Chapitre 1 : Cinématique

L'objet de la cinématique permet une description qualitative et quantitative de l'écoulement en termes de trajectoires, vitesses et évolutions spatio-temporelles contrairement à la dynamique des fluides qui étudie les forces mises en jeu au sein d'un écoulement. Nous verrons dans ce chapitre que la formulation mathématique nécessite des fonctions complexes pour modéliser des écoulements types (à deux dimensions), ce qui facilite la compréhension des comportements d'écoulements réels.
La description d'un écoulement passe nécessairement par l'utilisation d'un certain nombre de grandeurs caractéristiques.

1-1. **La particule fluide**

C'est une quantité élémentaire de matière sur la base de laquelle se fera la description de l'écoulement. Il s'agit d'un « groupe de molécules » entourant un point M donné de l'espace fluide qui possèdent les mêmes grandeurs physiques et dynamiques, entre autres la vitesse.

En écoulement, le mouvement des particules doit être décrit selon un référentiel pour pouvoir être étudié, dans ce sens, il existe deux descriptions différentes du mouvement :

1-2. **La Description d'Euler ou description Eulérienne**

C'est une description de l'écoulement qui consiste à établir à un instant t donné l'ensemble des vitesses de chacun des points de l'espace fluide. Ainsi, à chaque point M est associée une vitesse $\vec{V}_M(t)$ susceptible d'évoluer dans le temps. L'écoulement du fluide est alors décrit au moyen d'un ensemble de vecteurs vitesse appelé « champ de vitesse ». C'est donc une sorte d'image instantanée de l'écoulement.
Sur la base de ce champ de vecteurs vitesse, on définit la « ligne de courant » qui est la courbe rassemblant les points et tangente au vecteur vitesse en chacun des points (figure 1). Au même titre que le champ de vecteurs vitesse, il s'agit d'une représentation au sein l'espace fluide susceptible d'évoluer dans le temps ;

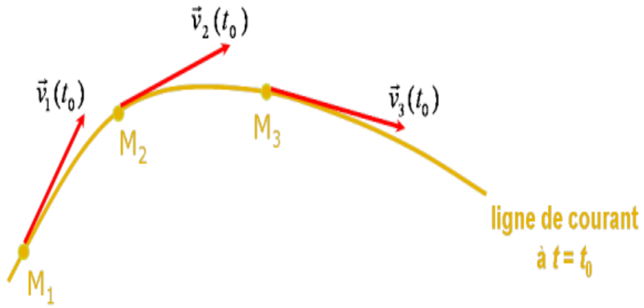


Figure 1 : ligne de courant

1-3. **La Description de Lagrange ou description Lagrangienne**

Il s'agit de suivre dans l'espace fluide la position d'une particule choisie en fonction du temps. Il en découle la définition de la « trajectoire » d'une particule fluide : c'est l'ensemble des positions occupées successivement par une même particule durant le temps t (figure 2**).**

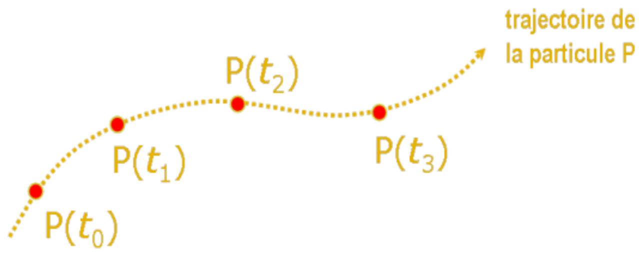


Figure 2. Trajectoire d'une particule

Il ne faut pas confondre ligne de courant et trajectoire. Ce sont deux notions différentes. En effet, si initialement (à $t = t_0$) une particule occupe un point M_0, elle se dirigera dans la direction donnée par la ligne de courant passant par M_0 à t_0, mais à $t_1 > t_0$ cette même particule se trouvera en un point t_1 appartenant à une autre ligne de courant définie différemment de celle définie à t_0 . Les deux courbes divergent donc dès que t est > t_0.

Remarque :

Les deux descriptions sont complémentaires et permettent souvent de se combiner pour résoudre un écoulement grâce aux deux approches. On peut comparer la description d'*Euler* à un « arrêt sur image » d'une vidéo sur un espace bien défini, et d'associer la description de *Lagrange* à une vidéo qui suit le mouvement de quelqu'un ou quelque chose.

