Série 01

Solution d'exercice 01 :

$$\int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx = \frac{-l}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\Big]_{-l}^{l} = \frac{-l}{k\pi}\left[\cos(k\pi) - \cos(-k\pi)\right] = 0$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{k\pi x}{l}\right) dx = \frac{l}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)\Big]_{-l}^{l} = \frac{l}{k\pi}\left[\sin(k\pi) + \sin(k\pi)\right] = 0$$

$$\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{l}{n\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\Big]_{-l}^{l} + \frac{m}{n}\int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

(intégration par parties)

$$\begin{aligned} f &= \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \qquad , f' = \frac{-m\pi}{l}\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \\ g' &= \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \qquad , g = \frac{l}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{m}{n}\int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$

On utilise la formule :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

où $\alpha = \frac{m\pi x}{l}$, $\beta = \frac{n\pi x}{l}$

$$\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right) dx = \int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx - \int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{l}\right) dx &= \int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx - \int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \left(1 - \frac{n}{m}\right)\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= \left(\frac{n}{m} - 1\right)\int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

Car

$$\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{(n+m)\,\pi x}{l}\right) dx = \left.\frac{l}{(n+m)\,\pi} \sin\left(\frac{(n+m)\,\pi x}{l}\right)\right]_{-l}^{l} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0 \quad si\ n \neq m$$

$$\Rightarrow \int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = 0 \quad si\ n \neq m$$

Si $n = m$

$$\Rightarrow \int_{-l}^{l} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \int_{-l}^{l} \frac{1+\cos\left(\dfrac{2n\pi x}{l}\right)}{2} dx = l$$

et

$$\int_{-l}^{l} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \int_{-l}^{l} \frac{1-\cos\left(\dfrac{2n\pi x}{l}\right)}{2} dx = l$$

$$\Rightarrow \int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ l & \text{si } n = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right)$$

où $\alpha = \dfrac{m\pi x}{l}$, $\beta = \dfrac{n\pi x}{l}$

$$\Rightarrow \int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{(m+n)\,\pi x}{l}\right) dx + \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{(m-n)\,\pi x}{l}\right) dx = 0$$

car

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} \sin\left(\frac{(m+n)\,\pi x}{l}\right) dx &= \left.\frac{-l}{(m+n)\,\pi} \cos\left(\frac{(m+n)\,\pi x}{l}\right)\right]_{-l}^{l} = 0 \text{ et} \\ \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} \cos\left(\frac{(m-n)\,\pi x}{l}\right) dx &= \left.\frac{l}{(m+n)\,\pi} \sin\left(\frac{(m-n)\,\pi x}{l}\right)\right]_{-l}^{l} = 0 \end{aligned}$$

(D'après les formules élémentaires de trigonométrie)
2)

$$\int_{-l}^{l} \sin^2\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \int_{-l}^{l} \frac{1-\cos\left(\dfrac{2m\pi x}{l}\right)}{2} dx = l$$

$$\int_{-l}^{l} \cos^2\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx = \int_{-l}^{l} \frac{1+\cos\left(\dfrac{2m\pi x}{l}\right)}{2} dx = l$$

d'où

$$\int_{-l}^{l} \left(\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right)^2 dx = 1, \quad \int_{-l}^{l} \left(\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\right)^2 dx = 1$$

et

$$\int_{-l}^{l} (1)^2\, dx = 2l \text{ or } \int_{-l}^{l} \left(\frac{1}{\sqrt{2l}}\right)^2 dx = 1.$$

Dans ces conditions l'ensemble orthonormé est :

$$\frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{2l}}\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \frac{1}{\sqrt{2l}}\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right), \frac{1}{\sqrt{2l}}\cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right), \frac{1}{\sqrt{2l}}\sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Remarque : $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Solution d'exercice 02 :

1) Système $S-L$ est de la forme

$$\begin{cases} \left(p(x)\, y'\right)' + \left(q(x) + \lambda\Omega(x)\right) y = 0, \ a \leq x \leq b \\ \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \end{cases}$$

dans notre cas $p(x) = 1$, $q(x) = 0$, $\Omega(x) = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $\alpha_1 = \beta_1 = 1$, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ il est donc un système de $S-L$.
2) La solution générale de $y'' + \lambda y = 0$ est $y(x) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$,
d'après $y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$ c-à-d $y = B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$,
d'après $y(1) = 0$ nous avons $B\sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0$, B ne peut pas être nul ;
Alors $\sin\left(\sqrt{\lambda}\right) = 0 \Rightarrow \lambda = (m\pi)^2$ tq $m \in \mathbb{Z}^*$ sont les valeures propres cherchées ;
Les fonctions propres $B_m \sin(m\pi)$.
3) Les fonctions propres sont orthogonales puisque

$$\int_0^1 \left(B_m \sin(m\pi x)\right)\left(B_n \sin(n\pi x)\right) dx = B_m B_n \int_0^1 \sin(m\pi x)\sin(n\pi x)\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

