Chapitre 2

Réseaux électriques en régime transitoire

En pratique, entre l'instant où aucun courant ne circule et celui où, expérimentalement, on constate que le régime est continu, il existe une période où les courants et tensions évoluent avec le temps pour atteindre leur valeur définitive ; ce régime temporaire est appelé : « régime transitoire ».

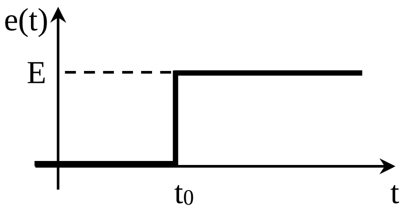
1. Echelon de tension

Soit une source de tension de force électromotrice (f.é.m.) $e(t)$ définie par :

$$e(t) = \begin{cases} 0 & pour \quad t < t_0 \\ E & pour \quad t > t_0 \end{cases}$$

avec : E constant

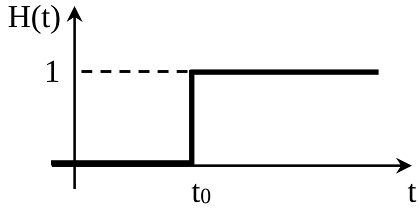
On dit qu'une telle source délivre un *échelon de tension* ; le graphe de cette f.é.m. est représenté sur la figure suivante :



La méthode la plus simple pour réaliser une telle source consiste à prendre une source de tension E continue et un interrupteur en série, que l'on ferme à $t = t_0$.

Fonction « échelon » ou de Heaviside, désignée par $H(t)$, elle est définie par :

$$H(t)=\begin{cases}0 & \forall \quad t<t_0\\ 1 & \forall \quad t>t_0\end{cases}$$

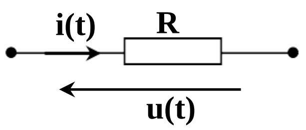
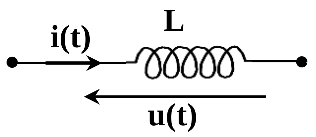
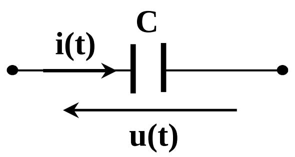
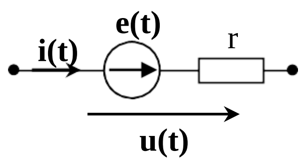


Elle permet de représenter les fonctions discontinues et constantes par morceaux. Ainsi l'échelon de tension défini au début de ce paragraphe s'écrit :

$$e(t)=E\,H(t)$$

2. Dipôles de base des circuits

La relation tension-courant d'un dipôle passif ou actif à un instant donné est une relation instantanée.

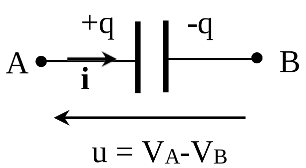
Dipôle	Symbole	Relation tension-courant
Résistance		$u(t)=R\,i(t)$
Inductance (Self)		$u(t)=L\dfrac{di}{dt}$; $i(t)=\dfrac{1}{L}\int u\,dt$
Condensateur		$i(t)=C\dfrac{du}{dt}$; $u(t)=\dfrac{1}{C}\int i\,dt$
Générateur		$u(t)=e(t)-r\,i(t)$

3. Etude d'un circuit RC

Notions de base sur les condensateurs

Un condensateur est constitué de deux surfaces conductrices séparées par un isolant (diélectrique) qui peut être de l'air sec, de l'alumine ... Les charges situées sur ces deux surfaces sont égales en valeurs absolue et de signes opposées.

Symbole :

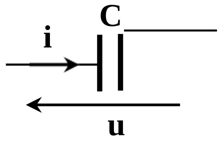


La charge **q** est reliée à la différence de potentiel $\mathbf{u_{AB}}$ par la relation : $q = u_{AB} \times C$

C : est la capacité du condensateur, elle s'exprime en Farad (F).

En utilisant la convention récepteur (**i** et **u** sont de sens opposés), on obtient la relation :

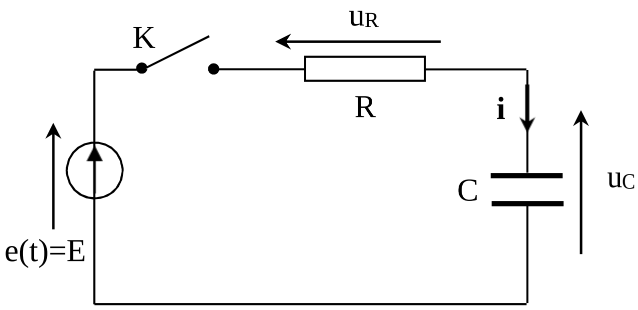
$$i(t) = C\frac{du}{dt} = \frac{dq(t)}{dt}$$