1-4. Lignes d'émission

Toutes les particules qui sont passées par un même point E sont situées à l'instant t sur une courbe appelée « ligne d'émission » relative au point E à l’instant t. La figure 3 illustre cette courbe. C’est courbe souvent expérimentale : par exemple injecter une source colorante au sein d'un écoulement de fluide, le filet coloré produit correspond à une ligne d'émission.

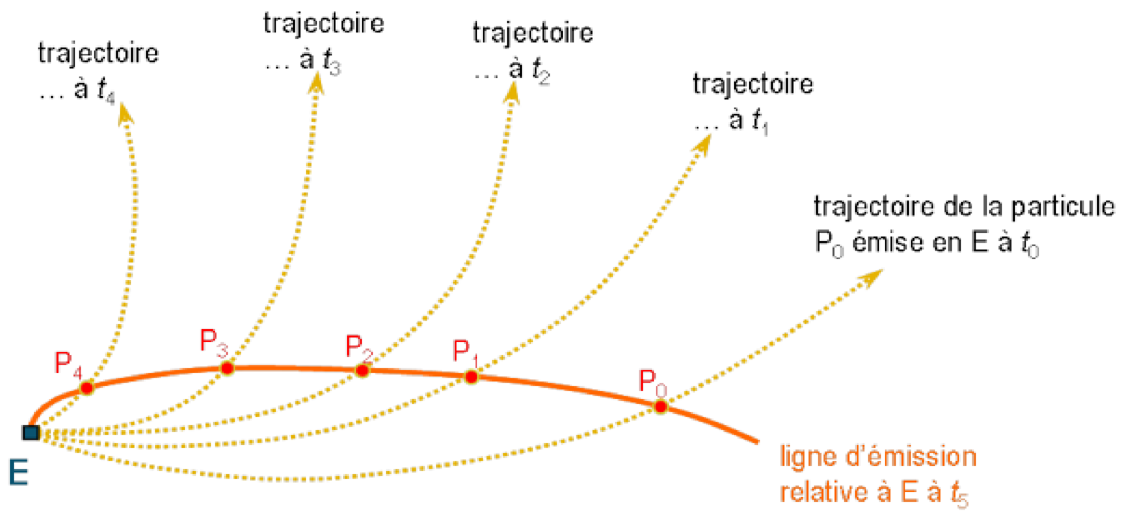


Figure 3. Lignes d’émission

1-5. **Écoulement permanent**

Un écoulement est qualifié de permanent (ou stationnaire) lorsque le champ de vecteurs vitesse de l'espace fluide est statique c’est à dire les vecteurs vitesse n'évoluent pas et ne varient pas dans le temps. Les conséquences sont multiples :

les lignes de courant sont aussi statiques

les trajectoires coïncident avec les lignes de courant

Tout ce qui concerne le fluide est indépendant du paramètre temporel, il ne reste plus que la dépendance dans l’espace : $\vec{V} \neq \vec{V}(t)$, donc $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$.

Remarque :

Un écoulement non stationnaire est très complexe à étudier d’une manière analytique directe. donc à votre niveau on s’intéressera aux écoulements permanents.

1-6. INTRODUCTION AUX BILANS DIFFERENTIELS

Prenons une quantité physique G entre deux instants très proches t_1 et t_2, son bilan s'écrit :

$$G\ (t + dt) - G(t) = dG(t) = \phi_e\ (t)\ dt - \phi_s\ (t)\ dt$$

Donc, la variation de G (t) représente l'accumulation ou la différence entre production et destruction de la grandeur G (t) pendant la durée dt , d'une part et égale à la différence des flux entrant et sortant du système ϕ_e (t) - ϕ_s (t) d'autre part . cette variation est dû au phénomène de transport :

Transport diffusif et convectif

Un volume de fluide peut se vider ou se remplir à travers ses frontières d'une grandeur G, ex : masse, quantité de mouvement, énergie, …

Lorsque les grandeurs physiques, ou chimiques de la matière traversent les frontières du volume de fluide, on parle de transport, il en existe deux types : transport diffusif et transport convectif.

