CHAPITRE I

1) Rappels

1-1 Quelques notations

1- l'espace $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ fois}}$ designe un espace euclidien vectoriel

et $\forall x \in \mathbb{R}^n$. $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$ un vecteur colonne.

2. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle$ est le produit scalaire de x fois y, tel que

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

3. $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$ est une norme equivalente aux normes

$$\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} x_i^p$$

et $$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i| .$$

1.2 Matrices : soit A une matrice réelles ou Complexe

* A^T est la matrice transposé de A
* $\bar{A}$ " Conjuguée de A
* A^* " adjointe de A tel que $A^* = \bar{A}^T = \overline{A^T}$

* si A une matrice carrée, elle est Symetrique ssi $A = \bar{A}$

1-3 Matrices definies Positives : soit A une matrice réelle d'ordre "n" Symetrique. A est définie Positive ssi l'une des propositions suivantes est satisfaite

(a) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $x^T A x > 0$ (si $x^T A x \geq 0$, A est dite semi definie Positive)

(b) toute valeur Propre de A (qui sont necessairement réelles) sont strictement positives (si sont positives A est dite semi définie positive)

Corollaire toute matrice symétrique réelle admet une base orthonormée des vecteurs propres de A

Remarque si E un e.v de dimension "n" et A une matrice réelle symétrique d'ordre "n", alors il existe une base orthonormée formé par les vecteurs propres de A.

1-4 Espace euclidien Soit V un espace euclidien de dimension fini "n" sur le corps ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et soit $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ une base de V donc $\forall v \in V$ $v = \sum_{i=1}^{n} e_i v_i$ $\quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$U = (u_1, \ldots, u_n)^T \in V$

$V = (v_1, \ldots, v_n)^T \in V$

* $\forall u, v \in V \quad \langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = U^T V$

* Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$, le sous-ensemble $[x, y]$ qui défini par :

$$[x,y] = \{x + t(y-x) = (1-t)x + ty, \ \forall t \in [0,1]\}$$

est appelé le segment reliant x à y.

1-5 Topologie :

* $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall r > 0 \quad B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n, \ \|y - x\| < r\}$ est la boule ouverte de centre x et de rayon r.

* la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ converge vers $x \in \mathbb{R}^n$ ssi

$$\|x_n - x\| \xrightarrow{n \nearrow +\infty} 0$$

* l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

1-6 Différentiabilité

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Dérivée Partielle On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à x ssi cette limite existe

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \nabla_i f(x)$$

(notations)

Exemple $f(x,y) = e^x \cos y$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y$.

Gradient Si les dérivées partielles de f existent pour tout i alors le gradient de f est défini par

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Exemple: $f(x,y) = e^x \cos y \Rightarrow \nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y \\ -e^x \sin y \end{pmatrix}$

$$\nabla f\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Remarque

Si $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ alors $\nabla f(x_0, y_0)$ est perpendiculaire à la tangente à la courbe de niveau qui passe par (x_0, y_0).

Propositions ① Supposons qu'on a deux ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $U \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ tel que $f(\Omega) \subset U$. Supposons que f et g sont de classe C^1, alors $g \circ f$ est aussi de classe C^1 et on a :

$$\nabla (g \circ f)(x) = g'(f(x)) \nabla f(x), \ \forall x \in \Omega.$$

② Supposons maintenant que $f : \Omega \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ et $g : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tel que $f(\Omega) \subset U$ et f et g sont de classe C^1, alors

$$(g \circ f)' = \langle \nabla g[f(x)], f'(x) \rangle . \ \forall x \in \Omega .$$

Exemple : $f(x,y) = x^2 y + 2$, $g(x) = 2x + 1$

Matrice Hessienne Soit f une fonction de classe C^2 alors sa matrice Hessienne et symetrique de $M_n(\mathbb{R})$ qui donnée par

$$H(x) = \nabla(\nabla^T f)(x) = \nabla^2 f(x) = \nabla\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Exemple $f(x,y,z) = z e^x \cos y$.

