

الفصل الثاني: الموائع في حالة سكون

Chapitre II : Statique des fluides

1 المقدمة:

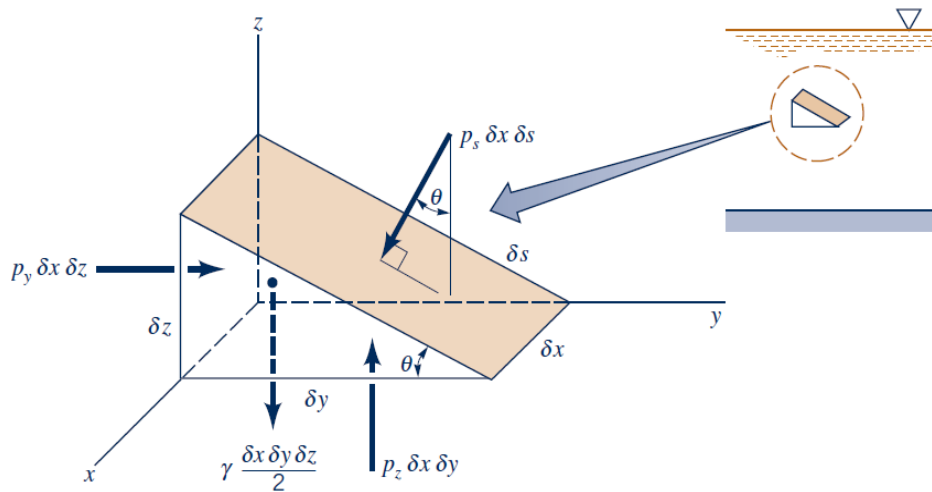
سندرس الموائع في حالة السكون أو الحركة دون حركة نسبية بين الجزيئات المتجاورة. في كلتا الحالتين لا توجد قوى احتكاك في المائع، كل القوى التي تنشأ على الأسطح ترجع إلى الضغط. الهدف إذن هو معرفة الضغط وتغيره في المائع وتأثيره على الأسطح المغمورة. يبسط غياب الاحتكاك التحليل ويجعل من الممكن الحصول على حلول بسيطة نسبياً لبعض المشكلات ذات الأهمية العملية.

Introduction :

On va considérer le cas des fluides au repos ou bien en déplacement sans mouvement relatif entre les particules adjacentes. Dans les deux cas il n'y a pas de forces de frottement dans le fluide, toutes les forces qui se développent sur les surfaces sont dues à la pression. Le but est donc de connaître la pression et sa variation à travers le fluide et son effet sur les surfaces submergées. L'absence de frottement simplifie l'analyse et permet d'obtenir des solutions relativement simples à quelques problèmes d'intérêt pratique.

(1) الضغط عند نقطة:

يستخدم مصطلح الضغط للإشارة إلى القوة العمودية لكل وحدة مساحة عند نقطة ما والتي تؤثر داخل كتلة السائل. سنرى كيف يختلف الضغط في نقطة ما وفقاً لاتجاه المستويات التي تمر عبر هذه النقطة. لهذا، نأخذ الجزء من السائل الموضح في الشكل.



القوى الوحيدة التي تؤثر على الحجم هي قوى الضغط ووزن السائل. لتبسيط التحليل، لن نمثل اتجاه x . معادلة نيوتن الثانية

$$(\sum \vec{F} = m\vec{a}) \text{ مكتوبة في اتجاهات } y \text{ و } z:$$

$$\sum F_y = P_y \delta x \delta z - P_s \delta x \delta s \sin \theta = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} a_y \quad 2.1$$

$$\sum F_z = P_z \delta x \delta y - P_s \delta x \delta s \cos \theta - \gamma \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} a_z \quad 2.2$$

من الشكل لدينا: $\delta z = \delta s \sin \theta$ $\delta y = \delta s \cos \theta$

التعويض يعطي:

$$P_y - P_s = \rho \frac{\delta y}{2} a_y \quad 2.3$$

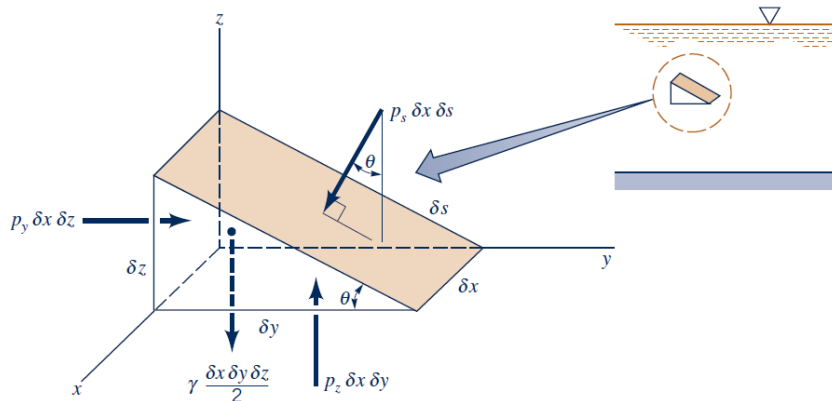
$$P_z - P_s = (\gamma + \rho a_z) \frac{\delta z}{2} \quad 2.4$$

نظرًا لأننا مهتمون بما يحدث في نقطة ما، فإن δx و δy و δz ستؤول إلى الصفر ونحصل على: $P_y = P_s$ و $P_z = P_s$ أو $P_z = P_s = P_y$ مهما كانت الزاوية θ . هذا يثبت أن الضغط في نقطة ما في حالة ركود أو سكون مستقل عن الاتجاه، وهو

قانون بلاز باسكال-Blaise Pascal.-

1) Pression en un point :

Le terme pression est utilisé pour indiquer la force normale par unité de surface en un point et qui agit sur un plan dans la masse du fluide en question. Nous allons voir comment varie la pression dans un point selon l'orientation des plans passants par ce point. Pour cela prenons la portion quelconque d'un fluide montrée par la figure 1.



Les seules forces qui agissent sur le volume sont celles de pression et le poids du fluide. Pour simplifier l'analyse on ne va pas représenter la direction x . La deuxième équation de Newton $(\sum \vec{F} = m\vec{a})$ s'écrit dans les directions y et z :

$$\sum F_y = P_y \delta x \delta z - P_s \delta x \delta s \sin \theta = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} a_y \quad 2.1$$

$$\sum F_z = P_z \delta x \delta y - P_s \delta x \delta s \cos \theta - \gamma \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{2} a_z \quad 2.2$$

De la géométrie on a : $\delta y = \delta s \cos\theta$ $\delta z = \delta s \sin\theta$

Le remplacement donne :

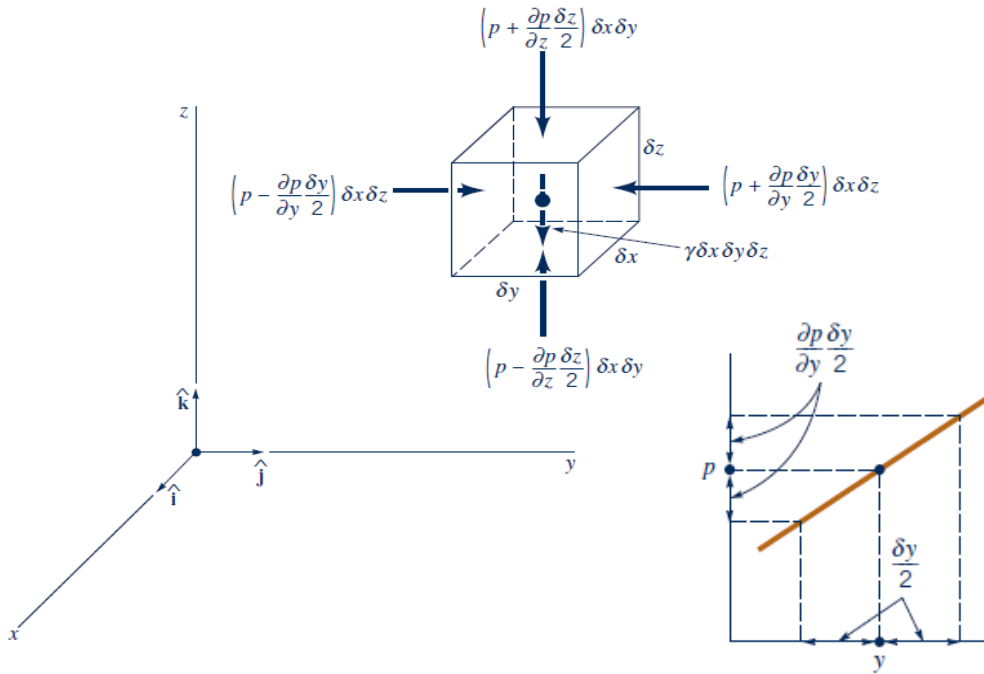
$$P_y - P_s = \rho \frac{\delta y}{2} a_y \quad 2.3$$

$$P_z - P_s = (\gamma + \rho a_z) \frac{\delta z}{2} \quad 2.4$$

Puisque nous nous intéressons dans ce qui se passe dans un point, δx , δy et δz vont tendre vers zero et on obtient : $P_y = P_s$ et $P_z = P_s$ or $P_s = P_z = P_y$ quel que soit l'angle θ . Cela prouve que la pression dans un point d'un fluide en stagnation est indépendante de la direction, c'est la loi de Blaise Pascal.

