

Chapitre 3

Réseaux électriques en régime sinusoïdal

Si l'on impose à un réseau une tension (ou un courant) sinusoïdale, on voit apparaître, en plus du régime transitoire, une réponse sinusoïdale de même fréquence que la tension (ou le courant) appliquée. Quand le régime transitoire a disparu, cette réponse sinusoïdale subsiste : c'est le régime sinusoïdal permanent. Dans cette partie, nous étudions des circuits linéaires dans lesquels les signaux imposés par les générateurs sont sinusoïdaux.

1. Grandeurs sinusoïdales

Un signal est dit sinusoïdal s'il est de la forme :

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) = X \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$$

x_m : amplitude du signal.

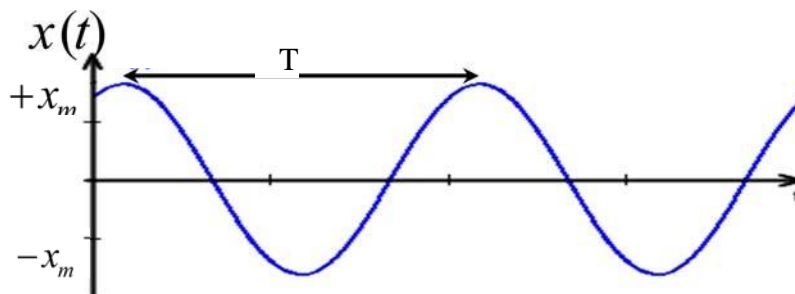
ω : pulsation du signal périodique et s'exprime en (rad/s).

$T = \frac{2\pi}{\omega}$: période du signal ; $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$: fréquence du signal.

$\omega t + \varphi$: est la phase du signal et s'exprime en radians (rad),

φ : phase initiale du signal (à $t = 0$).

X : valeur efficace définie par : $X^2 = \frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt$; on obtient : $X = \frac{x_m}{\sqrt{2}}$.



2. Représentations des grandeurs sinusoïdales

Représentation vectorielle (Méthode de Fresnel)

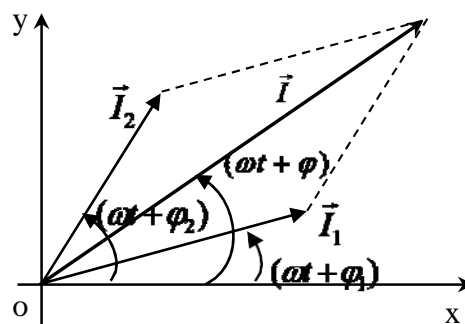
Cette méthode permet d'additionner des grandeurs instantanées sinusoïdales de même fréquence, mais d'amplitudes et de phases différentes.

- Considérons deux courants sinusoïdaux :

$$i_1(t) = I_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad i_2(t) = I_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

La somme des deux courant est : $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$.

- Pour trouver $i(t)$, on peut procéder graphiquement :



- On considère un vecteur noté I_1 , de norme I_{m1} , tournant dans le plan xOy à une vitesse angulaire ω , et dont l'angle avec l'axe Ox à un instant t est égale à $\omega t + \varphi_1$. On définit de même un vecteur I_2 .

- Les projections sur Ox des vecteurs I_1 et I_2 sont égales respectivement aux courant i_1 et i_2 .

La somme des deux courant $i(t)$ est la projection du vecteur somme :

$$i(t) = I_N \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad \vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 ; \quad \text{tel que} \quad \|\vec{I}\| = I_N$$

Représentation complexe

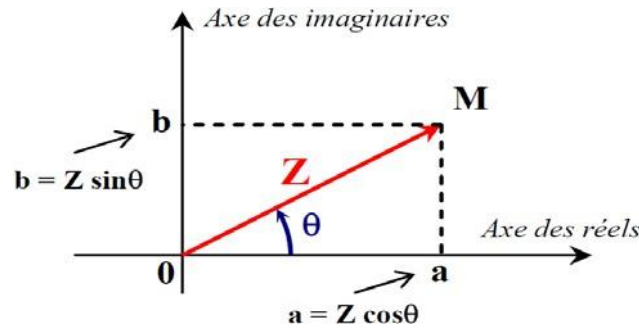
Rappels mathématiques

- Un nombre complexe peut se mettre sous la forme : $Z = a + jb$

On appelle : $a = \Re(Z)$ la partie réelle

et $b = \Im(Z)$ la partie imaginaire

- On peut lui associer un vecteur OM dans le plan complexe : $Z = r \cos \theta + j r \sin \theta$



$$r = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad : \text{ module du nombre complexe}$$

$$\theta = \arg(Z) = \arctan \frac{b}{a} \quad : \text{ argument (angle) du nombre complexe}$$