<u>Proposition</u> $\nabla^2 f(x)\, h = \nabla \langle \nabla f(x), h\rangle$, $\forall x \in \Omega$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$

<u>Dém</u> : $\nabla_i^2 f(x)$ designe la ième ligne de $\nabla^2 f(x)$.

et on pose $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

On a :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \nabla f, h\rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, h_j \quad , \forall i = \overline{1,n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, h_j$$

$$= \left(\nabla_i^2 f(x)\, h\right)_i \quad \text{c'est la } i\text{ème ligne de } \nabla^2 f(x)\, h$$

alors $\nabla \langle \nabla f, h\rangle = \nabla^2 f(x)\, h$.

<u>Exemples</u> ⓐ $f(x) = cte \Rightarrow \nabla f(x) = \nabla^2 f(x) = 0$

ⓑ $f(x) = \langle a, x\rangle$, $a, x \in \mathbb{R}^n$ (la fonction linéaire dans $\mathbb{R}^n$)

tel que $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = a_j \ \forall j = \overline{1,n} \ \dots \ *$$

Alors $\nabla f(x) = (a_1, \dots, a_n)^T = a$

on prend l'expression $*$, et on calcule $\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right)$, $\forall k, j = \overline{1,n}$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\right] = \frac{\partial}{\partial x_k}(a_j) = 0 \ , \ \forall j, k = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow H f(x) = \nabla^2 f(x) = 0.$$

ⓒ $f(x) = \langle Ax, x\rangle$, $x \in \mathbb{R}^n$ (la forme quadratique)

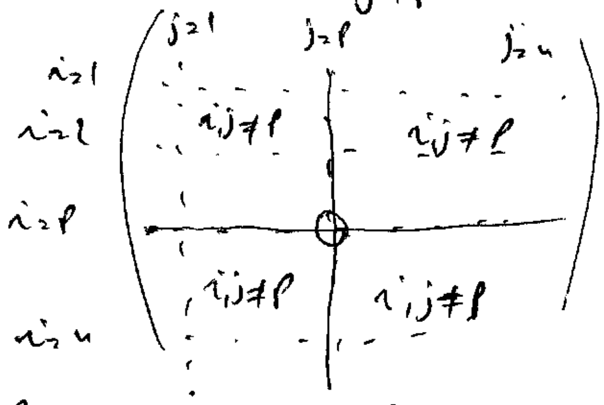
où $A \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $A = (a_{ij})_{i,j = \overline{1,n}}$. Alors

$$f(x) = \langle Ax, x\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j .$$

On peut écrire $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = a_{pp}x_p^2 + \sum_{j=1,\, j\neq p}^{n} a_{pj}\, x_p x_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} a_{ip}\, x_i x_p + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq p\\ j\neq p}}^{n} a_{ij}\, x_i x_j$$

On a sortir les termes qui depend de x_p pour calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x_p}$.



ce qui donne

$$\frac{\partial}{\partial x_p} f(x) = 2a_{pp}x_p + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} a_{pj}\, x_j + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{n} a_{ip}\, x_i \quad \text{---} (**) \quad , \forall p = \overline{1,n}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{pj}\, x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ip}\, x_i = (Ax)_p + (A^T x)_p$$

la $p$ième ligne

$$\nabla f(x) = (A + A^T)(x)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial}{\partial x_p} f(x)\right] = a_{pk} + a_{kp} \iff \nabla^2 f(x) = A + A^T.$$

