Chapitre 3 : Résolution des équations aux dérivées partielles

1. Introduction :

Un problème aux dérivées partielles nécessite la donnée :

- Un domaine D ;
- Une équation aux dérivées partielles (E.D.P) ;
- Des conditions aux limites (pour tous les problèmes) ;
- Une condition initiale (pour les problèmes d'évolution).

Pour obtenir une approximation numérique de la solution de ce problème, nous devons approcher les dérivées partielles de l'E.D.P en chaque nœud du domaine discrétisé (maillage) en utilisant les valeurs de la variable dépendante en ce nœud et aux nœuds avoisinants.

2. Discrétisation du domaine :

Les calculs par différences finies sont effectués suivant un maillage obtenu par un double réseau de parallèles aux axes et régulièrement espacés. L'intersection de deux droites du maillage définit un nœud M de coordonnées (x_M, y_M).

Si les parallèles à l'axe sont espacées de $\Delta x = h$ et les parallèles à l'axe y de $\Delta y = k$, le nœud a comme coordonnées :

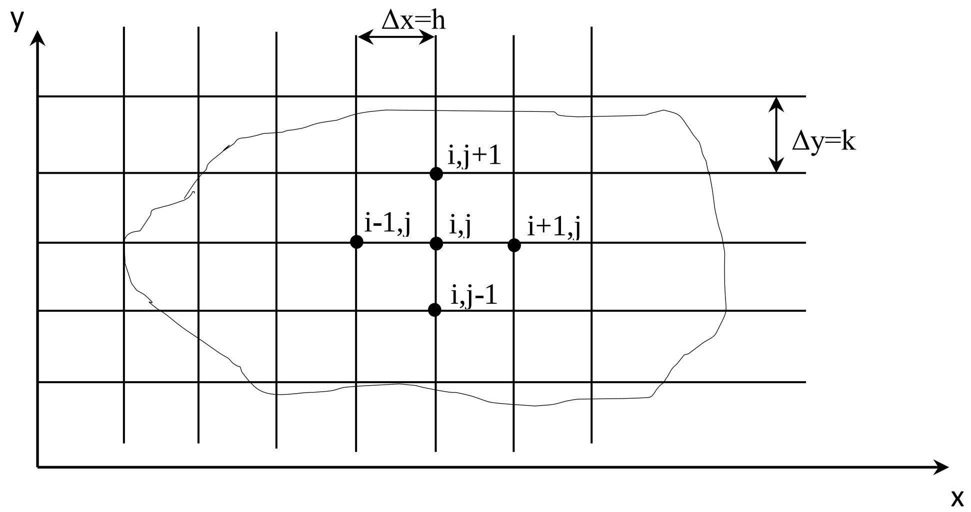
$$x_M = i\Delta x = ih$$

Et

$$y_M = j\Delta y = jk$$

Ou d'une manière condensée (i, j).

Ainsi la fonction $f(x, y)$ prend au point $M(x_M, y_M)$ la valeur $f(i\Delta x, j\Delta y) = f(ih, jk) = f_{i,j}$



Maillage

3. Méthodes de résolution des E.D.P paraboliques

Il existe essentiellement trois méthodes de base pour la résolution de telles équations :

- Méthodes explicites ;
- Méthodes implicites ;
- Méthodes mixtes (type Crank-Nicholson).

Nous exposons chacune d'elles en prenant l'E.D.P générale de type parabolique :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = A(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B(x)\frac{\partial f}{\partial x} + C(x).f(x) + D(x) \qquad \textbf{(1)}$$

$$\left.\begin{aligned} f(x=a,t) &= f_a(t) \\ f(x=b,t) &= f_b(t) \end{aligned}\right\} \qquad \text{Conditions aux limites type Dirichlet}$$

