

TD N°1 : Résolution des équations aux dérivées partielles paraboliques

Exercice N°1 :

On étudie l'évolution de la température à l'intérieur d'un mur ou d'une tige isolée où l'on maintient les limites à 0°C

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1$$

Avec comme condition initiale : $T(x, 0) = 2x$ pour $0 \leq x \leq 1/2$

$$T(x, 0) = 2(1 - x) \quad \text{pour } 1/2 \leq x \leq 1$$

Et aux limites du type Dirichlet : $T(0, t) = 0$ et $T(1, t) = 0$

Déterminer les températures au temps $t = 0.05 \text{ s}$ avec $\Delta x = 0.1$. Utiliser les différentes méthodes exposées au cours.

Exercice N°2 :

Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ satisfaisant la condition initiale $u(x, 0) = 1$ pour $0 \leq x \leq 1$ et les conditions aux limites du type Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u \quad \text{en } x = 0 \quad \forall t$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -u \quad \text{en } x = 1 \quad \forall t$$

En utilisant la méthode explicite et en approchant les conditions aux limites par des différences centrées.

On prend : $\Delta x = 0.1$ et $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 1/4$.

Exercice N°3 :

La fonction u satisfait l'équation : $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pour $0 \leq x \leq 1$ et les conditions aux limites :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = h_1(u - V_1) \quad \text{en } x = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -h_2(u - V_2) \quad \text{en } x = 1 ;$$

Où h_1, h_2, V_1, V_2 sont les constantes positives.

Montrer que lorsque les conditions aux limites sont approchées par les différences à droite en $x = 0$ et les différences à gauche en $x = 1$, le schéma explicite est :

$$u_{1,j+1} = \left[1 - 2\lambda + \frac{\lambda}{(1 + h_1\Delta x)} \right] u_{1,j} + \lambda u_{2,j} + \frac{\lambda h_1 V_1 \Delta x}{(1 + h_1\Delta x)}$$

$$u_{0,j+1} = (u_{1,j+1} + h_1 V_1 \Delta x) / (1 + h_1 \Delta x)$$

$$u_{i,j+1} = \lambda u_{i-1,j} + (1 - 2\lambda)u_{i,j} + \lambda u_{i+1,j}$$

Pour $(i = 2, 3, \dots, n - 2)$

$$u_{n-1,j+1} = \left[1 - 2\lambda + \frac{\lambda}{(1 + h_2 \Delta x)} \right] u_{n-1,j} + \lambda u_{n-2,j} + \frac{\lambda h_2 V_2 \Delta x}{(1 + h_2 \Delta x)}$$

$$u_{n,j+1} = (u_{n-1,j+1} + h_2 V_2 \Delta x) / (1 + h_2 \Delta x)$$

On donne $\lambda = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

Exercice N°4 :

La fonction V satisfait l'équation non linéaire : $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2$ pour $(0 < x < 1, t > 0)$

La condition initiale est $V = 0$ quand $t = 0$; $0 < x < 1$ et les conditions aux limites :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 1 \quad \text{en} \quad x = 0 \quad \text{lorsque} \quad t > 0$$

$$V = 0 \quad \text{en} \quad x = 1 \quad \text{lorsque} \quad t > 0$$

Montrer que le changement de variable dépendante défini par : $V = \text{Log} U$; $U \neq 0$ transforme le problème à la résolution de l'équation :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad 0 < x < 1; \quad t > 0 \quad \text{où} \quad U \text{ satisfait les conditions}$$

$$U = 1 \quad \text{quand} \quad t = 0; \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = U \quad \text{en} \quad x = 0; \quad t > 0$$

$$U = 1 \quad \text{en} \quad x = 1; \quad t > 0$$

En utilisant un maillage rectangulaire défini par : $\Delta x = 0.1$ et $\Delta t = 0.0025$; approcher l'équation pour U par le schéma explicite (les dérivées des conditions aux limites étant approchées par une formule de différences centrées).