(2) القانون الأساسي للسكون (معادلة مجال الضغط)

لقد رأينا كيف يتغير الضغط في نقطة ما وفقاً للاتجاه، والآن سنرى كيف يتغير الضغط في مائع في حالة سكون حيث لا توجد فيه قوى احتكاك. نأخذ عنصر من المائع ممثل بحجم متوازي الاسطح يسمى حجم التحكم -volume de contrôle-، اذا فالحجم $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ في المعلم (z, y, x, O) ، الشكل.



يتم تطبيق نوعين من القوى على عنصر الحجم:

- قوى الحجم: الوزن (الناتج عن حقل الجاذبية في هذه الحالة) ، $\delta \vec{W}$.
- القوى السطحية: القوى الناتجة عن الضغط، $\delta \vec{F}$.

تتم كتابة قوى الحجم الممثلة بوزن حجم السائل:

$$\delta \vec{W} = \delta m \vec{g} = \rho \delta V \vec{g} = -\rho g \delta V \vec{k} \quad 2.5$$

يمكن أن تتحلل قوى السطح في الاتجاهات الثلاثة x و y و z على النحو التالي:

$$\delta \vec{F} = \delta F_x \vec{i} + \delta F_y \vec{j} + \delta F_z \vec{k} \quad 2.6$$

هذه قوى عمودية على الأسطح، مجموع القوى في الاتجاه y على سبيل المثال والتي تعمل على السطح $\delta x \delta z$ يعطي:

$$\delta F_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z = -\frac{\partial p}{\partial y} \delta x \delta y \delta z$$

وبالمثل نجد:

$$\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$$

$$\delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$$

وهكذا نحصل على القوة في الاتجاهات الثلاثة:

$$\delta \vec{F} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) \delta x \delta y \delta z = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) \delta V \quad 2.7$$

ندخل مفهوم التدرج:

$$\vec{\nabla}(\) = \frac{\partial(\)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(\)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(\)}{\partial z} \vec{k}$$

حيث نختصر الكتابة:

$$\delta \vec{F} = -\vec{\nabla} p \delta V \quad 2.8$$

كتابة قانون نيوتن الثاني لحجم التحكم هذ يعطي $\sum \delta \vec{F} = \delta m \vec{a}$ اذن:

$$\delta \vec{W} + \delta \vec{F} = \delta m \vec{a} \leftrightarrow -\rho g \delta V \vec{k} - \vec{\nabla} p \delta V = \rho \delta V \vec{a}$$

بما ان $\gamma = \rho g$ هذا ما يعطي:

$$-\gamma \vec{k} - \vec{\nabla} p = \rho \vec{a}$$

هذه المعادلة صالحة للسائل حيث تكون قوى الاحتكاك معدومة. في حالتنا أيضًا، يكون المائع في حالة سكون، وهذا يعني أن

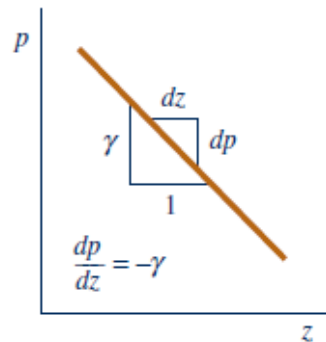
$$\gamma \vec{k} + \vec{\nabla} p = 0 \quad \vec{a} = \vec{0} \quad \text{سيكون لدينا:}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \quad \text{و} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{على:}$$

توضح هذه المعادلات أن الضغط لا يتغير في المستويات الأفقية $P=P(x)$ و $P=P(y)$.

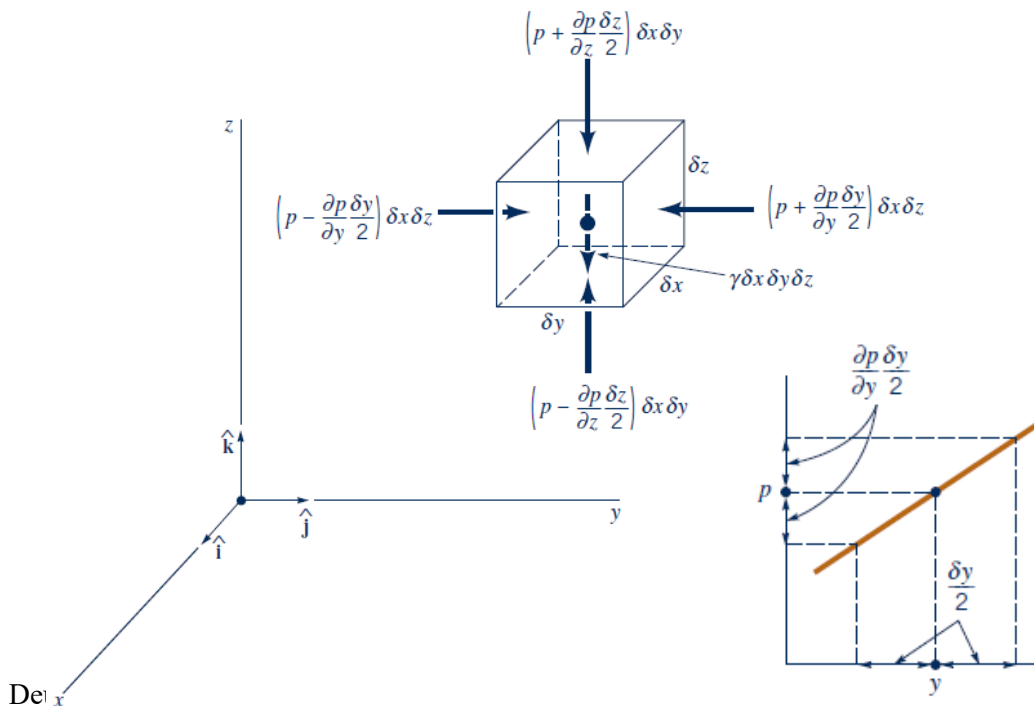
$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \quad \text{إذن المعادلة هي:}$$

هذه هي المعادلة التي يجب حلها لمعرفة الضغط عند أي نقطة في المائع الساكن. بالنسبة للموائع أو الغازات في حالة السكون، يتغير الضغط في الاتجاه العمودي في أي نقطة من المائع سلبيا (الشكل)، ويعتمد فقط على النقل النوعي للمائع عند هذه النقطة.



2) Loi fondamentale de la statique (Equation du champ de pression)

On a déjà vu comment varie la pression dans un point selon la direction, maintenant nous allons voir comment varie la pression dans un fluide au repos dans lequel il n’y a pas de forces de frottement. Considérons un élément de volume fluide au repos de forme parallélépipédique, de volume $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ dans le repère (O, x, y, z) , figure 2.



- **Forces de volume** : Le poids (engendré par un champ dans ce cas de la gravité), $\delta \vec{W}$.
- **Forces de surface** : Les forces engendrée par la pression, $\delta \vec{F}$.

Les forces de volume représentées par le poids du volume de fluide s'écrivent :

$$\delta \vec{W} = \delta m \vec{g} = \rho \delta V \vec{g} = -\rho g \delta V \vec{k} \quad 2.5$$

Puisque la force du poids est dirigée dans le sens négatif de z.

Les forces de surface peuvent être décomposées dans les trois directions x,y et z comme suit :

$$\delta \vec{F} = \delta F_x \vec{i} + \delta F_y \vec{j} + \delta F_z \vec{k} \quad 2.6$$

Ce sont des forces normales aux surfaces, la somme des forces dans la direction y par exemple et qui agit sur la surface $\delta x \delta z$ donne : $\delta F_y = \left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\delta y}{2} \right) \delta x \delta z = -\frac{\partial p}{\partial y} \delta x \delta y \delta z$, et par la même : $\delta F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z$ et $\delta F_z = -\frac{\partial p}{\partial z} \delta x \delta y \delta z$.