- le transport diffusif : intervient lorsque la matière subit à l'échelle microscopique un déséquilibre d'une grandeur et le système tentant de revenir à l'équilibre. exemple , diffusion de la chaleur dans un corps exprime à échelle microscopique, le transfert de chaleur d'un point plus chaud vers un point plus froid sans qu'il y ait un mouvement global.
- le transport convectif : est le transport des quantités et grandeurs grâce au mouvement même du fluide à échelle macroscopique, c'est un transport plus rapide que le transport diffusif. exemple, remuer une boisson chaude, remuer deux peintures pour les mélanger (on devra attendre longtemps si on se limite à la diffusion !)

Equation différentielle de conservation de la masse / équation de continuité :

L'equation de conservation de la masse, exprime le transport de la quantité du fluide.

Soit un volume élémentaire de fluide dv = dx.dy.dz , dans un référentiel (o, x, y, z)

En appliquant le principe du transport pour la quantité de matière, on obtient le bilan de transport suivant (figure 4):

Accumulation de matière dans le volume dv pendant le temps dt =
flux massique entrant – flux massique sortant

Dans la direction Y, on obtient :

le flux massique entrant est égal au débit massique à travers la face 1, le flux massique sortant est le débit massique traversant la face 2.

le débit entrant face 1 : $\rho V_y dxdz$

le débit sortant de la face 2 : $\rho V_y dxdz + \partial/\partial y\ (\rho V_y dxdz)\ dy$

le débit entrant face 3 : $\rho V_x dydz$

le débit sortant de la face 5 : $\rho V_x dydz + \partial/\partial x\ (\rho V_x dydz)\ dx$

le débit entrant face 4 : $\rho V_z dxdy$

le débit sortant de la face 6 : $\rho V_z dxdy + \partial/\partial z\ (\rho V_z dxdy)\ dz$

Le taux d'accumulation de la masse pendant dt est :

$1/dt\ (dm + \partial/\partial t(dm)\ dt - dm) = \partial/\partial t(dm) = \partial/\partial t(\rho dxdydz)$

Donc le bilan s'écrit finalement :

L'accumulation de la masse dans le volume durant dt =
somme de tous les débits massiques à travers les 6 faces du volume

$\partial/\partial t(dm) = \partial/\partial t(\rho dxdydz) =$

$[\rho V_1 dxdz + \rho V_2 dydz + \rho V_3 dxdy] - [\rho V_1 dxdz + \partial/\partial y\ (\rho V_1 dxdz)\ dy + \rho V_2 dydz + \partial/\partial x\ (\rho V_2 dydz)\ dx + \rho V_3 dxdy + \partial/\partial z\ (\rho V_3 dxdy)\ dz]$

ce qui revient à écrire en divisant par le volume de l'élément du fluide dv:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

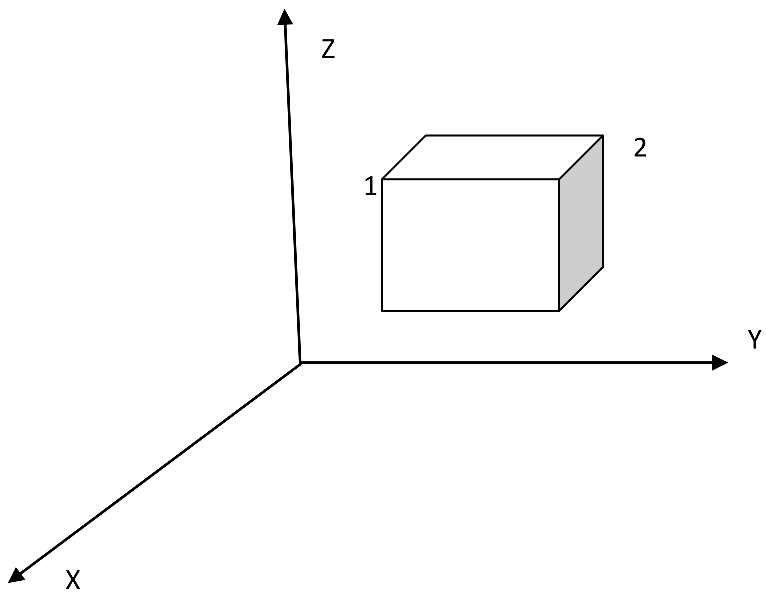


Figure 4. élément de fluide dv

- forme compacte de l'équation:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\,(\rho\vec{V}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{V}) = 0$$