- On peut aussi l'écrire sous la forme exponentielle : $Z = r e^{j\theta}$
- ou sous la forme polaire : $Z = [r ; \theta] = r \angle \theta$
- cas particulier : $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$

Application aux signaux sinusoïdaux

On associe à un signal sinusoïdal $x(t)$ une grandeur complexe temporelle \underline{X} :

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) = \Re(\underline{X} e^{j\omega t}) ; \quad \underline{X} = x_m e^{j\varphi} = X \sqrt{2} e^{j\varphi} = X \angle \varphi$$

$$x(t) \Leftrightarrow \underline{X}$$

x_m : module de la grandeur complexe ($|\underline{X}|$) ;

φ : argument de la grandeur complexe ($\arg \underline{X}$) ;

$X = \frac{x_m}{\sqrt{2}}$: valeur efficace.

Remarque : On notera $x(t)$ la valeur instantanée, X la valeur efficace et \underline{X} la valeur complexe.

Dérivée et intégration

Soit la fonction $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$, la dérivée s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} = -x_m \omega \sin(\omega t + \varphi) = x_m \omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

On lui associe l'amplitude complexe : $\omega x_m e^{j\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = j\omega x_m e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega \underline{X} e^{j\omega t}$

donc : $\frac{dx}{dt} \Leftrightarrow j\omega \underline{X}$

De même on démontre que intégrer revient à diviser par $j\omega$:

$$\int x dt \Leftrightarrow \frac{1}{j\omega} \underline{X}$$

3. Modèle complexe d'un circuit en régime sinusoïdal

Dans un circuit en régime sinusoïdal, on peut écrire :

$$e(t) = E_0 \cos \omega t = \Re(\underline{E} e^{j\omega t}) ; \quad \underline{E} = E_0$$

la source de tension $e(t)$ est remplacée par sa forme complexe notée \underline{E} :

$$e(t) \Leftrightarrow \underline{E} = E_0$$

$$\underline{Z} = R + jX$$

Dans le modèle complexe, tout dipôle linéaire possède une **impédance complexe** :

où R : représente la résistance du dipôle

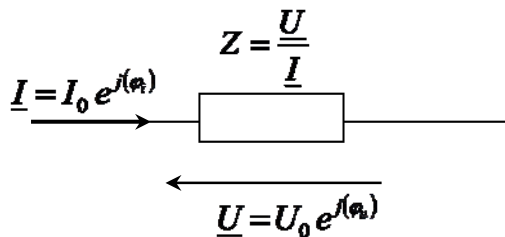
X : la réactance

Impédances complexes des dipôles élémentaires

L'impédance complexe Z est définie pour un dipôle linéaire comme étant égale au rapport de la valeur

complexe de la tension \underline{U} sur la valeur complexe du courant \underline{I} :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$



Impédance d'une résistance

nous avons : $u(t) = R i(t)$

En passant aux amplitudes complexes, nous obtenons alors : $\underline{U} = R \underline{I}$

Dans le cas d'une résistance, l'impédance complexe est égale à R : $\underline{Z}_R = R$

Impédance d'une bobine idéale

La relation entre courant et tension aux bornes d'une bobine d'inductance L est : $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

Cette relation temporelle se traduit en termes d'amplitudes complexes par : $\underline{U} = jL\omega \underline{I}$

La définition de l'impédance complexe d'un dipôle linéaire nous permet alors de poser : $\underline{Z}_L = jL\omega$

Impédance d'un condensateur

La relation entre courant et tension aux bornes d'un condensateur idéal de capacité C est :

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad . \quad \text{Nous déduisons : } \underline{U} = \frac{1}{jC\omega} \underline{I}$$