En déduire une solution numérique pour V aux points $(0, 0.005)$ et $(0, 0.0075)$ dans le plan (x, t) .

TD N°2 : Résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques

Exercice N°1 :

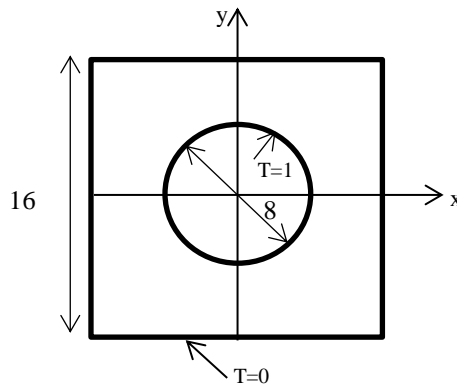
Résoudre l'équation de Laplace pour la conduction stationnaire dans le domaine carré et avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0,y} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial x} + hT \Big|_{x=1,y} = 0 \\ T \Big|_{x,y=0} = 1 \\ \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{x,y=1} = 0 \end{cases}$$

On utilise : $\Delta x = 0.25$; $\Delta y = 0.20$; $h = 0.5$

Exercice N°2 :

Trouver le champ de température pour un domaine carré avec un trou circulaire au centre avec les conditions aux limites montrées sur la figure:



Exercice N°3 :

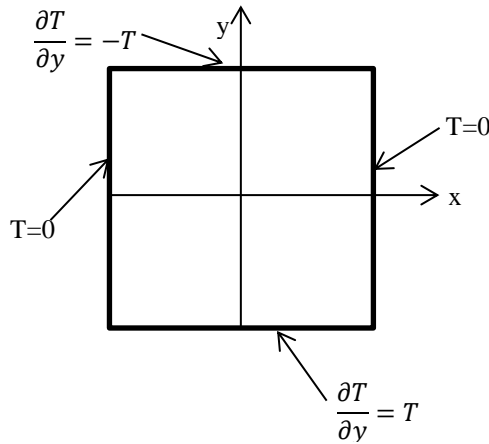
Le courant dans un enroulement électrique donne naissance à une production interne de chaleur qui est dissipée par rayonnement à travers les frontières. La distribution de température stationnaire dans un enroulement ayant une section rectangulaire peut donc être approchée par la solution de l'équation de la conduction stationnaire à travers un rectangle, avec une production interne de la chaleur et rayonnement de son périmètre vers le milieu qui l'entoure.

A cause du fait que la conductivité thermique κ parallèlement à Ox diffère de sa valeur λ_κ parallèlement à Oy, l'équation de la température T est :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{q}{\kappa}$$

Où q est le nombre d'unités de chaleur généré par unité de surface par seconde.

Résoudre cette équation dans le cas où : $\lambda = 3$ et $\frac{q}{\kappa} = 16$ et avec les conditions aux limites montrées sur la figure. La section est un carré de côté 2. Prendre $\Delta x = \frac{1}{4} = \Delta y$.



Exercice N°4 :

Les contraintes de cisaillement et les déplacements des points dans un long cylindre uniforme en torsion peuvent être calculés de la fonction des contraintes ϕ qui est constante autour du périmètre C d'une section droite dans le plan XOY et qui satisfait l'équation :

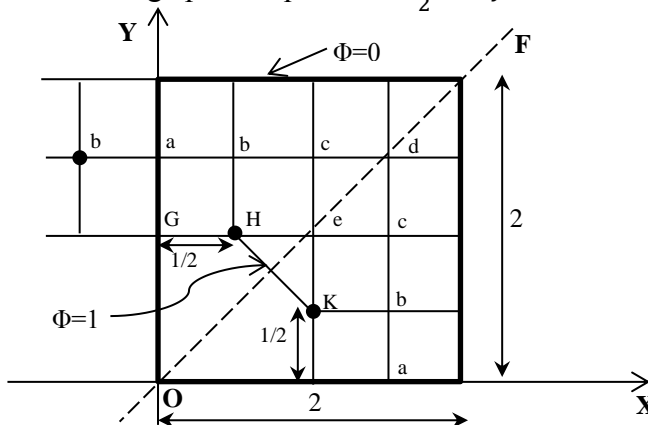
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} + 2 = 0$$

En chaque point $P(x, y)$ de la section.