A noter, si **i** et **u** sont de même sens, alors : $\boxed{i(t) = -C\frac{du}{dt}}$

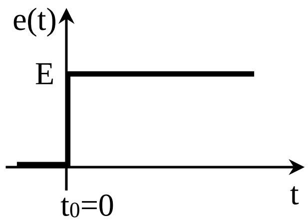
Réponse d'un circuit (d'un dipôle) RC à un échelon de tension

Un dipôle RC est l'association en série d'un condensateur de capacité C et d'un conducteur ohmique de résistance R. Le montage suivant permet d'étudier la réponse d'un circuit RC à un échelon de tension. Le condensateur est initialement déchargé.



A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K (le condensateur est initialement déchargé). Le condensateur va se charger progressivement jusqu'à ce que s'établisse à ses bornes une tension opposée à la f.é.m E.

$$\begin{cases} t < 0 : & e(t) = 0 \quad \Rightarrow u_c(t) = 0 \\ t > 0 : & e(t) = E = R\,i + u_c \end{cases}$$



Pour t > 0, la loi des mailles s'écrit :

$$E = u_R + u_C = R\,i + u_C = R\,C\frac{du_C}{dt} + u_C$$

Soit : $\frac{d\,u_C}{dt}$ $\quad \frac{E}{}$ $\frac{RC}{}$ $\frac{RC}{}$

$+ \,_C$

$=$

Pour déterminer $u_c(t)$ lorsque $t > 0$, il nous faut résoudre cette équation différentielle qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants, avec second membre. Sa solution générale est égale à la somme de la solution générale de l'équation sans second membre (dite équation homogène) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre.

Résolution de l'équation sans second membre :

$$\frac{d\,u_C}{dt} + \frac{u_C}{R\,C} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{du_c}{u_c} = -\frac{1}{RC}dt$$

Si deux expressions sont égales, leurs primitives sont égales à un constant prés :

$$\Leftrightarrow \quad \ln u_c = -\frac{1}{RC}t + const$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{[\ln u_c]} = e^{\left[-\frac{1}{RC}t + const\right]}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_c(t) = e^{-\frac{1}{RC}t} \times e^{const}$$

$$\Leftrightarrow \quad u_c(t) = A\,e^{-\frac{1}{RC}t}$$

avec A : constante à définir ultérieurement.

Solution particulière : obtenue lorsque $t \to \infty$, donc en régime permanent.

Lorsque $t \to \infty$, tous les courants et les tensions sont constants car le générateur est constant :

$$u_c = const \;\Rightarrow\; i = 0 \;\Leftrightarrow u_c(t) = E$$

Solution générale :

La solution générale est égale à la somme de la solution de l'équation sans second membre et de la solution particulière :

$$u_c(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + E$$

tel que : $\tau = RC$ constante de temps du circuit, ou temps de relaxation.

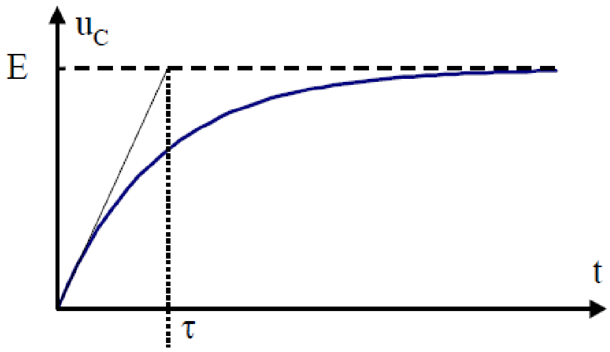
Détermination de la constante A par les conditions initiales :

La tension aux bornes du condensateur ne peut pas présenter de discontinuités :

$u_c(t=0^-) = u_c(t=0^+) = 0$, donc : $A = -E$

enfin : $$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

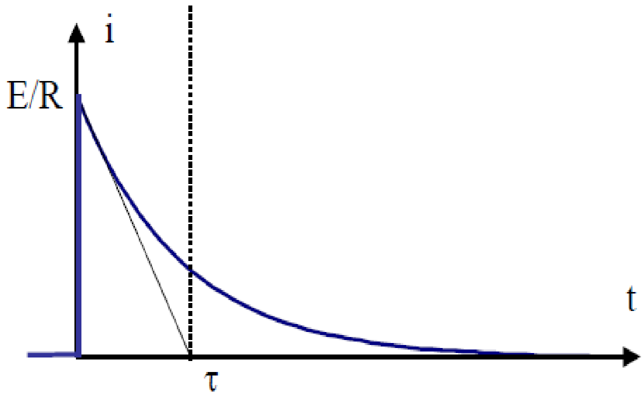
La courbe $u_c = f(t)$ est représentée comme suit :



La charge du condensateur n'est pas instantanée, c'est un phénomène transitoire.