D'où on obtient la force dans les trois directions :

$$\delta \vec{F} = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) \delta x \delta y \delta z = -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) \delta V \quad 2.7$$

On introduit la notation gradient $\vec{\nabla}(\) = \frac{\partial(\)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(\)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(\)}{\partial z} \vec{k}$, alors $\delta \vec{F} = -\vec{\nabla} p \delta V$ 2.8

La deuxième loi de Newton pour ce volume de contrôle s'écrit $\sum \delta \vec{F} = \delta m \vec{a}$ donc :

$$\delta \vec{W} + \delta \vec{F} = \delta m \vec{a} \leftrightarrow -\rho g \delta V \vec{k} - \vec{\nabla} p \delta V = \rho \delta V \vec{a} \quad \text{ce qui donne } -\gamma \vec{k} - \vec{\nabla} p = \rho \vec{a} \quad 2.9$$

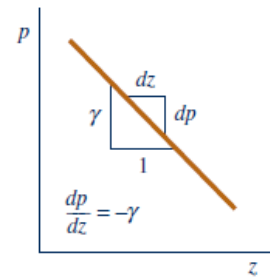
puisque $\gamma = \rho g$. Cette équation est valable pour un fluide où les forces de frottement sont négligeables.

Dans notre cas le fluide est aussi au repos, cela veut dire que l'accélération est nulle $\vec{a} = \vec{0}$. On aura $\gamma \vec{k} + \vec{\nabla} p = \vec{0}$ sous forme de composantes $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma$ 2.10

ces équations montrent que la pression ne varie pas dans les plans horizontaux $P \neq P(x)$ et $p(y)$.

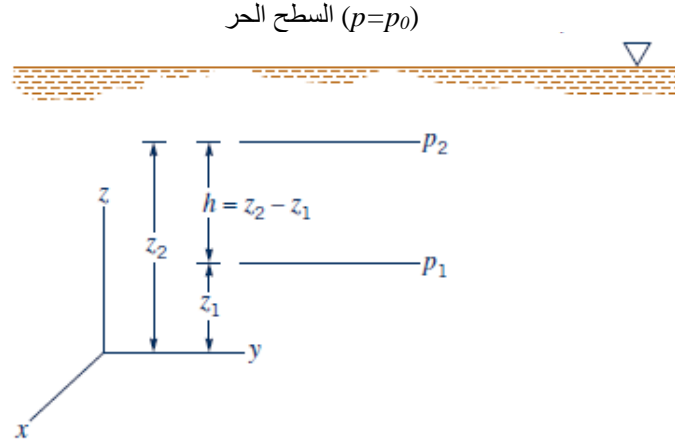
Donc l'équation est : $\frac{dp}{dz} = -\gamma$ 2.11

C'est l'équation à résoudre pour connaître la pression en tout point du fluide au repos. Pour les liquides ou gaz au repos, le gradient de pression dans la direction verticale à n'importe quel point du fluide est négatif (figure 3), il dépend seulement du poids spécifique du fluide en ce point.



التطبيق على الموائع غير القابلة للانضغاط:

في هذه الحالة $\rho = cste$ في كل مكان، يمكننا أيضاً اعتبار g ثابتاً وبالتالي $\gamma = \rho g = cste$ مما يعطي $\frac{dp}{dz} = -\gamma = cte$.
نأخذ مائعا (الشكل) ونقوم بتطبيق المعادلة.



لحساب P نكامل المعادلة $\frac{dp}{dz} = -\gamma = cte$:

$$p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) \text{ أو } p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1) \text{ نجد } \int_{p_1}^{p_2} dp = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz$$

حيث p_1 و p_2 هي الضغوط عند الارتفاعات z_1 و z_2 ، يمكننا أيضاً كتابة المعادلة في شكل مبسط $p_1 - p_2 = \gamma h$ أو $p_1 = p_2 + \gamma h$ مع h المسافة $z_2 - z_1$.

توضح هذه المعادلة أن الضغط يزداد مع العمق h ، ويسمى الضغط الهيدروستاتيكي، أي في حالة السكون أو الركود. نلاحظ

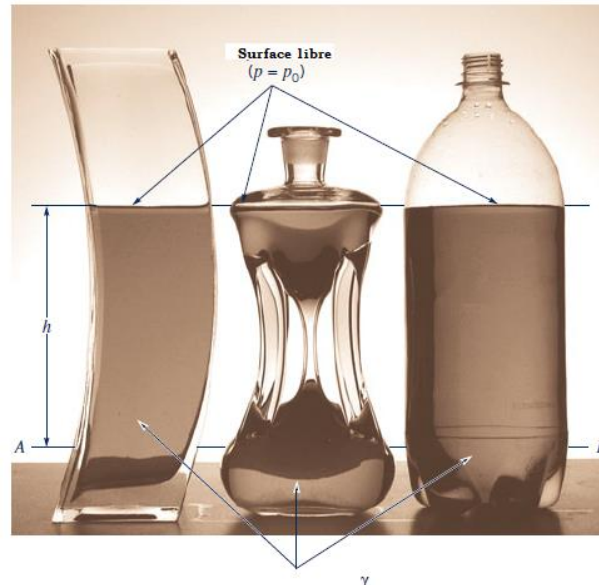
أيضاً أنه يمكن تحديد فرق الضغط بواسطة $h = \frac{(p_1 - p_2)}{\gamma}$ ونشير إليه بـ "الارتفاع". يتم تفسيره على أنه ارتفاع السائل

الضروري للحصول على فرق الضغط $p_1 - p_2$. عند العمل على السوائل حيث يوجد دائماً سطح حر (الشكل)، فإننا نشير

إلى الضغط عند هذا السطح بمقدار p_0 ، وهذا يعني أن الضغط عند أي عمق h من هذا السطح هو $p_0 + \gamma h$. هذه

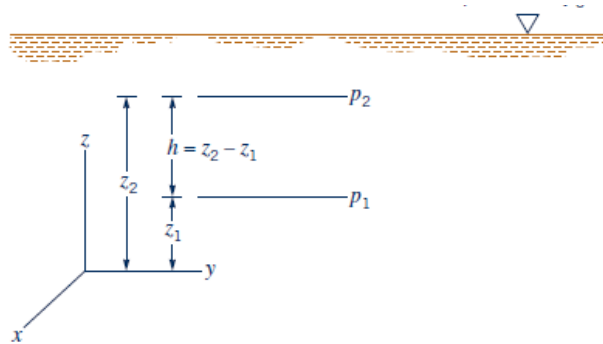
المعادلة تظهر أيضاً أن الضغط لا يعتمد على حجم أو شكل الخزان أو الحاوية، يعتمد فقط على h ، مما يعني أن الضغط ثابت

الخط الأفقي AB (الشكل).



3) Application aux fluides incompressibles :

Dans ce cas $\rho = cste$ partout, on peut aussi considérer g comme constante et donc $\gamma = \rho g = cste$, par conséquent : $\frac{dp}{dz} = -\gamma = cte$. Prenons un fluide (figure 4) et appliquant l'équation trouvée.



Pour calculer P procédons par intégration

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\gamma \int_{z_1}^{z_2} dz \quad \text{d'où} \quad p_2 - p_1 = -\gamma(z_2 - z_1) \quad \text{ou bien} \quad p_1 - p_2 = \gamma(z_2 - z_1) \quad 2.12$$

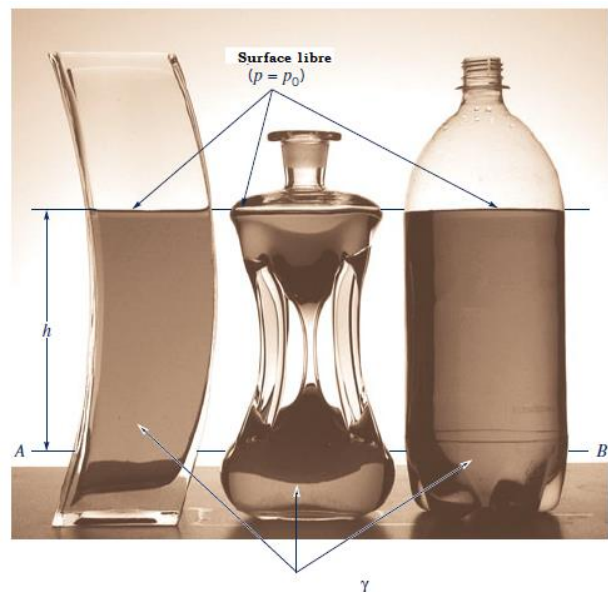
Ou p_1 et p_2 sont les pressions aux élévations z_1 et z_2 , on peut aussi écrire l'équation dans une forme compacte $p_1 - p_2 = \gamma h$ ou $p_1 = p_2 + \gamma h$ avec h la distance $z_2 - z_1$.