L'expression de l'impédance du condensateur s'écrit : $Z_c = \frac{1}{jC\omega}$

Lois en régime sinusoïdal

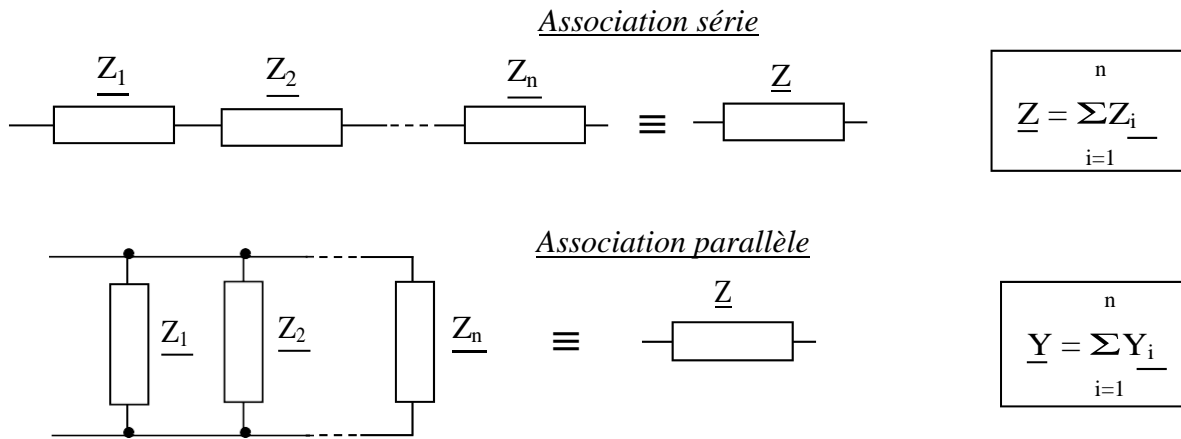
Toutes les lois vues en régime continu sont applicables aux régimes sinusoïdaux à condition de les appliquer aux valeurs instantanées ou aux valeurs complexes.

	Résistance R	Inductance L	Capacité C
Schéma			
Equation fondamentale	$u_R(t) = R i(t)$	$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$
Equation complexe	$\underline{U}_R = R \underline{I}$	$\underline{U}_L = jL\omega \underline{I}$	$\underline{U}_C = \frac{1}{jC\omega} \underline{I}$
Impédance Z (Ω)	$Z_R = R$	$Z_L = jL\omega$	$Z_C = \frac{-j}{C\omega}$
Admittance Y (S)	$Y_R = \frac{1}{R}$	$Y_L = -\frac{j}{L\omega}$	$Y_C = jC\omega$
Déphasage $\varphi \text{ (rad)} = \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$	$\varphi_R = 0$	$\varphi_L = \frac{\pi}{2}$	$\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$
Représentation de Fresnel			
	Le courant est en phase avec la tension	Le courant est en retard de $\pi/2$ sur la tension	Le courant est en avance de $\pi/2$ sur la tension
Relations de phase			

Groupement de dipôles passifs

Soit un groupement de dipôles passifs, d'impédance complexe \underline{Z} et d'admittance complexe $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$

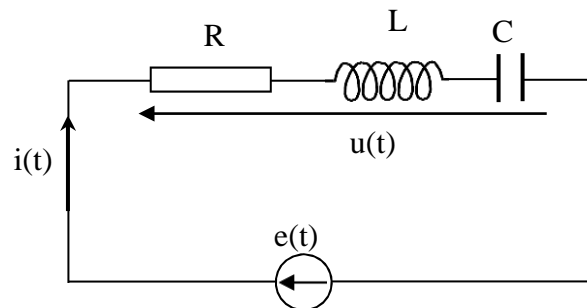
l'impédance équivalente est :



Ce qui était vrai pour l'association des résistances reste applicable à l'association des impédances.

Etude d'un circuit RLC série

On associe en série un générateur sinusoïdal délivrant une tension $e(t)$, un conducteur ohmique de résistance R , une bobine parfaite d'inductance L et un condensateur de capacité C .