4) Nous avons

$$\int_0^1 (B_m \sin(m\pi x))^2 \, dx = 1 \Rightarrow \frac{B_m^2}{2} \int_0^1 (1 - \cos(2m\pi x)) \, dx = \frac{B_m^2}{2} = 1,$$

donc $B_m = \sqrt{2}$.
Donc l'ensemble $\sqrt{2} \sin(m\pi x)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$est alors un ensemble orthogonal.
5) Nous devons trouver ces constantes C_m , $m = 1, 2, 3, \ldots$telles que

$$f(x) = \sum_{m \geq 1} C_m \phi_m(x) \text{ où } f(x) = 1, \phi_m(x) = \sqrt{2} \sin(m\pi x)$$

par la méthode des séries de Fourier

$$\begin{aligned} C_m &= \int_0^1 f(x) \phi_m(x) \, dx = \int_0^1 \sin(m\pi x) \, dx = \left. \frac{-\sqrt{2}}{m\pi} \cos(m\pi x) \right]_0^1 \\ &= \frac{-\sqrt{2}}{m\pi} [\cos(m\pi) - \cos(0)] = \frac{\sqrt{2}}{m\pi} (1 - (-1)^m) \end{aligned}$$

Si $0 < x < 1$, la série de Fourier cherchée est :

$$1 = \sum_{m \geq 1} \frac{2(1 - (-1)^m)}{m\pi} \sin(m\pi x)$$

Solution d'exercice 03 :

1)

$$\int_0^\pi y''(x) y(x) \, dx = -\lambda \int_0^\pi y^2(x) \, dx, \; y(0) = 0, \; y(\pi) = 0.$$

$$\Rightarrow \left. y'(x) y(x) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(y'(x) \right)^2 dx = -\lambda \int_0^\pi y^2(x) \, dx$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\int_0^\pi \left(y'(x) \right)^2 dx}{\int_0^\pi (y(x))^2 \, dx} > 0,$$

on pose alors : $\lambda = \omega^2$, $\omega \in \mathbb{R}^*$.
$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$, sa solution générale est :

$$y(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) , \; A, B \in \mathbb{R}, \; y(0) = 0 \Rightarrow A = 0, \; y(\pi) = 0$$

$$\Rightarrow B \sin(\omega\pi) = 0, \; B \neq 0$$

et il reste alors

$$\sin(\omega\pi) = 0 \Rightarrow \omega = n \in \mathbb{Z}^*$$

donc les fonctions propres

$$y_n(x) = B_n \sin(nx), \; n \in \mathbb{N}^*$$

2)

$$\int_0^{\pi} y''(x)\, y(x)\, dx = -\lambda \int_0^{\pi} y^2(x)\, dx, \; y(0) = 0, \; y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow y'(x)\, y(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y'(x)\right)^2 dx = -\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} y^2(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y'(x)\right)^2 dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (y(x))^2\, dx} > 0,$$

on pose alors : $\lambda = \omega^2$, $\omega \in \mathbb{R}^*$.

$y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$, sa solution générale est :

$$y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x), \; A, B \in \mathbb{R}, \; y(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$$

$$\begin{aligned} y'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \Rightarrow B\omega \cos\left(\omega\frac{\pi}{2}\right) = 0, B\omega \neq 0 \Rightarrow \cos\left(\omega\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ &\Rightarrow \omega = 2n+1, \, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

donc les fonctions propres : $y_n(x) = B_n \sin((2n+1)x)$

$$\lambda_n = \omega_n^2 = (2n+1)^2, n \in \mathbb{Z} \text{ et } y_n(x) = B_n \sin((2n+1)x), n \in \mathbb{N}$$

Remarque : Si on veut une base orthonormée de $L^2\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ il suffit d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (y_n(x))^2\, dx &= 1 \Rightarrow B_n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2((2n+1)x)\, dx = B_n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos((4n+2)x)}{2} dx \\ &= \frac{B_n^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \frac{B_n^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((4n+2)x)\, dx \\ &= \frac{B_n^2}{4} - \frac{B_n^2}{2}\frac{1}{4n+2}\sin((4n+2)x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{B_n^2}{4} = 1 \Rightarrow B_n^2 = \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

$B_n^2 = \dfrac{4}{\pi}$ donc on peut choisir par exemple :

$$y_n(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sin((2n+1)x), n \in \mathbb{N}$$

3)

$$\frac{d}{dx}\left(x^3y^{'}(x)\right)+\lambda xy(x)=0 \text{ avec } y(1)=0 \text{ et } y(e)=0$$

$$\Rightarrow x^3y^{''}(x)+3x^2y^{'}(x)+\lambda xy(x)=0 \text{ avec } y(1)=0 \text{ et } y(e)=0 \quad (1)$$

c'est une équation d'Euler, effectuons le changement de variable :

$$x=e^t\Rightarrow\frac{dx}{dt}=x\Rightarrow\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}et\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