Remarque Si A est symétrique on a

$$\nabla f(x) = 2Ax$$
$$\nabla^2 f(x) = 2A.$$

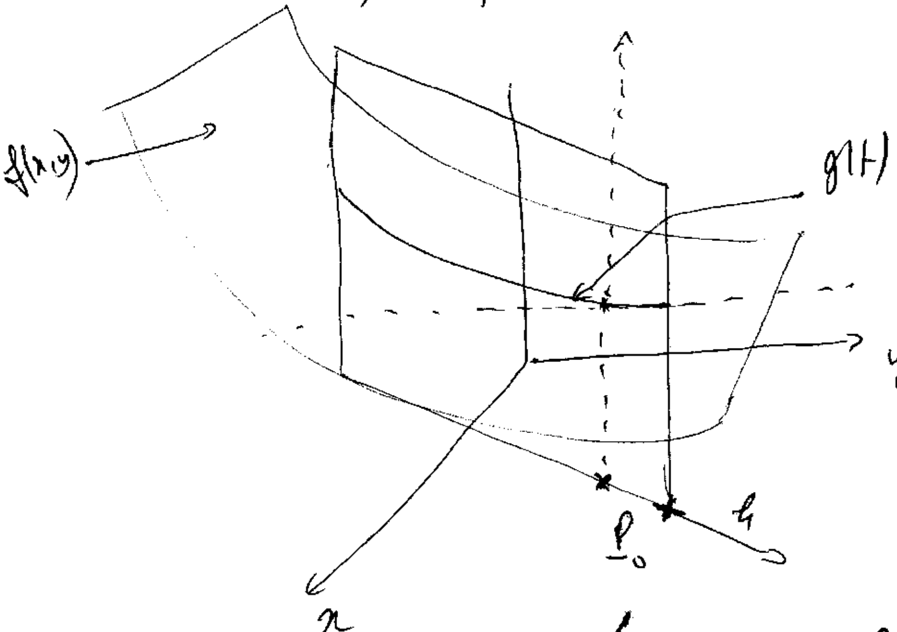
1,7 Dérivée directionnelle : Soient $f(x,y)$ une fonction de deux variables et $P_0(x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^n$ et $h = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$ ($\|h\| = 1$), la dérivée de f au point P_0 dans la direction du vecteur h est appellée la dérivée directionelle de f et la note $d_h f(x_0, y_0)$.

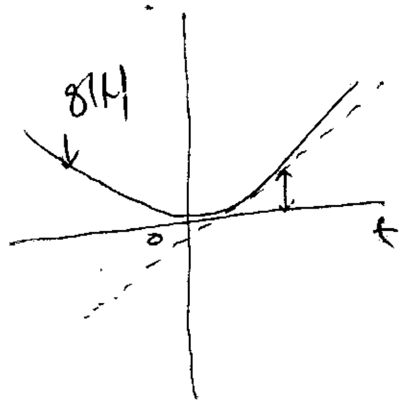
Pour calculer $d_h f(x_0, y_0)$, on considère les équations paramétriques de la droite du support h passant par P_0

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + h_1 t \\ y(t) = y_0 + h_2 t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

la restriction de f au plan vertical contenant cette droite (l'image de la droite par f)

$$g(t) = f(x(t), y(t)) = f(x_0 + h_1 t, y_0 + h_2 t)$$





Alors

$$g : \mathbb{R} \xrightarrow{X} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto (x(t), y(t)) \longmapsto f(x(t), y(t))$$
$$g''(t)$$

$$d_h f(x_0, y_0) = g'(0) = \{f[(0)]\}'$$
$$= (f \circ X)'(0) = X'(0)\, \nabla f(X(0))$$
$$= (x'(t), y'(t)) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^T$$
$$= (h_1, h_2)\, \nabla f(x_0, y_0).$$
$$= h^T \nabla f(x_0, y_0) = \nabla^T f(x_0, y_0) \cdot h$$
$$= \langle \nabla f(x_0, y_0), h \rangle$$

Déf : On appelle dérivée directionelle de f dans la direction du vecteur unitaire "h" la limite suivante

$$\lim_{t \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = d_h f(x) \qquad \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^n \\ h \in \mathbb{R}^n \end{matrix}$$

$$= h^T \nabla f(x)$$
$$= \nabla^T f(x) . h$$
$$= \langle \nabla f(x), h \rangle$$

Remarques

① On pose $g(t) = f(x+th)$ donc

$d_h f(x) = g'(0)$ car

$$\lim_{t \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{g(t)-g(0)}{t} = g'(0).$$

② La dérivée directionelle est une généralisation du concept de la dérivée partielle, en effet la dérivée de f dans la direction de l'axe (Ox) c.à-d la direction du vecteur $(1,0,\dots,0)$ est

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t(1,0,\dots,0))-f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f((x_1,x_2,\dots,x_n)+(t,0,\dots,0))-f(x_1,\dots,x_n)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_1+t,x_2,\dots,x_n)-f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)$$

③ La dérivée directionelle est le taux d'accroissement de f au point x_0 dans la direction du vecteur h.