Cette équation montre que la distribution de pression augmente avec la profondeur h , elle est dite distribution hydrostatique. On remarque aussi que la différence de pression peut être spécifiée par $h = \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$ et on la note par « élévation ». Elle est interprétée comme la hauteur de fluide nécessaire pour obtenir la différence de pression $p_1 - p_2$. Lorsque on travaille avec les liquides ou il y a toujours une surface libre (figure 4) on note la pression à cette surface par p_0 , cela implique que la pression à n'importe quelle profondeur h de cette surface est

$$p = p_0 + \gamma h.$$

Cette équation montre aussi que

la pression ne dépend pas du volume ou la forme du réservoir ou récipient, elle ne dépend que de h , ce qui implique que la pression est constante sur la ligne horizontale AB (figure 5).



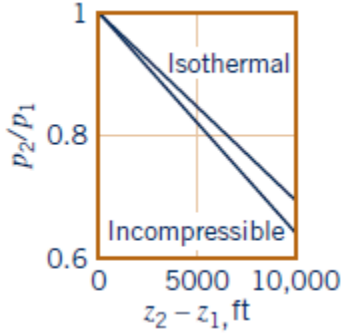
4. التطبيق على السوائل القابلة للانضغاط:

بشكل عام، تكون الغازات قابلة للانضغاط نظرًا لأن كثافتها تختلف باختلاف الضغط ودرجة الحرارة، فنحن نأخذ حالة الغاز

$$\rho = \frac{P}{RT} \quad \text{المثالي، من معادلته لدينا}$$

من ناحية أخرى وجدنا أنه $\frac{dp}{dz} = -\gamma$ نعوض الكتلة الحجمية من معادلة الغاز فنجد $\frac{dp}{dz} = -\frac{Pg}{RT}$ نفصل المتغيرات مع

افتراض أن g و R ثابتين ونكامل :



$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T}$$

إذا افترضنا أن درجة الحرارة لا تتغير حسب الارتفاع z ، سيكون لدينا:

$$p_2 = p_1 \exp \left[-\frac{g(z_2 - z_1)}{RT_0} \right]$$

4) Application aux fluides compressibles :

Généralement, c'est les gaz qui sont compressibles puisque leurs masses volumiques varient avec

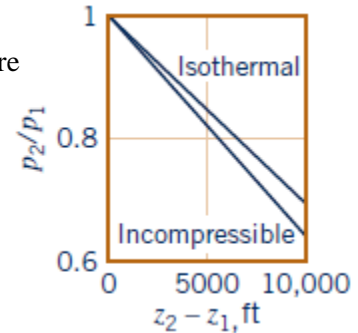
la pression et la température, on prend le cas d'un gaz parfait ou $\rho = \frac{P}{RT}$

d'autre part $\frac{dp}{dz} = -\gamma$ d'où $\frac{dp}{dz} = -\frac{Pg}{RT}$ séparons les variables, supposons que g et R sont constantes

et intégrons $\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = \ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{T}$ si on suppose que la température

ne varie pas en fonction de la hauteur z (isotherme), on aura

$$p_2 = p_1 \exp \left[-\frac{g(z_2 - z_1)}{RT_0} \right]$$



5. قياس الضغط

الضغط مقياس مهم جدًا في ميكانيكا الموائع، وهو القوة مقسومة على المساحة (الإجهاد) عند نقطة من المائع. الضغط دائمًا

عمودي على السطح المعني حيث نكتب:

$$P = \frac{F}{S} \equiv \left[\frac{N}{m^2} \right] \equiv Pa$$

الضغط لا يتعلق بمساحة الوعاء بل بالعمق فقط ويمكن برهنة هذا من خلال أخذ خزانين بارتفاع h مع مساحتين مختلفتين S

و S يحتويان على نفس السوائل. القوة الضاغطة عند القاعدة: $F = mg = \rho Vg = Shg$ ، $F = m'g = V'g = S'hg$.

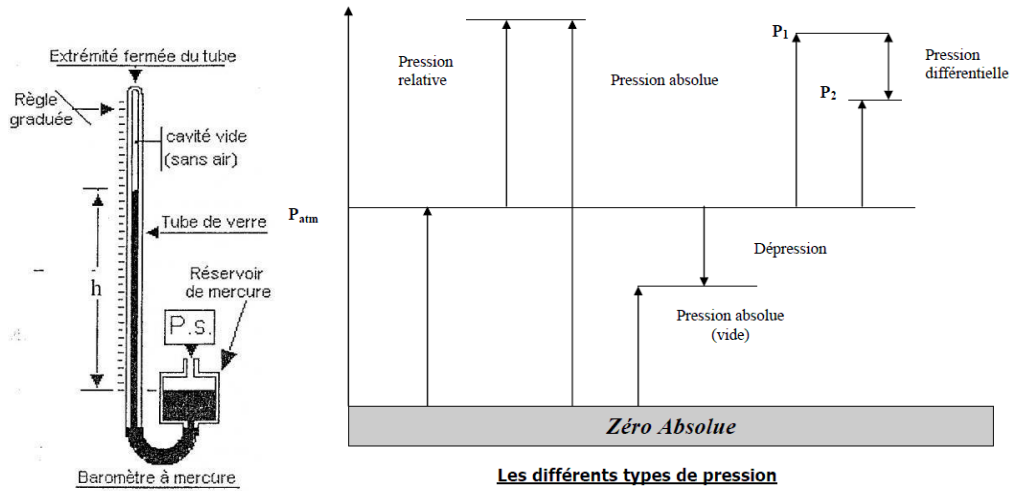
أما الضغط في القاعدة: $P = F / S = hg$ و $P' = F' / S' = hg$. نلاحظ أنه عند القاعدة لدينا نفس الضغط لنفس الارتفاع.

بشكل عام، يتم استخدام ثلاثة أنواع من الضغوط، الضغط المطلق أو الفعال أو النسبي والضغط الجوي. المطلق هو مجموع الاثنين الآخرين:

$$P_{abs} = P_{atm} + P_{eff} \quad 2.13$$

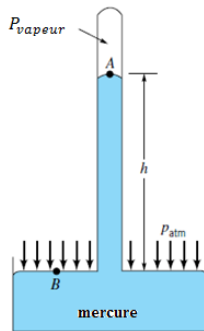
يقال للضغط:

- الضغط المطلق، إذا تم قياسه بالنسبة للفراغ المطلق (ضغط صفري)، فهو دائمًا إيجابي.
- الضغط الفعال، إذا تم قياسه مقابل الضغط الجوي المحلي، يمكن أن يكون موجبًا أو سالبًا (أعلى أو أقل من الضغط الجوي).
- الضغط الجوي ناتج عن وزن الهواء و يقاس عادة بمقياس ضغط الزئبق.



قياس الضغط الجوي:

يتم قياس الضغط الجوي بواسطة مقياس الضغط الجوي، وهناك عدة أنواع في الوقت الحاضر. الأبسط هو مقياس الزئبق، حيث يكون الضغط الجوي مساويًا لضغط ارتفاع عمود الزئبق:



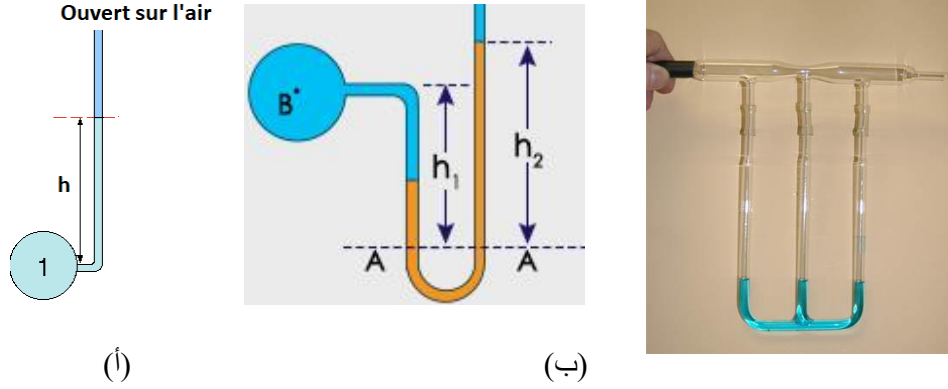
$$P_B = \rho gh + P_A \rightarrow P_{atm} = \rho gh + P_{vapeur} \approx \rho gh \quad 2.14$$

قياس الضغط الفعال والمطلق

الضغط المطلق هو مجموع الضغط الجوي والضغط الفعال، نظرًا لأن الضغط الجوي يتم إعطاؤه مباشرة بواسطة مقياس الضغط الجوي، يبقى قياس الضغط الفعال، حيث نستخدم أجهزة قياس الضغط التي تشكلها أنابيب قياس الضغط أو المانومتر.