Le problème peut être écrit sous forme adimensionnelle en mettant $x = X/L$, $y = Y/L$ et $\phi = \Phi/L^2$ où L est une longueur représentative quelconque. Ce qui donne l'équation adimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2 = 0$$

Pour un cylindre dont la section et les conditions aux limites sont montrés sur la figure ci-dessous, calculer la valeur de ϕ aux nœuds d'un maillage pour lequel $\Delta x = \frac{1}{2} = \Delta y$



TD N°3 : Résolution des équations aux dérivées partielles hyperboliques

Exercice N°1 :

La fonction u satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

et les conditions aux limites $u = 0$ en $x = 0$ et $x = 1$; $t \geq 0$ et les conditions initiales $u = \frac{1}{8} \sin \pi x$; $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ quand $t = 0$.

Utiliser la méthode explicite et une approximation centrée de la condition initiale portant sur la dérivée, pour calculer la solution en $x = 0$ (0.1) 1 et $t = 0$ (0.1) 0.5

Remarque : 0.1 est le pas

Exercice N°2 :

Le déplacement transversal U d'un point à une distance X de l'extrémité d'une corde vibrante de longueur L au temps T satisfait l'équation :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} = C^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$$

Montrer que cette équation peut être réduite en la forme adimensionnelle :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

$0 \leq x \leq 1$, en mettant $x = \frac{X}{L}$; $u = \frac{U}{L}$ et $t = C \frac{T}{L}$.

La solution de l'équation (1) satisfait les conditions aux limites $u = 0$ en $x = 0$ et $x = 1$; $t \geq 0$ et les conditions initiales $u = \frac{1}{2} x(1-x)$ et $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ pour $t = 0$; $0 \leq x \leq 1$

Utiliser la méthode explicite après réduction en un système du 1^{er} ordre pour trouver les déplacements aux temps $t = 0.3$ avec $\Delta x = 0.1$

Exercice N°3 :

La fonction U satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 4x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

Et les conditions initiales

$$U = x^2 ; \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \text{ pour } y = 0, -\infty < x < \infty$$

Montrer que les fonctions p et q satisfont les équations suivantes le long des courbes caractéristiques de pentes $2x$ et $-2x$ sont :
$$\begin{cases} dp - 2xdq = 0 \\ dp + 2xdq = 0 \end{cases}$$

La courbe caractéristique ayant une pente positive passant à travers le point $A(0.3, 0)$; rencontre la courbe caractéristique ayant une pente négative passant par le point $B = (0.4, 0)$ en R . Trouver une approximation de la solution en R ; $[U(R)]$.

Exercice N°4 :

La fonction U satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial U}{\partial x} - U \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - U \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + x = 0$$

Et satisfait les conditions initiales

$$U = 1 + x^2 ; \frac{\partial U}{\partial y} = 1 \text{ pour } y = 0, -\infty < x < \infty$$

Trouver les équations des courbes caractéristiques et la relation entre p et q le long de ces courbes.

La courbe caractéristique ayant une pente positive passant à travers le point $A(0.5, 0)$; rencontre la courbe caractéristique ayant une pente négative passant par le point $B = (0.6, 0)$ en $R(x_R, y_R)$.

1. Calculer les coordonnées de R
2. Trouver des approximations de p et q en R
3. Expliquer comment calculer la valeur de U en R
4. Etant donné les valeurs suivantes de p ; q ; U en R à l'itération 1

$$U_R^{(1)} = 1.3711$$

$$p_R^{(1)} = 1.1009$$

$$q_R^{(1)} = 1.1038$$

Calculer : $x_R^{(2)}$ et $y_R^{(2)}$