④ $d_0 f(x) = 0$ car

$$d_0 f(x) = \lim_{t \overset{>}{\to} 0} \frac{f(x+t\,0)-f(x)}{t} = 0$$

⑤ si h n'est pas unitaire alors $\frac{h}{\|h\|}$ unitaire donc

$$d_h f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t\,\|h\|}.$$

⑥ $d_{h_1+h_2} f(x) = d_{h_1} f(x) + d_{h_2} f(x)$

car

$$d_{h_1+h_2} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t(h_1+h_2))-f(x)}{t} = \langle \nabla f(x), h_1+h_2\rangle$$

$$= \langle \nabla f(x), h_1\rangle + \langle \nabla f(x), h_2\rangle = d_{h_1} f(x) + d_{h_2} f(x).$$

<u>Exemple</u> On prend $f(x,y) = 3x^2+y^2$ et $(x,y) = (1,1)^T$ ~~et~~ le vecteur

$h = 2\vec{i} + \vec{j}$.

le vecteur n'est pas unitaire il faut le rendre unitaire

alors on pose $d = \frac{h}{\|h\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^T$.

$$d_h f(1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left((1,1)+t\left(\frac{2}{\sqrt5},\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) - f(1,1)}{t} = \frac{14\sqrt5}{5}.$$

et $\langle \nabla f(1,1), d\rangle = \frac{14\sqrt5}{5}$.

<u>Remarque</u> Cette notion est parfois appelée Gateaux-differentiable "G-D"

1-8 Direction de descente :

<u>Déf</u> la direction d est une direction de descente en x si

$$\langle \nabla f(x), d\rangle = d^T \nabla f(x) < 0.$$

<u>Théorème</u> soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction differentiable, soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(x) \neq 0$ et $d \in \mathbb{R}^n$, si d est une direction de descente

il existe $\delta > 0$ tel que $f(x+\alpha d) < f(x)$, $\forall\ 0<\alpha\leq\delta$

De plus, pour tout $\beta > 1$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$f(x+\alpha d) < f(x) + \alpha\beta\, \nabla^T f(x) d, \quad 0<\alpha\leq\eta$$

Théorème 2: Soient $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction différentiable et $x \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$, On a

$$d^T \nabla f(x) \leq \nabla^T f(x) \nabla f(x)$$

On dit que $\nabla f(x)$ est la direction la plus forte pente.

Exemple: $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + 2y^2$, $(x_0, y_0) = (1,1)$ et

$d_1 = (1,1)^T$, $d_2 = (-1,3)^T$ et on $\nabla f(1,1) = (1,4)^T$

$$d_1^{*T} \nabla f(x) = \frac{5}{\sqrt{2}}, \quad d_2^{*T} \nabla f(x,y) = \frac{11}{2}, \quad \nabla^T f(x) \nabla f(x) = \frac{17}{\sqrt{5}}.$$

tels que

$$d_1^* = \frac{d_1}{\|d_1\|}, \quad d_2^* = \frac{d_2}{\|d_2\|} \text{ et } \nabla^{*T} f(x) = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}.$$

Théorème 3: Soient $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $x \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$ On a:

$$-\nabla^T f(x) \nabla f(x) \leq d^T \nabla f(x).$$

La direction opposée au gradient est la direction la plus forte descente.

Exemple le même exemple précédent.

Remarques:

① le gradient $\nabla f(x_0)$ indique la direction (Possiblement unitaire) dans laquelle la fonction $f(x)$ a le plus grand taux de variation en (x_0)

② le taux de variation maximal vaut $\|\nabla f(x_0)\|$
c-à-d la direction de croissante maximal est $d = \nabla f$

③ $\|\nabla f(x_0)\| = \max\limits_{\|h\|=1} d_h f(x_0)$

④ $d_{max}^{(x_0)} = \dfrac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$

⑤ De même On a:

$$\min_{\|h\|=1} d_h f(x_0) = -\|\nabla f(x_0)\| \quad \text{et} \quad d_{min}^{(x_0)} = -\frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