تعريف قياس الضغط: هو أسلوب قياسي لقياس الضغوط، ويستخدم أعمدة السوائل في أنابيب قياس الضغط العمودية أو المائلة.

تعريف الأنبوب البيزومتري-الحجائي: هو أنبوب عمودي مفتوح، متصل بالحاوية التي نريد قياس الضغط فيها.



أجهزة قياس الضغط تتكون من أنابيب قياس الضغط (أ) بسيطة و (ب) على شكل حرف U.

بالنسبة لمقياس الضغط (الشكل (أ)) فإنه يتكون من أنبوب قياس ضغط عمودي مفتوح في الأعلى حيث يكون الضغط $P = P_{atm}$ ، نطبق في النقطة 1 معادلة سكون الموائع، فنحصل على:

$$P_{abs1} = P_{atm} + \rho gh$$

في هذه الحالة الضغط الفعال هو:

$$P_{eff} = P_{abs1} - P_{atm} = \rho gh$$

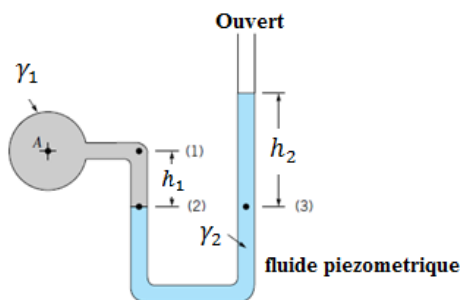
ونرمز له P عوض عن P_{eff} ، يُطلق عليه أيضاً الضغط البيزومتري.

$$P_{eff} = P = \rho gh \quad 2.15$$

مقياس الضغط على شكل حرف U:

هذا أنبوب على شكل حرف U يستخدم فيه ما يسمى بسائل "قياس الضغط" و هذا لملائمة نوع الضغط، حيث تستخدم السوائل الخفيفة كالكحول في الضغوط المنخفضة و السوائل الثقيلة كالزئبق في الضغوط المرتفعة.

حسب قانون سكون الموائع، الضغط في النقطة A يساوي :



$$P_{absA} = P_{atm} + \rho_2 gh_2 - \rho_1 gh_1$$

$$P_{absA} = P_A + P_{atm}$$

$$P_A = \rho_2 gh_2 - \rho_1 gh_1$$

بشكل عام، تكتب معادلة مقياس الضغط على شكل حرف U:

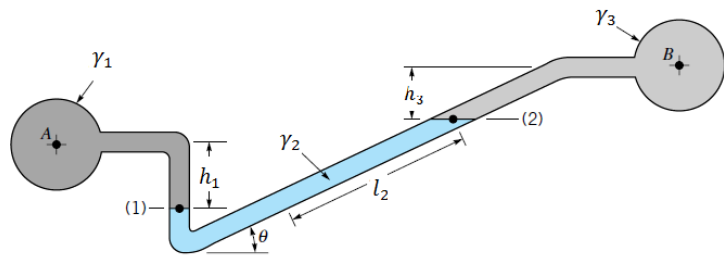
$$P_A + \sum_{\text{نازل}} \rho_i g h_i - \sum_{\text{صاعد}} \rho_i g h_i = P_B \quad 2.15$$

مقياس الضغط المائل:

لتضخيم نطاق القراءة في حالة الضغط المنخفض، يتم إمالة مقاييس الضغط. تنص المعادلة لهذا المثال على ما يلي:

$$P_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 l_2 \sin \theta + \gamma_3 h_3 = P_B$$

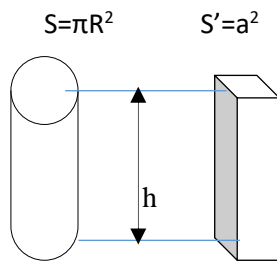
$$P_A - P_B = \gamma_2 l_2 \sin \theta + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1$$



5) Mesure de la pression :

C'est un scalaire très important dans la MDF, la pression en un point d'un fluide est la force en ce point divisée par la surface (contrainte). Elle est toujours normale à la surface en question, on écrit :

$$P = \frac{F}{S} \equiv \left[\frac{N}{m^2} \right] \equiv Pa \text{ pascal.}$$



Soient deux réservoirs de hauteur h et de sections différentes S et S' contenant les mêmes fluides.

La force à la base : $F = mg = \rho Vg = \rho Shg$, $F' = m'g = \rho V'g = \rho S'hg$

La pression à la base : $P = F/S = \rho hg$ et $P' = F'/S' = \rho hg$

On remarque qu'à la base on a la même pression pour la même hauteur.

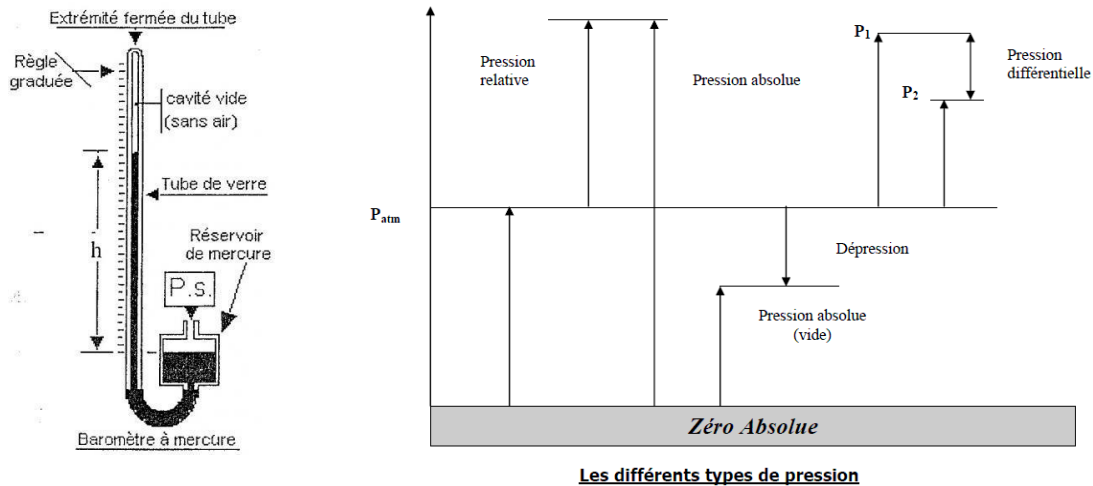
Généralement, on utilise trois types de pressions, la pression absolue, effective ou relative et atmosphérique. Celle absolue est la somme des deux autres :

$$P_{abs} = P_{atm} + P_{eff} \quad 2.13$$

La pression est dite :

- Pression absolue, si elle est mesurée par rapport au vide absolu (pression nulle), elle est toujours positive.

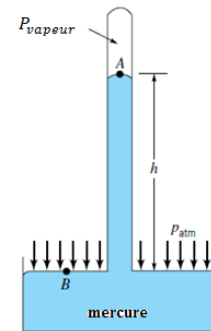
- Pression effective (manométrique), si elle est mesurée par rapport à la pression atmosphérique locale, elle peut être positive ou négative (au-dessus ou au-dessous de celle atmosphérique). La pression atmosphérique est généralement mesurée par un baromètre à mercure.



7.1 Mesure de la pression atmosphérique :

La pression atmosphérique est donnée par un baromètre, de nos jours il existe plusieurs types. Le plus simple c'est le baromètre à mercure, où la pression atmosphérique est égale à la pression de la hauteur de la colonne de mercure :

$$P_B = \rho gh + P_A \rightarrow P_{atm} = \rho gh + P_{vapeur} \approx \rho gh \quad 2.14$$

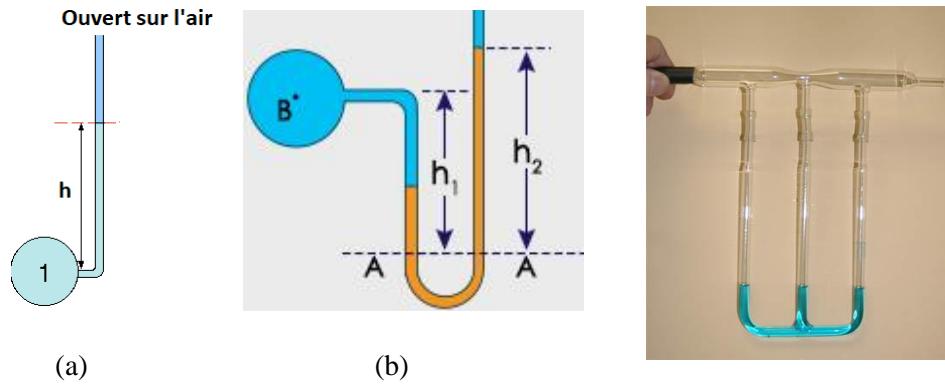


7.2 Mesure de la pression effective et absolue

La pression absolue est la somme de la pression atmosphérique et effective, puisque celle atmosphérique est donnée directement par un baromètre, il reste à mesurer la pression effective, pour cela on utilise des manomètres formés par des tubes piézométriques.