- forme tensorielle :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\, u_i)}{\partial x_i} = 0$$

pour un écoulement permanent ρ est indépendante du temps, donc :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

pour un fluide incompressible ρ est constante :

$$\frac{\partial(u)}{\partial x} + \frac{\partial(v)}{\partial y} + \frac{\partial(w)}{\partial z} = \vec{\nabla}.(\vec{V}) = 0$$

1-7**. Champ de vitesse d'un fluide**

Au cours du mouvement, une particule fluide subit des changements de position, d'orientation et de forme.

Soit deux points voisins d'un fluide $M(x,y,z)$ et $M^{'}$ $(x+dx, y+dy,\ z+dz)$ et leurs vitesses $\vec{V}\,(M)$ $et\,\vec{V^{'}}(M^{'})$ à un instant t. Les composantes vitesses varient dans les trois directions :

$$v'_x = v_x(x+dx, y+dy, z+dz) = v_x + dv_x = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy + \frac{\partial v_x}{\partial z}dz$$

$$v'_y = v_y(x+dx, y+dy, z+dz) = v_y + dv_y = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x}dx + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \frac{\partial v_y}{\partial z}dz$$

$$v'_z = v_z(x+dx, y+dy, z+dz) = v_z + dv_z = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x}dx + \frac{\partial v_z}{\partial y}dy + \frac{\partial v_z}{\partial z}dz$$

Ces expressions peuvent être écrites,

$$v'_x = v_x + \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)dz\right] + D_x$$

Avec $D_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)dy + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)dz\right]$

De la même manière, on écrit les autres composantes :

$$v'_y = v_y + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)dx - \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)dz\right] + D_y$$

Avec $D_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)dx + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)dz$

$$v'_z = v_z + \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)dy\right] + D_z$$

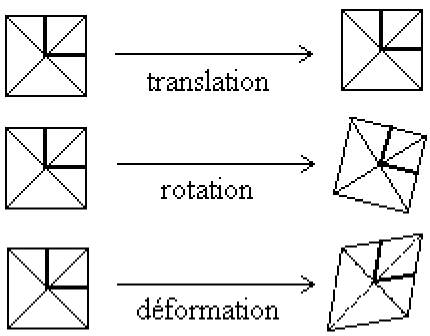
Avec $D_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)dx + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)dy + \frac{\partial v_z}{\partial z}dz$

Cette écriture permet de passer à la forme vectorielle comme suit :

$\overrightarrow{v'}\,(M') = \vec{v}\,(M) + \vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{MM'} + \vec{D}$ avec $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\,\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{\nabla}\,\vec{v}$

$\vec{\Omega} = \Omega_x\overrightarrow{e_x} + \Omega_y\overrightarrow{e_y} + \Omega_z\overrightarrow{e_z}$ est le vecteur **tourbillon** (exprimant la rotation)

et $\vec{D} = D_x\overrightarrow{e_x} + D_y\overrightarrow{e_y} + D_z\overrightarrow{e_z}$ est la vitesse de déformation



Le mouvement d'un fluide est une superposition d'une translation, rotation et déformation

Ces résultats peuvent être présentés sous forme tensorielle. On introduit alors :

le tenseur rotation :

$$\left[\overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{\mathrm{MM'}}\right] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

et le tenseur déformation :

$$\left[\overrightarrow{\mathrm{D}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

1.8. **Définition de la fonction de courant**

Considérons l'écoulement conservatif d'un fluide incompressible. Dans ce cas, l'équation de continuité se formule simplement par :$\vec{\nabla}.\vec{V} = 0$. Par ailleurs, quelle que soit la quantité vectorielle $\vec{A}$, en tout point de l'espace la relation mathématique $\overrightarrow{\nabla}.(\vec{\nabla}X\vec{A})$ doit être vérifiée. Donc, par identification, on peut définir en tout point de l'espace le vecteur vitesse comme résultant de $\vec{V} = \vec{\nabla}X\vec{A}$, où $\vec{A}$ est un « potentiel vecteur ». La connaissance de ce potentiel vecteur en tout point de l'espace permet donc d'en déduire les trois composantes du vecteur vitesse en ce même point :