⑥ $-\|\nabla f(x)\| \leq d_h f(x) \leq \|\nabla f(x)\| \quad \forall x, d \in \mathbb{R}^n$

1-9 Développement de Taylor:

Théorème (Forme standard, formule de Taylor - Young)

Soit f dérivable "n" fois au voisinage de "a" alors On a:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + R_n(x) \qquad \text{tq } R_n(x) = o(x^n)$$

c-à-d $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{R_n(x)}{x^n} = 0$.

et pour une fonction multivariables et On pose $x = a + h$ On obtient

$$f(a+h) = \sum_{p=0}^{n} \frac{\nabla^{(p)} f(a) \cdot h^p}{p!} + o(h^n) \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{o(h^n)}{h^n} = 0$$

Exemples

① Developpent de Taylor à l'ordre "1" pour une fonction f différentiable est donnée par :

$$f(a+h) = \langle \nabla f(a), h\rangle + f(a) + R_n(h)$$

Si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^2$ $h = (h_1, h_2)^T$ et $x = (x_1, x_2)^T$

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + R_n(h)$$

$$R_n(h) = o(h) = \|h\| \, \varepsilon(h) \quad tq \quad \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

② Developpent de Taylor à l'ordre "2" pour une fonction f deux fois differentiable au voisinage de x

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(a) h, h\rangle + R_n(x)$$

dans $\mathbb{R}^2$ tq $a = (a_1, a_2)$ et $h = (h_1, h_2)$

$$f(a_1+h_1; a_2+h_2) = f(a_1, a_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \frac{h_1^2}{2} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2}$$
$$+ \frac{h_2^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2}(a) + \frac{h_1 h_2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) + \frac{h_1 h_2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

$$tq \quad \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 .$$

③ On pose $f(x,y) = e^x \cos y$ et $a = (0,0)^T$

$$\boxed{\begin{array}{l} a+h = h \\ x := h \end{array}}$$

A l'ordre "1" $\quad f(x,y) = 1 + x + \|(x,y)\| \, \varepsilon(x,y) \quad$ où $\quad \varepsilon(x,y) \xrightarrow[(x,y) \to 0]{} 0$

la même chose pour $n = 2$ (A l'ordre 2)

Théorème 2 (Formule de Taylor avec reste intégrale)
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (un ouvert) et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{n+1}(\Omega)$ et $a \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $[a, a+h] \subset \Omega$ alors

$$f(a+h) = \sum_{p=0}^{n} \frac{\nabla^{(p)} f(a) . h^p}{p!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \nabla^{(n+1)} f(a+th)\, h^{p+1}\, dt$$

Exemples

① Developpent de Taylor avec reste intégrale à l'ordre "2" pour une fonction f de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$ et $a, h \in \mathbb{R}^n$

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \int_0^1 (1-t) \langle \nabla^2 f(a+th) h, h \rangle \, dt$$

② À l'ordre "1", $n = 0$

$$f(a+h) = f(a) + \int_0^1 \langle \nabla f(a+th), h \rangle \, dt .$$

③ Pour $f(x,y) = e^x \cos y \in C^1$ $a = (0,0)$, $h = (h_1 ; h_2)$
Developpent de Taylor avec reste intégrale à l'ordre "1" en $(0,0)$

$$f(h_1, h_2) = 1 + \int_0^1 (h_1 e^{th_1} \cos th_2 - h_2 e^{th_1} \sin th_2) \, dt .$$

④ la même chose pour $n = 1$ à l'ordre "2"

Théorème 3 (Formule de Taylor - Lagrange)
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(n+1)$ différentiable et $a \in \Omega$ et $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $[a, a+h] \subset \Omega$, alors il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(a+h) = \sum_{p=0}^{n} \frac{\nabla^p f(a) . h^p}{p!} + \frac{1}{(n+1)!} \nabla^{n+1} f(a+\theta h) . h^{p+1} .$$

Exemples

① Développement de Taylor-Lagrange à l'ordre "1" $\Leftrightarrow n=0$
pour une fonction différentiable, $a \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a+\theta h), h \rangle \qquad \theta \in]0,1[$$