Définition de la manométrie : C'est une technique standard pour la mesure des pressions, elle utilise des colonnes de liquides dans des tubes piézométriques verticaux ou inclinés.

Définition du tube piézométrique : C'est un tube vertical ouvert, il est connecté à un récipient ou on veut mesurer la pression.



Manometres formé par des tube piezometriques (a) simple et (b) en U.

Pour le cas d'un manomètre formé par un tube piézométrique vertical (Fig.(a)) ouvert $P=Patm$ en haut,

On a : $P_{abs1} = Patm + \rho gh$ et la pression effective est : $P_{eff} = P_{abs1} - Patm = \rho gh$ on la note par

P, elle est dite aussi pression piézométrique : $P_{eff} = P = \rho gh$ 2.15

Manomètre en U : C'est un tube en U qui utilise un fluide dit « manométrique ou piézométrique ».

L'équation s'écrit :

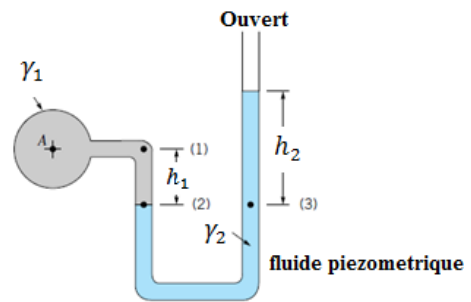
$$P_{absA} + \rho_1 gh_1 - \rho_2 gh_2 = Patm$$

On a $P_{absA} = P_A + Patm$ ce qui donne :

$$P_A + \rho_1 gh_1 - \rho_2 gh_2 = 0$$

En général l'équation d'un manomètre en U s'écrit :

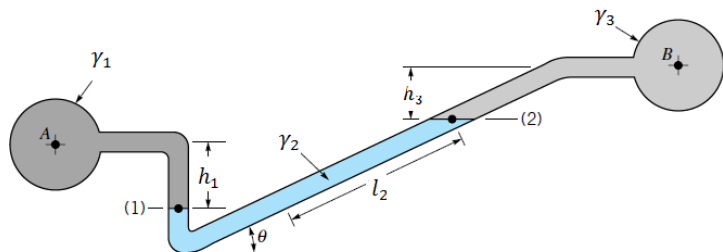
$$P_A + \sum_{descendant} \rho_i gh_i - \sum_{montant} \rho_i gh_i = P_B \quad 2.15$$



Manomètre incliné : Pour amplifier la plage de lecture dans le cas des faibles pressions, on incline les manomètres. L'équation pour cet exemple s'écrit :

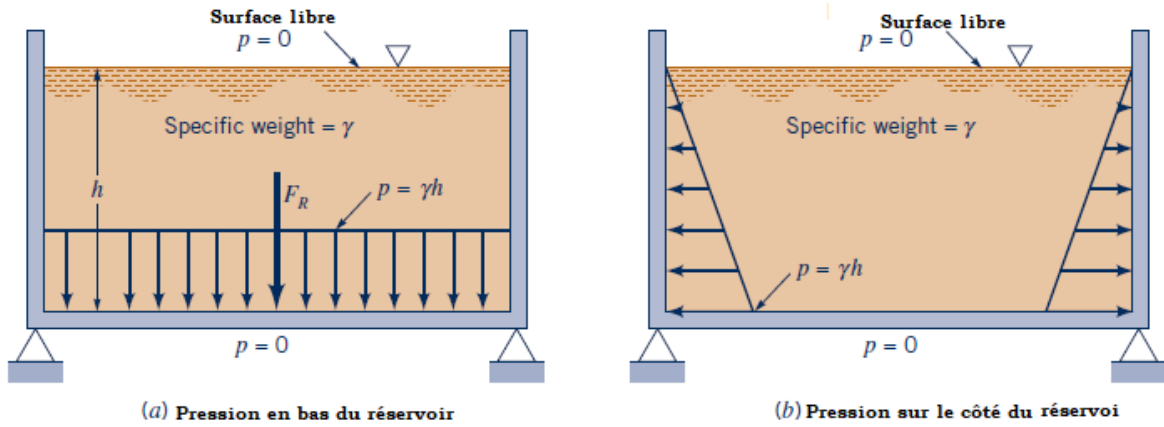
$$P_A + \gamma_1 h_1 - \gamma_2 l_2 \sin\theta + \gamma_3 h_3 = P_B$$

$$P_A - P_B = \gamma_2 l_2 \sin\theta + \gamma_3 h_3 - \gamma_1 h_1$$



6. القوى الهيدروستاتيكية على سطح مستو:

عندما يتم غمر سطح في سائل، تنشأ القوى على السطح بسبب ضغط السائل. حساب هذه القوى مهم في تصميم الخزانات والسفن والسدود والهياكل الهيدروليكية الأخرى. نعلم أنه عندما تكون السوائل في حالة سكون، تكون القوى متعامدة مع الأسطح لأن قوى الاحتكاك تساوي صفرًا. أيضًا، يختلف الضغط خطيًا مع العمق في السوائل غير القابلة للضغط. في الجزء السفلي من الخزان (الشكل 5 (أ)) يكون الضغط $p = p_0 + \gamma h$ إذا كان الضغط الفعال أو ضغط المقياس $p_0 = 0$ على السطح الحر، نحصل على $p = \gamma h$. لحساب القوة الناتجة في قعر الخزان F_R ، والتي تؤثر في مركز الجاذبية، يكفي بضرب P في سطح القعر $F_R = pS = \gamma hS$. في حالة الشكل (ب)، توزيع الضغط غير منتظم، لذلك حساب القوة سيكون موضوع الجزء التالي.



حساب القوة الهيدروستاتيكية وموقعها:

في الحالة العامة نأخذ سطح S مائل بزاوية θ يتعرض لضغط سائل ذو كتلة حجمية ρ ، في هذه الحالة الضغط الجوي P_{atm} يحيط بكل مكان. الهدف هو حساب قيمة القوة الناتجة F_R بالإضافة إلى إحداثيات نقطة تطبيقها x_R و x_R . لنأخذ المعلم X - Y بحيث يكون المحور Y موازيًا للسطح S وعموديًا على القوة F_R .

أ. حساب قيمة القوة F_R :

القوة المحصلة هي

$$F_R = \int_S dF = \int_S \rho g h dS \quad \text{مع} \quad h = y \sin \theta$$

$$F_R = \int_S \rho g y \sin \theta dS = \rho g \sin \theta \int_S y dS$$

يمثل التكامل $\int_S y dS$ العزم من الدرجة الأولى للسطح S (مركز الثقل) المحسوب بالنسبة للمحور X . حيث نكتب

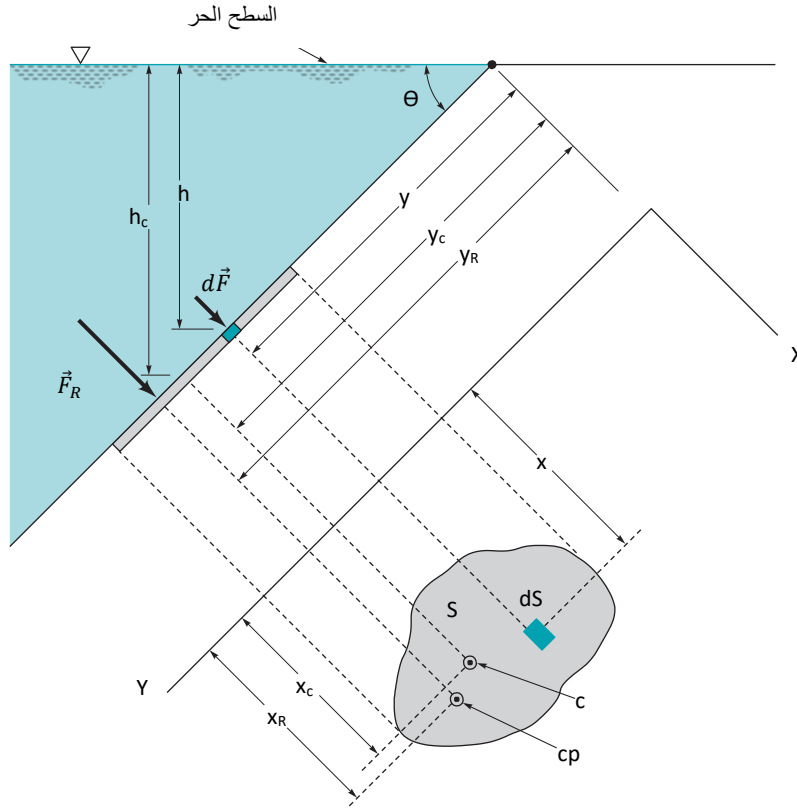
$$\int_S y ds = y_c S \quad \text{مع} \quad y_c \text{ الإحداثي } y \text{ لمركز ثقل للسطح } S \text{ فيما بالنسبة للمحور } X \text{ والذي يمر عبر } O, \text{ لذلك لدينا:}$$

$$F_R = \rho g \sin \theta y_c S \quad 2.16$$

$$h_c = \sin \theta y_c \quad \text{وكذلك}$$

$$F_R = \rho g h_c S \quad 2.17$$

شدة قوة المانع تساوي الضغط الذي يعمل في مركز الثقل للسطح مضروباً في السطح الكلي.