Avec $e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$

$i(t) = I\sqrt{2} \cos \omega t$

$u_R = Ri$; $u_L = L \frac{di}{dt}$; $u_C = \frac{1}{C} \int i dt$

Loi des mailles : $u(t) = u_R + u_L + u_C = e(t)$

on obtient l'équation : $e = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$

On remplace $i(t)$ et $e(t)$ par leur notation complexe :

$$E = RI + jL\omega I + \frac{I}{jC\omega} = \left(R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right) I \quad \text{donc on a : } E = ZI$$

On retrouve l'impédance : $Z = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$ et son module : $Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$

Et l'argument : $\varphi = \arctan \frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}{R}$

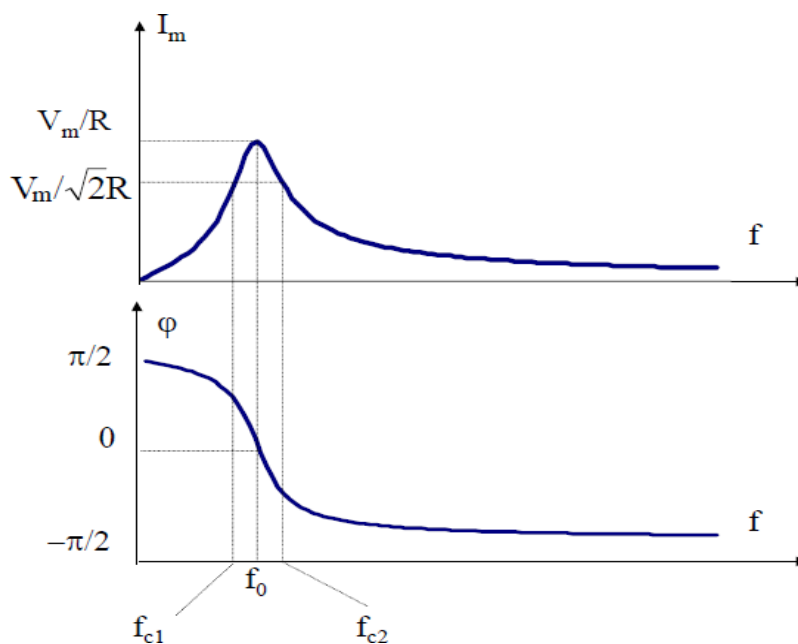
Résonance en intensité

Dans un circuit RLC série lorsque le générateur impose une pulsation $\omega = \omega_0$ (la pulsation propre) le circuit entre en résonance d'intensité, l'intensité du courant est alors maximale :

$$I = \frac{E}{Z} = \frac{E}{R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)}$$

I est maximal, lorsque le dénominateur est minimal : $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$. Donc on aura :

- Pulsation propre ω_0 : $LC\omega_0^2 = 1 \ ; \ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
- Fréquence propre f_0 : $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$
- L'impédance du circuit est minimale et réelle : $Z = R$
- Le déphasage est nul : $\varphi = 0$



- Bande passante : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$; ω_1 et ω_2 sont valeurs de ω pour lesquelles $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

La largeur de cette bande passante vaut : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$

- on exprime l'acuité à la résonance à l'aide du facteur de qualité du circuit Q :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

plus le facteur de qualité est grand et plus la résonance est aigue.

Puissance

Puissance instantanée

Soit : $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ la tension aux bornes d'un dipôle ;

$i(t) = I\sqrt{2} \cos \omega t$ l'intensité du courant qui la traverse.

La puissance reçue par ce dipôle est définie

$$p(t) = u(t) \times i(t)$$

$$p(t) = 2U I \cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi) = UI \cos \varphi + UI \cos(2\omega t + \varphi)$$

On note que la puissance est une fonction périodique de période $T/2$ par rapport à $u(t)$ et $i(t)$.

Puissance moyenne

La puissance moyenne P est définie par :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos \varphi$$

La puissance est aussi appelée puissance active en régime sinusoïdal.

La bobine parfaite ($\varphi = \frac{\pi}{2}$) et le condensateur ($\varphi = -\frac{\pi}{2}$) ne consomment pas de puissance active

$$2 \left(\quad \right) \qquad 2 \left(\quad \right)$$

donc pas d'énergie.