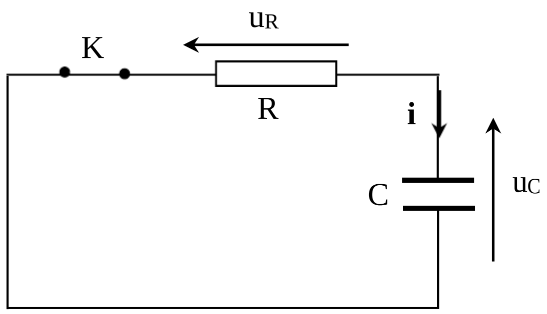
L'expression de i(t) :

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}}$$



Décharge d'un condensateur dans une résistance

Initialement le condensateur porte la charge Q_0. A l'instant t = 0 on ferme l'interrupteur K. Le condensateur se décharge alors à travers la résistance R jusqu'à annulation de sa charge. Le courant devient alors nul.



à $t=0$: $u_C = u_{C0} = E = Q_0/C$

loi des mailles :

$$u_C + u_R = 0 \quad \Rightarrow \quad u_C + Ri = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = 0$$

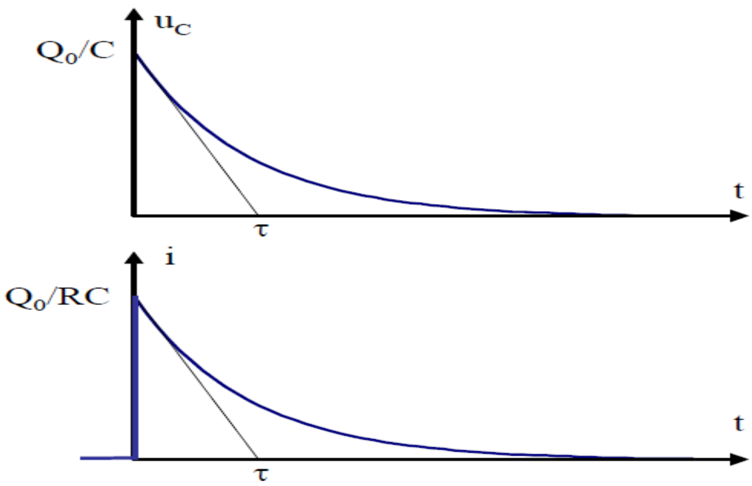
L'homogénéité de cette équation montre que RC a la dimension d'un temps. Posons v = RC.

τ est appelé constante de temps du circuit RC.

L'équation s'écrit : $$\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{\tau}=0$$

On obtient une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, sans second membre, dont la solution finale est :

$$\boxed{u_C(t)=\frac{Q_0}{C}e^{-t/\tau} \qquad et \qquad i(t)=\frac{Q_0}{RC}e^{-t/\tau}}$$



Energie électrostatique

Un condensateur emmagasine de l'énergie lors de la charge, il restitue cette énergie emmagasinée lors de la décharge. L'énergie emmagasinée par le condensateur pour t→ ∞ (c'est-à-dire en fin de charge du condensateur) a pour expression :

$$\varepsilon_C=\int P(t)\,dt=\int u(t).i(t).dt=\frac{Q^2}{C^2R}\int_0^{\infty}\exp(-2t/\tau)\,dt=\frac{E^2}{R}\int_0^{\infty}\exp(-2t/\tau)\,dt=\frac{E^2}{R}\left[\frac{\exp(-2t/\tau)}{-2/\tau}\right]_0^{\infty}$$

$$\boxed{\varepsilon_C=\frac{1}{2}CE^2=\frac{Q_0^2}{2C}}$$

4. Etudes des circuits du deuxième ordre

Equations différentielles d'un circuit

Les équations différentielles linéaires rencontrées dans l'étude des régimes transitoires possèdent la forme suivante :

$$a\frac{d^2 f}{dt^2}+b\frac{df}{dt}+cf(t)=g(t)$$

En règle générale, les paramètres a , b , c sont des nombres réels positifs. La solution d'une telle équation est :

$$f(t) = f_1(t)+ f_2(t)$$

$\rightarrow$où $f_1(t)$ représente la solution de l'équation sans second membre :

$$a\frac{d^2 f}{dt^2}+b\frac{df}{dt}+cf(t)=0$$

On recherche $f_1(t)$ en calculant les racines de l'équation caractéristique de l'équation différentielle sans second membre :