حساب موضع القوة F_R :

نبدأ بالاتجاه Y ، يتم الحصول على موضع F_R عن طريق حساب العزم:

$$F_R y_R = \int_S y dF = \int_S \rho g y^2 \sin \theta dS \quad \text{لان} \quad dF = \rho g y \sin \theta dS \quad 2.18$$

$$\rho g \sin \theta y_c S y_R = \int_S \rho g y^2 \sin \theta dS \quad \text{نعوض } F_R = \rho g \sin \theta y_c S \text{ مما يعطي}$$

و نحصل على:

$$y_R = \frac{\int_S y^2 dS}{y_c S} \quad 2.19$$

يسمى التكامل $\int_S y^2 dS$ بالعزم التربيعي للسطح S (عزم العطالة) بالنسبة للمحور OX ، ويرمز له بـ I_x ، لذلك نحصل على:

$$y_R = \frac{I_x}{y_c S}$$

من الأنسب كتابة العزم التربيعي I_x بالنسبة للمحور الذي يمر عبر مركز ثقل السطح S الذي يرمز إليه I_{xc} . يتم حساب الموضع y_R وفقاً لـ I_{xc} باستخدام العلاقة $I_x = I_{xc} + y_c^2 S$ ، وهذا يعطي:

$$y_R = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c S} \quad 2.20$$

باستثناء الأسطح الأفقية، نرى أن عمق القوة المحصلة لا يمر عبر مركز الثقل ولكن أسفله لأن $\frac{I_{xc}}{y_c S} > 0$

لحساب إحداثيات x_R ، نتابع بنفس الطريقة، نحسب عزم القوة:

$$F_R x_R = \int_S x dF = \int_S \rho g x y \sin \theta dS \quad \text{لان} \quad dF = \rho g y \sin \theta dS$$

نعوض F_R بقيمتها $F_R = \rho g \sin \theta y_c S$ فنحصل على

$$\rho g \sin \theta y_c S x_R = \int_S \rho g x y \sin \theta dS$$

و هذا ما يعطي :

$$x_R = \frac{\int_S x y dS}{y_c S} = \frac{I_{xy}}{y_c S}$$

مع $I_{xy} = \int_S x y dS$ هو جداء عزم العطالة بالنسبة للمحاور x و y . نغير المحور بتطبيق العلاقة $I_{xy} = I_{xyc} + x_c y_c S$ فنحصل على:

$$x_R = x_c + \frac{I_{xyc}}{y_c S}$$

I_{xyc} est le produit d'inertie par rapport à un système orthogonal passant par le barycentre de la surface S et formé par une translation du système $X-Y$.

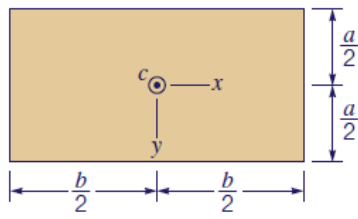
Si la surface est symétrique par rapport à un axe passant par le barycentre et parallèle à X ou Y , F_R doit se trouver le long de x_c car $I_{xyc} = 0$.

I_{xyc} هو جداء عزم العطالة بالنسبة لمعلم متعامد يمر عبر مركز ثقل للسطح S وينشأ من ازاحة للمعلم XY .

إذا كان السطح متماثلاً بالنسبة لمحور يمر عبر مركز الثقل ومتوازيًا مع X أو Y ، يجب أن يكون F_R على طول x_c لأن

$$I_{xyc} = 0$$

الخصائص الهندسية لبعض الأسطح المعتادة.



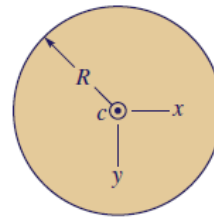
$$A = ba$$

$$I_{xc} = \frac{1}{12} ba^3$$

$$I_{yc} = \frac{1}{12} ab^3$$

$$I_{xyc} = 0$$

(a) Rectangle

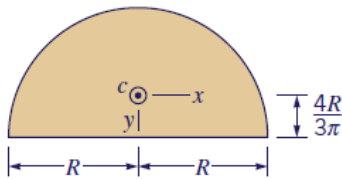


$$A = \pi R^2$$

$$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xyc} = 0$$

(b) Circle



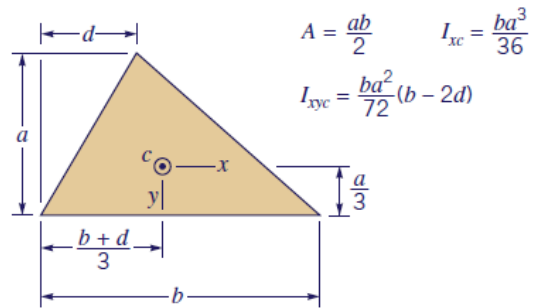
$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$I_{xc} = 0.1098R^4$$

$$I_{yc} = 0.3927R^4$$

$$I_{xyc} = 0$$

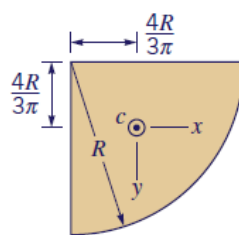
(c) Semicircle



$$A = \frac{ab}{2} \quad I_{xc} = \frac{ba^3}{36}$$

$$I_{xyc} = \frac{ba^2}{72}(b - 2d)$$

(d) Triangle



$$A = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$I_{xc} = I_{yc} = 0.05488R^4$$