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} v_x = \partial A_z/\partial y - \partial A_y/\partial z \\ v_y = \partial A_x/\partial z - \partial A_z/\partial x \\ v_z = \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y \end{vmatrix}$$

Considérons maintenant que l'écoulement est bidimensionnel, dans le plan (x, y) , impliquant que v_z=0 et qu'il y ait invariance par translation suivant z, d'où $\partial/\partial z = 0$. Il reste alors :

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} v_x & = & \partial A_z/\partial y \\ v_y & = & -\partial A_z/\partial x \\ v_z & = & 0 \end{vmatrix}$$

Dans ces conditions, on note que chaque vecteur vitesse est défini au moyen de seulement deux composantes et que celles-ci dérivent d'une seule composante parmi les trois du potentiel vecteur. On peut en conclure que le champ de vecteurs vitesse d'un écoulement plan dérive d'une quantité scalaire, la fonction de courant $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{A_z}$.

La connaissance de cette fonction de courant permet d'en déduire le champ de vecteurs vitesse en tout point de l'écoulement, par simple application de :

$$v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$$
$$v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Propriétés de la fonction de courant

La fonction de courant définit le vecteur vitesse, l'équation de continuité appliquée dans le cadre d'un écoulement plan et conservatif d'un fluide incompressible permet d'établir une propriété interessante de la fonction de courant :

$$\vec{\nabla} \vec{v} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) = 0$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x}$$

On en déduit par conséquent que $\mathbf{d\psi}$ est une **différentielle totale exacte**. En pratique, lorsqu'on intègre $\mathbf{d\psi}$ d'un point A à un point B du plan, le résultat de l'intégration ne dépend pas du chemin suivi entre ces deux points :

$$\int_A^B \mathrm{d}\Psi = \Psi_B - \Psi_B = \Psi(x_B, y_B) - \Psi(x_A, y_A)$$

Dans le plan de l'écoulement, l'ensemble des points pour lesquels la fonction de courant est constante définit une courbe particulière : il s'agit d'une courbe le long de laquelle $\mathbf{d\psi = 0}$, où doit être vérifié : $\frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathrm{d}y = 0$ avec $v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ et $v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$

on peut écrire $-v_y \mathrm{d}x + v_x \mathrm{d}y = 0$, ce qui signifie qu'en chaque point de cette courbe, doit être vérifié :

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v_y}{v_x}$$

C’est-à-dire , la tangente à la courbe est en tout point identique à l'orientation du vecteur vitesse (voir figure 5**)**. Une courbe qui présente cette propriété est alors une courbe que l'on a déjà définie comme étant une ligne de courant. Il en résulte que **la fonction de courant est constante le long d'une ligne de courant,** la fonction de courant exprime l’ensemble des lignes de courant**.**

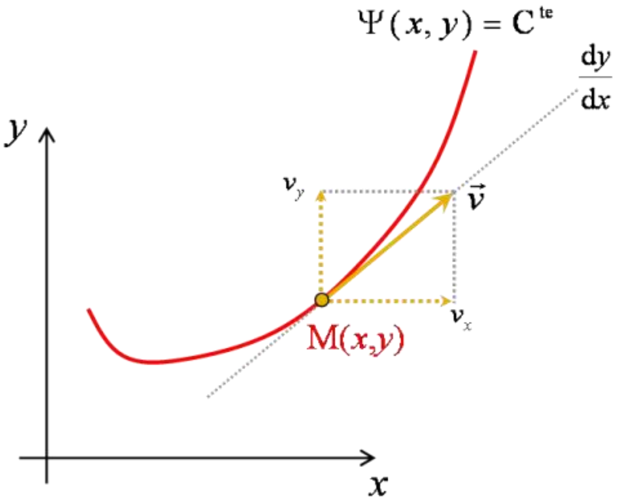


Figure 5 . Fonction de courant

Remarque :

A chaque ligne de courant correspond une constante différente comme valeur de la fonction de courant. Exemple : l'ensemble des lieux se trouvant à la même altitude constitue une courbe de niveau ; la fonction de courant est ainsi l'analogue de l'altitude. L'analogie peut être poussée en considérant que le passage d'une courbe de niveau à une autre induit une dénivellation qui est indépendante du chemin emprunté. Il en est de même pour la fonction de courant dont, on l'a vu, la différentielle est totale exacte.