$$ar^2+br+c=0$$

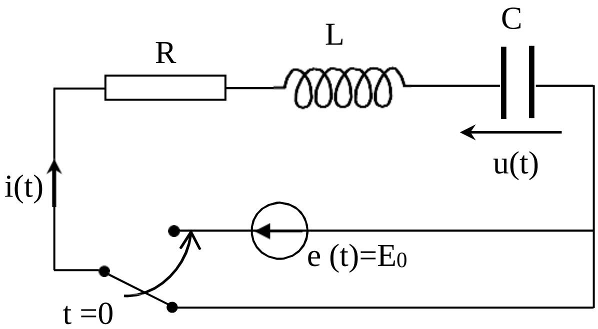
$\rightarrow f_2(t)$ est la solution particulière de l'équation différentielle avec second membre.

$f_1(t)$ est la composante de $f(t)$ qui correspond au régime ***propre*** (ou ***libre***) du circuit. $f_2(t)$ correspond au régime dit ***forcé***.

Réponse d'un circuit RLC à un échelon de tension

A titre d'exemple étudions la charge d'un condensateur dans un circuit RLC. Considérons le montage suivant, supposé initialement au repos :

A l'instant t = 0, nous basculons l'interrupteur.



L'équation de maille : $$e(t)=Ri(t)+L\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{C}\int i\,dt \qquad (*)$$

Puisque nous cherchons $u(t)$, exprimons $i(t)$ en fonction de $u(t)$: $i(t)=C\frac{du}{dt}$

L'équation différentielle (*) devient alors :

$$LC\frac{d^2u}{dt^2}+RC\frac{du}{dt}+u(t)=e(t)=E_0$$

Cette équation est de la forme :

$$\boxed{\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{2\lambda}{\omega_0}\frac{du}{dt}+u(t)=E}$$

Avec $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ $\quad et \quad$ $\lambda=\dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$

La solution générale de cette équation différentielle peut être calculée comme suit :

→ On écrit l'équation caractéristique de l'équation différentielle sans second membre :

$$ar^2+br+c=0 \qquad \Rightarrow \qquad LC\,r^2+RC\,r+1=0$$

Le discriminant de cette équation est : $\quad \Delta=b^2-4ac=(RC)^2-4LC$

⇒si $\Delta>0 \quad (\lambda>1)$, le **régime sera amorti (apériodique)**. Alors l'équation caractéristique à deux racines réelles et l'expression de $u(t)$ est :

$$u(t)=E_0+Ae^{r_1 t}+Be^{r_2 t}$$

Avec : $\begin{cases} r_1=\omega_0\left(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}\right) \\ r_2=\omega_0\left(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}\right) \end{cases}$

Les constantes A et B se déterminent à l'aide des conditions initiales : à t=0, on a $u(0^-)=0 \quad et \quad i(0)=0$.

D'où l'expression de la tension $u(t)$:

$$\boxed{u(t)=E_0+E_0\left(\frac{-\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}}{2\sqrt{\lambda^2-1}}\right)e^{\omega_0\left(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}\right)t}-E_0\left(\frac{-\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}}{2\sqrt{\lambda^2-1}}\right)e^{\omega_0\left(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}\right)t}}$$

⇒si $\Delta<0 \quad (\lambda<1)$, le circuit fonctionne en **régime oscillatoire amorti (pseudo-périodique)** qui correspond à une allure sinusoïdale modulée par un terme exponentiel d'amortissement.

L'expression de la solution générale est :

$$u(t)=E_0+e^{-\lambda\omega_0 t}\left(A\cos\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}\,t+B\sin\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}\,t\right)$$

Avec : $\begin{cases} r_1=\omega_0\left(-\lambda+j\sqrt{1-\lambda^2}\right) \\ r_2=\omega_0\left(-\lambda-j\sqrt{1-\lambda^2}\right) \end{cases}$

Les constantes A et B se déterminent à l'aide des conditions initiales : à t=0, on a $u(0^-)=0 \quad et \quad i(0)=0$. D'où l'expression de la tension :

$$\boxed{u(t)=E_0-E_0 e^{-\lambda\omega_0 t}\left(\cos\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}\,t+\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\sin\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}\,t\right)}$$

$\Rightarrow$ si $\Delta=0 \quad (\lambda=1)$, le circuit fonctionne en **régime critique** qui est le cas limite entres les régimes apériodique et oscillatoire :

$$u(t)=E_0+(At+B)e^{-\omega_0 t}$$

Les constantes A et B se déterminent grâce aux conditions initiales $u(0^-)=0 \quad et \quad i(0)=0$. Donc :

$$\boxed{u(t)=E_0-E_0(\omega_0 t+1)e^{-\omega_0 t}}$$

La courbe ci-contre donne l'évolution de la tension u (t) pour les différents régimes :