Car :

1)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx},\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\Rightarrow\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}$$

2)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}$$

en remplaçant dans l'équation (1) on obtient :

$$\left(\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\right)x^3+3x^2\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)+\lambda xy=0$$

$$\Rightarrow\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+\lambda y=0 \quad (2)$$

il vient l'équation caractristique $\Omega^2+2\Omega+\lambda=0$

$\Delta^{'}=(1)^2-\lambda=1-\lambda$

trois situations se présentent

Cas 1 : Si $0<\lambda<1$, $\Omega_1=-1-\sqrt{1-\lambda}$, $\Omega_2=-1+\sqrt{1-\lambda}$

$$\begin{aligned}
y(t) &= C_1e^{\left(-1-\sqrt{1-\lambda}\right)t}+C_2e^{\left(-1+\sqrt{1-\lambda}\right)t}=e^{-t}\left(C_1e^{-\left(\sqrt{1-\lambda}\right)t}+C_2e^{\left(\sqrt{1-\lambda}\right)t}\right)\\
&= e^{-t}\left(C_1ch\left(-\sqrt{1-\lambda}t\right)-C_1sh\left(\sqrt{1-\lambda}t\right)+C_2ch\left(\sqrt{1-\lambda}t\right)+C_2sh\left(\left(\sqrt{1-\lambda}t\right)\right)\right)\\
&= e^{-t}\left((C_1+C_2)\,ch\left(-\sqrt{1-\lambda}t\right)+(C_2-C_1)\,sh\left(\sqrt{1-\lambda}t\right)\right)\\
&= e^{-t}\left(Ach\left(-\sqrt{1-\lambda}t\right)+Bsh\left(\sqrt{1-\lambda}t\right)\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= 1\Rightarrow e^t=1\Rightarrow t=0\Rightarrow y(0)=0\Rightarrow A=0\\
x &= e\Rightarrow t=1\Rightarrow y(1)=0\Rightarrow\frac{1}{e}sh\left(\sqrt{1-\lambda}\right)=0\Rightarrow B=0
\end{aligned}$$

alors $y(t)=0$, $\forall t$ qui n'est pas une fonction propre donc $\lambda\notin\,]0,1[$

Cas 2 : Si $\lambda=1$ il y a un racine double $\Omega=-1\Rightarrow y(t)=e^{-t}(A+Bt)$

les $C-L$ imposent : $y(t=0)=0\Rightarrow A=0, y(t=1)=0\Rightarrow B=0$

Alors $y(t)=0$, $\forall t$ qui n'est pas une fonction propre donc $\lambda\neq 1$

Cas 3 : Si $\lambda > 1, \Omega_1 = -1 - i\sqrt{1-\lambda}$, $\Omega_2 = -1 + i\sqrt{1-\lambda}$

$$y(t) = e^{-t}\left(A\cos\left(\sqrt{\lambda-1}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda-1}t\right)\right),\ A, B \in \mathbb{R}$$

$$y(t=0) = 0 \Rightarrow A = 0, y(t=1) = 0 \Rightarrow \sin\left(\sqrt{\lambda-1}\right) = 0$$

$\Rightarrow \lambda_n = 1 + n^2\pi^2 \Rightarrow$les fonctions propres $y_n(t) = B_n e^{-t}\sin(n\pi t)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Revenant à la variable x, on obtient :

$$\begin{cases} y_n(x) = \dfrac{B_n}{x}\sin(n\pi\ln x), n \in \mathbb{N}^*, B_n : cst \\ \lambda_n = 1 + n^2\pi^2, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

les fonctions propres $y_n(x)$ sont orthogonales entre elles relativement à la fonction poids $\omega(x) = x$ sur $[1, e]$.
Remarque : Si on veut une base orthonormée de $L^2_{\omega(x)}[1, e]$, il suffit d'écrire :

$$\int_1^e xy_n^2(x)\,dx = 1, \left(\ x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt\right) \Rightarrow B_n^2 \int_1^e \frac{1}{x}\sin(n\pi\ln x)\,dx = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & B_n^2 \int_1^e e^{-t}\sin^2(n\pi t)\,e^t dt = B_n^2 \int_1^e \sin^2(n\pi t)\,dt = B_n^2 \int_1^e \frac{1-\cos(2n\pi t)}{2}dt \\ = \quad & \frac{B_n^2}{2} = 1 \Rightarrow B_n^2 = 2 \Rightarrow B_n = \sqrt{2} \end{aligned}$$

donc on choisit par exemple $y_n(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{x}\sin(n\pi\ln x)$, $n \in \mathbb{N}^*$

Solution d'exercice 3 partie 2: il suffit appliquer et réviser les pages 11 et 12 du support de cours.