② à l'ordre "2" $n=1$

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(a+\theta h) h, h \rangle \qquad \theta \in]0,1[$$

③ Pour $f(x,y) = e^x \cos y \in C^2$ et $a = (0,0)$

1-10 Fonctions Convexes :

Défs (Partie Convexe)

① Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est dit Convexe ssi

$$\forall x,y \in C, \forall t \in [0,1] \qquad tx + (1-t)y = t(x-y) + y \in C$$

② (Combinaison Convexe - barycentre)

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$, n éléments de $\mathbb{R}^n$, on dit que x est Combinaison Convexe de ces points, s'il existe des réels $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ tels que

* $\forall i = \overline{1,n}, \ \alpha_i \geq 0$
* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$
* $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

③ (enveloppe Convexe)

Soit $X \subset \mathbb{R}^n$, on appelle enveloppe Convexe de X on note $\mathrm{Con}(X)$ l'ensemble Convexe le plus petit contenant X, en dimension fini c'est aussi l'ensemble des Combinaisons Convexe des éléments de X :

$$\mathrm{Con}(X) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i, \ x_i \in X, \ p \in \mathbb{N}, \ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1, \ \alpha_i \geq 0, \ \forall i = \overline{1,p} \right\}$$

Remarques

① tout entier est un ensemble Convexe, de même qu'un Singleton $\{a\}$

② Soit $\{C_i\}_{i=\overline{1,n}}$ une famille des parties Convexes, alors $S = \bigcap_{i=1}^{n} C_i$ est Convexe

③ Fonctions Convexes : Soit Ω une partie Convexe de $\mathbb{R}^n$ (non vide) et $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, On dit que f est Convexe ssi

$$\forall x, y \in \Omega, \forall t \in [0,1] \quad f(tx+(1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

* On dit que f est strictement Convexe ssi

$$\forall x, y \in \Omega \text{ tq } x \neq y \text{ et } \forall t \in]0,1[\quad f(tx+(1-t)y) < t f(x) + (1-t) f(y).$$

* On dit que f est concave si $-f$ est Convexe.

* On dit que f est fortement ou uniformément Convexe de module $\alpha > 0$ si

$$\forall x, y \in \Omega, \forall t \in [0,1] \quad f(tx+(1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y) - \frac{\alpha}{2} t(1-t) \|x-y\|^2$$

Remarques

① fortement Convexe $\Longrightarrow$ strictement Convexe.

② si f, g deux fonctions Convexes $\Longrightarrow f+g$ est une fonction Convexe

Exemples les fonctions suivantes sont Convexes

① $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = cte$ (la Constante)

② $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \langle a, x \rangle$, $a \in \mathbb{R}^n$ (fonction linéaire)

③ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$

Défs

① (Fonction Convexe différentiable)

Soient $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe et $x_0 \in \Omega$

On dit que f est différentiable s'il existe un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + \langle d, (x - x_0) \rangle + \| x - x_0 \| \, \varepsilon(x - x_0)$$

$$\text{tel que } \varepsilon(x - x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

Alors on note $Df(x_0) = d$.

② (Fonction Convexe deux fois différentiable)

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable et $x_0 \in \Omega$, s'il existe un vecteur $d \in \mathbb{R}^n$ et une matrice carrée $D \in M_n(\mathbb{R})$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + \langle d, x - x_0 \rangle + \langle D(x - x_0), (x - x_0) \rangle + \| x - x_0 \|^2 \varepsilon(x - x_0)$$

$$\text{tel que } \varepsilon(x - x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

On pose $d = Df(x_0)$ et $D = D^2 f(x_0)$.

Caractérisation différentielle de la Convexité

① de premier ordre

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction différentiable, les propriétés suivantes sont équivalentes

ⓐ f est convexe

ⓑ le gradient est un opérateur monotone $\Leftrightarrow$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad \langle Df(x) - Df(y), x - y \rangle \geq 0$$

(c) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle$

(d) de second ordre

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2

f est convexe $\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \nabla^2 f(x) \geq 0$.

(la matrice hessienne est semi définie positive)