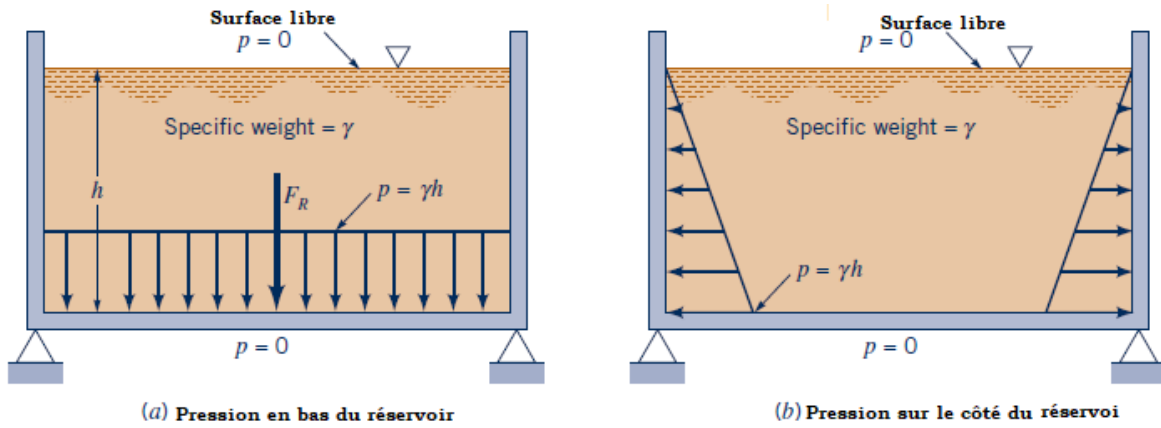
$$I_{xyc} = -0.01647R^4$$

(e) Quarter circle

Calcul des forces hydrostatiques sur les surfaces planes

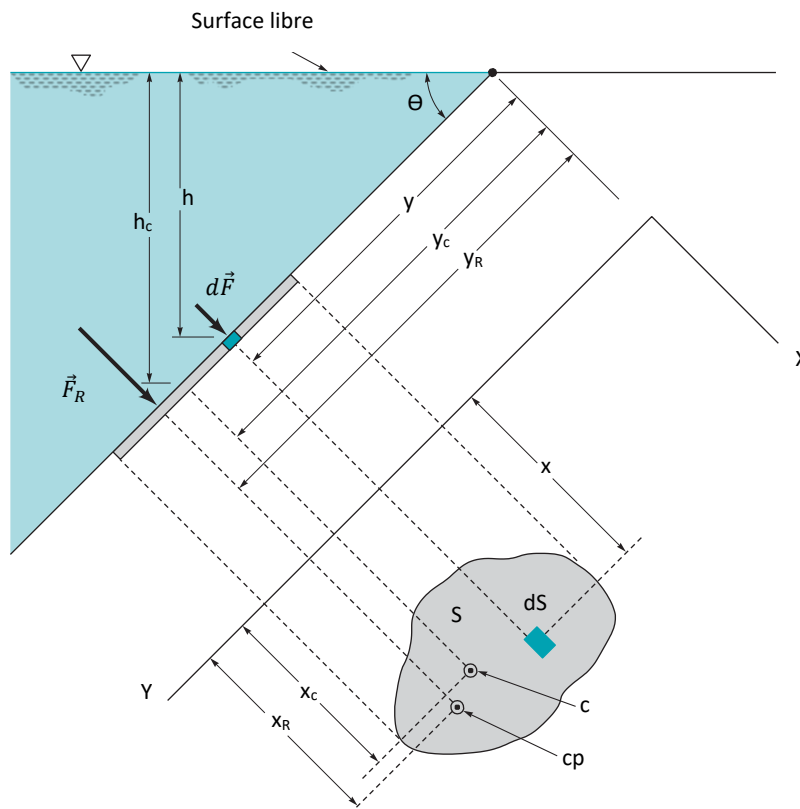
Lorsqu'une surface est submergée dans un fluide, des forces se développent sur la surface due à la pression du fluide. Le calcul de ces forces est important dans la conception des réservoirs, bateaux, barrages et d'autres structures hydrauliques. On sait que lorsque les fluides sont au repos, les forces sont perpendiculaires aux surfaces car les forces de frottement sont nulles. Aussi, la pression varie linéairement en fonction de la profondeur dans les fluides incompressibles. Au fond du réservoir (figure 5 (a)) la pression est $p = p_0 + \gamma h$ si la pression effective ou manométrique $p_0 = 0$ à la surface libre, on a $p = \gamma h$. Pour calculer la force résultante au fond du réservoir F_R , qui agit au centre de gravité, il

suffit de multiplier p par la surface du fond $F_R = pS = \gamma hS$. Dans le cas de la figure (b), la distribution de la pression n'est pas uniforme, le calcul de la force fera l'objet de la partie suivante.



7) Détermination de la force hydrostatique et sa position :

Soit une surface S inclinée avec un angle θ soumise à la pression d'un liquide de masse volumique ρ , la pression ambiante étant P_{atm} partout. Le but est de calculer la valeur de la force résultante F_R ainsi que les coordonnées x_R et y_R de son point d'application. Prenons un repère $X-Y$ tel que l'axe Y soit parallèle à la surface S et perpendiculaire à la force F_R .



a) Calcul de la valeur de la force F_R :

La force résultante est $F_R = \int_S dF = \int_S \rho gh dS$ avec $h = y \sin \theta$

D'où $F_R = \int_S \rho g y \sin \theta dS = \rho g \sin \theta \int_S y dS$

L'intégrale $\int_S y dS$ représente le moment du premier ordre de la surface S (barycentre) calculé par rapport à l'axe x. On écrit $\int_S y ds = y_c S$ avec y_c la coordonnée y du barycentre de la surface S par rapport à l'axe x et qui passe par O, on a donc :

$$F_R = \rho g \sin \theta y_c S \quad 2.16$$

Puisque $h_c = \sin \theta y_c$

$$F_R = \rho g h_c S \quad 2.17$$

L'intensité de la force du fluide est égale à la pression agissante au barycentre de la surface multipliée par la surface totale.

b) Calcul de la position de la force F_R :

Commençant par la direction Y, la position de F_R est obtenue par le calcul du moment :

$$F_R y_R = \int_S y dF = \int_S \rho g y^2 \sin \theta dS \quad \text{car } dF = \rho g y \sin \theta dS \quad 2.18$$

En remplaçant F_R par sa valeur $F_R = \rho g \sin \theta y_c S$ cela donne $\rho g \sin \theta y_c S y_R = \int_S \rho g y^2 \sin \theta dS$

on obtient $y_R = \frac{\int_S y^2 dS}{y_c S} \quad 2.19$

L'intégrale $\int_S y^2 dS$ est dite moment quadratique de la surface S (moment d'inertie) par rapport à l'axe OX, elle est notée I_x , on a donc $y_R = \frac{I_x}{y_c S}$

Il est plus commode d'écrire le moment quadratique I_x par rapport à un axe qui passe par le barycentre de la surface S noté par I_{xc} . La position y_R est calculée en fonction de I_{xc} en utilisant la relation $I_x = I_{xc} + y_c^2 S$, cela donne :

$$y_R = y_c + \frac{I_{xc}}{y_c S} \quad 2.20$$

Sauf pour les surfaces horizontales, on voit que la force résultante ne passe pas par le barycentre mais au-dessous car $\frac{I_{xc}}{y_c S} > 0$.

Pour déterminer la coordonnée x_R , on procède de la même façon, calculons le moment de la force :

$$F_R x_R = \int_S x dF = \int_S \rho g x y \sin \theta dS \quad \text{car } dF = \rho g y \sin \theta dS$$

Remplaçant F_R par sa valeur $F_R = \rho g \sin \theta y_c S$ on obtient

$$\rho g \sin \theta y_c S x_R = \int_S \rho g x y \sin \theta dS$$

Ce qui donne
$$x_R = \frac{\int_S x y dS}{y_c S} = \frac{I_{xy}}{y_c S}$$

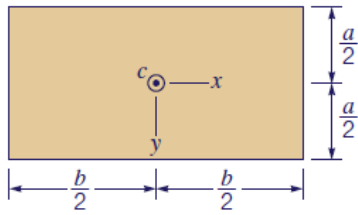
Avec $I_{xy} = \int_S x y dS$ est le produit d'inertie par rapport aux axes x et y . Changeons d'axe par l'application de la relation $I_{xy} = I_{xyc} + x_c y_c S$.

$$x_R = x_c + \frac{I_{xyc}}{y_c S}$$

I_{xyc} est le produit d'inertie par rapport à un système orthogonal passant par le barycentre de la surface S et formé par une translation du système $X-Y$.

Si la surface est symétrique par rapport à un axe passant par le barycentre et parallèle à X ou Y , F_R doit se trouver le long de x_c car $I_{xyc} = 0$.

c) **Propriétés géométriques de quelques surfaces usuelles.**



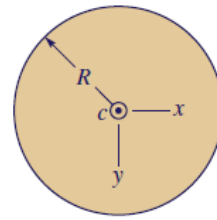
(a) Rectangle

$$A = ba$$

$$I_{xc} = \frac{1}{12} ba^3$$

$$I_{yc} = \frac{1}{12} ab^3$$

$$I_{xyc} = 0$$

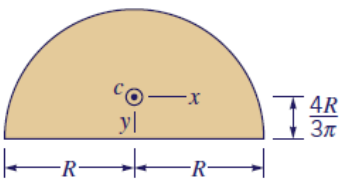


(b) Circle

$$A = \pi R^2$$

$$I_{xc} = I_{yc} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xyc} = 0$$



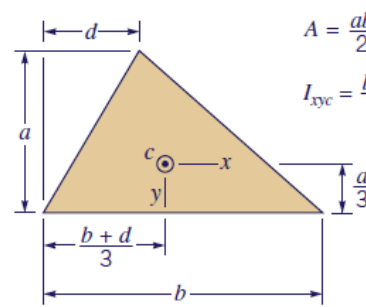
(c) Semicircle

$$A = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$I_{xc} = 0.1098R^4$$

$$I_{yc} = 0.3927R^4$$

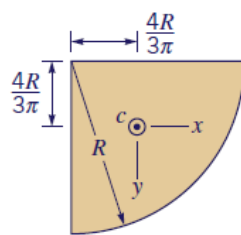
$$I_{xyc} = 0$$



(d) Triangle

$$A = \frac{ab}{2} \quad I_{xc} = \frac{ba^3}{36}$$

$$I_{xyc} = \frac{ba^2}{72}(b - 2d)$$



(e) Quarter circle

$$A = \frac{\pi R^2}{4}$$

$$I_{xc} = I_{yc} = 0.05488R^4$$

$$I_{xyc} = -0.01647R^4$$