1.9. **Débit et lignes de courant**

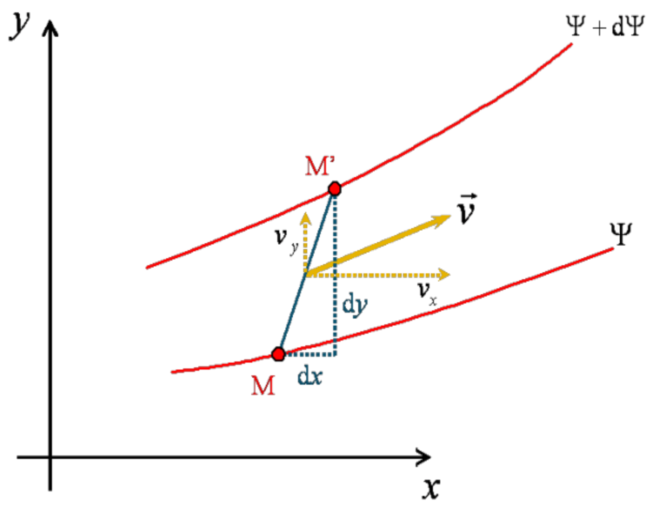


Figure 6. Débit et lignes de courant 1

Considérons, au sein d'un écoulement plan, deux lignes de courant infiniment voisines (voir **figure 6** et caractérisées par des fonctions de courant infiniment proches : Ψ et $\Psi + \mathrm{d}\Psi$. Considérons deux points M et M'appartenant à chacune de ces deux lignes de courant et donnons nous pour objectif de calculer le débit volumique de l'écoulement à travers le segment [MM'].

Il s'agit d'un débit élémentaire qui peut se décomposer en considérant la somme des débits traversant les projections selon x et y du segment MM'. On a ainsi :

$$\mathrm{d}q_v = v_x \mathrm{d}y - v_y \mathrm{d}x$$

où le signe (-) rend compte du fait que le débit à travers dx contribue négativement au débit global.

Or, les composantes de la vitesse peuvent se formuler en fonction des dérivées partielles de la fonction de courant : $v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$ et $v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$; on obtient alors cette nouvelle formulation du débit élémentaire :

$$\mathrm{d}q_v = \frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x$$

On vient ainsi de montrer que . $\mathrm{d}q_v = \mathrm{d}\Psi$

Évidemment, l'intérêt de cette équivalence est qu'il est possible de calculer simplement le débit volumique de fluide s'écoulant entre deux lignes de courant quelconques en intégrant dψ entre deux points quelconques A et B appartenant à chacune de ces deux lignes (voir figure 7) :

$$q_V = \int_A^B dq_V = \int_A^B d\Psi = \Psi_B - \Psi_A$$

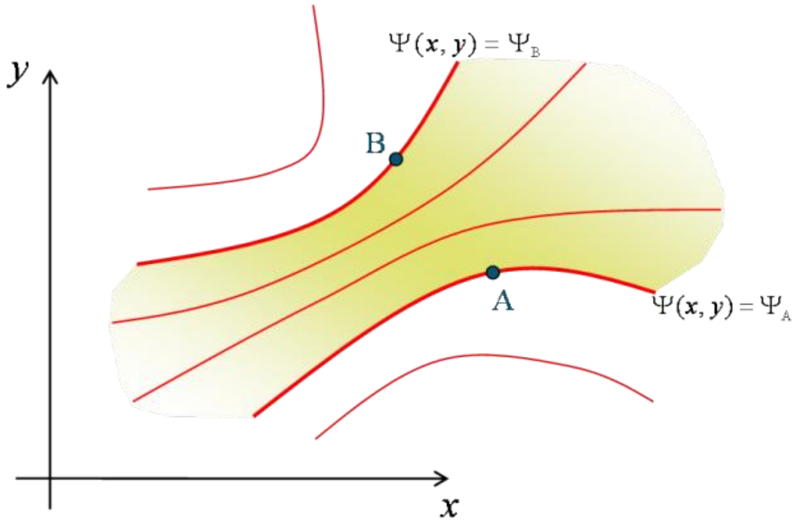


Figure 7 débit et lignes de courant2