(f.g) = g.\nabla f + f.\nabla g$$
   b.
$$\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g.\nabla f - f.\nabla g}{g^2}$$
2. Montrer l'égalité suivante
$$\nabla^2 f(x)h = \nabla \langle \nabla f(x), h \rangle \; ; \; x \in Df \subset \mathbb{R}^n \quad \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

**Exercice 03 :**

1. Calculer la dérivée directionnelle de $f(x, y) := e^{xy^2}$ au point (1, 2) dans la direction formant un angle de 30° avec l'axe des $x$ positif.
2. Soit $T(x, y) = x^3 + y^2 - 2xy + 1$ la température au point $(x, y)$. Dans quelle direction au point (1, 3), la température T
   a. augmente-t-elle le plus rapidement et 'a quel taux?
   b. diminue-t-elle le plus rapidement et 'a quel taux?

Exo4

1) determiner le developpent de Taylor des fonction suivante

ⓐ $f(x,y) = -\cos x \cos y$ en $(0,0)$ à l'ordre "2"
en $(\pi/2, \pi/2)$

ⓑ $f(x,y) = e^{x} \cos y$ en $(0,0)$ à l'ordre "2".

c) $f(x,y) = \dfrac{\exp\left[\sin\left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-y}\right)\right]}{2x-y}$ à l'ordre "2" en $(0,0)$

Exo5 Calculer la derivée directionelle des fs suivantes au points indiqués

① $f(x,y) = x+y$ en $(0,0)$ et $d = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{T}$.

② $f(x,y) = x + y^{2} + 2$ en $(1,-2)$ et $d = (3,-2)^{T}$.

③ $f(x,y) = e^{x}\cos y$ en $(0,0)$ $d = (-1,1)^{T}$.

Exo6 : Calculer le gradient et la matrice hessienne des fs suivantes

① $f_1 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $x \longmapsto f_1(x) = cte$

② $f_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $x \longmapsto f_2(x) = \langle a, x\rangle + b$ tq $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$

③ $f_3 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ , $x \longmapsto f_3(x) = a\langle b, x\rangle + c$ tq $b \in \mathbb{R}^n$, $a, c \in \mathbb{R}$

④ $f_4 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ : $x \longmapsto f_4(x) = a\langle x, x\rangle + b$ , $a, b \in \mathbb{R}$

⑤ $f_5 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f_5(x) = \sum_{i=1}^{m} r_i(x)$ tq

$r_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ des fs deux foix differentiables.

⑥ $f_6(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto f_6(x) = \sum_{i=1}^{m} [r_i(x)]^2$ tq

$r_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ des fs deux foix differentiables

<u>Exo7</u>: On suppose qu'il existe $L > 0$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, on a

$\| \nabla f(x) - \nabla f(y) \| \leq L \| x - y \|$ c-à-d $\nabla f$ est lipshytizieme

où $f$ est de classe $C^1(\mathbb{R}^n)$

Alors $\quad | f(x+h) - f(x) - \langle \nabla f(x), h \rangle | \leq \frac{L}{2} \| h \|^2 \quad \forall x, h \in \mathbb{R}^n$