$$f(x, t=0) = f_0(t) \qquad \text{Condition initiale}$$

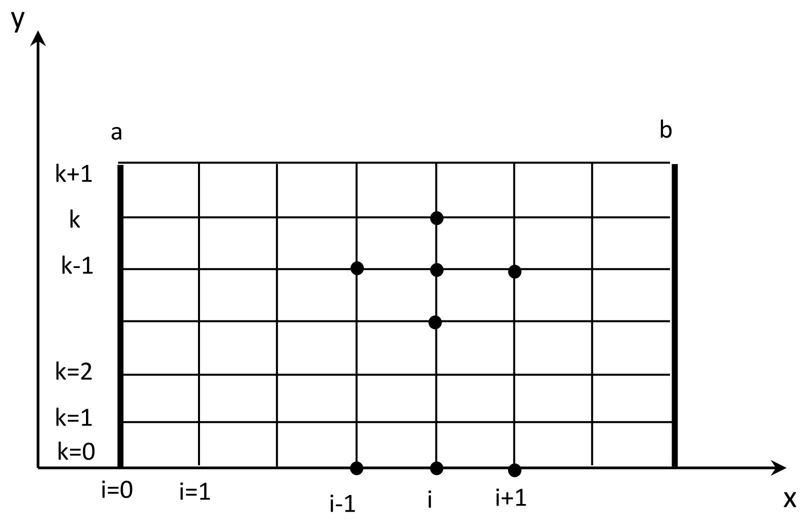
f est une fonction à deux variables (x, t) .

Afin de résoudre l'équation (1) ; nous divisons l'intervalle $[a, b]$ en $(n+1)$ intervalles Δx par les points :

$$x_0 = a \;\; ; \quad x_1 = \Delta x \, ; \quad x_2 = 2\Delta x \;\; ; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; x_n = n\Delta x \;\; ; \;\; x_{n+1} = b$$

Nous choisissons de même un pas de temps Δt .

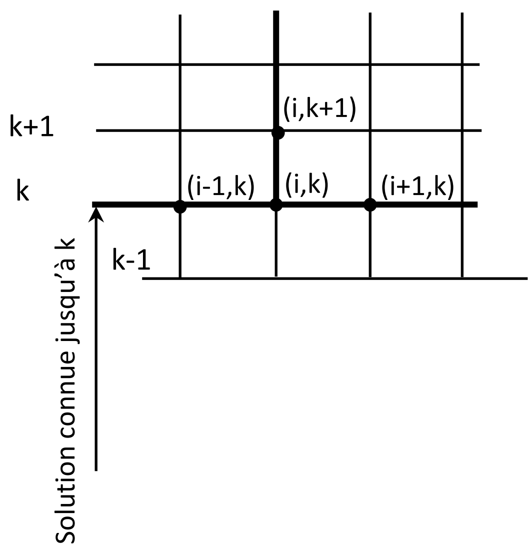
Le maillage est représenté sur la figure suivante :



On doit déterminer la fonction f aux nœuds internes du maillage.

3.1. Méthodes explicite de résolution

On considère un cas quelconque :



On utilise les nœuds connus $[(i-1,k);(i,k);(i+1,k)]$ soit par la condition initiale, soit par les calculs précédents.

- Si l'indice $\boldsymbol{i}$ repère la variable $\boldsymbol{x}$ et l'indice $\boldsymbol{k}$ repère la variable , l'équation **(1)** <u>discrétisée</u> peut s'écrire en utilisant les différences centrées sur $\boldsymbol{x}$ et les différences à droite sur $\boldsymbol{t}$**.**

$$Premier\ membre|_{i,k} = Deuxième\ membre|_{i,k}$$

$$\frac{f_{i,k+1}-f_{i,k}}{\Delta t}=A_i\frac{f_{i+1,k}-2f_{i,k}+f_{i-1,k}}{(\Delta x)^2}+B_i\frac{f_{i+1,k}-f_{i-1,k}}{2\Delta x}+C_if_{i,k}+D_i$$

Ce qui donne :

$$\boxed{f_{i,k+1}=\left[\frac{A_i\Delta t}{(\Delta x)^2}-\frac{B_i\Delta t}{2\Delta x}\right]f_{i-1,k}+\left[1-\frac{2A_i\Delta t}{(\Delta x)^2}+C_i\Delta t\right]f_{i,k}+\left[\frac{A_i\Delta t}{(\Delta x)^2}+\frac{B_i\Delta t}{2\Delta x}\right]f_{i+1,k}+D_i\Delta t} \qquad \textbf{(2)}$$

On obtient f_i à l'instant $(k+1)$ comme combinaison de f_{i-1} ; f_i ; f_{i+1} à l'instant (k).

On continue ainsi jusqu'à $t=M.\Delta t$

La méthode s'applique sans aucune modification de principe aux équations dont les coefficients A, B, C, D dépendent non seulement de x mais aussi de t et f ainsi qu'aux fonctions de plusieurs variables d'espace.

L'inconvénient principal de la méthode explicite est qu'elle nécessite de choisir $\underline{\boldsymbol{\Delta t}}$ suffisamment **petit**, si non la solution de l'équation **(2)** devient instable.

La solution est dite stable (convergente) si :

$$\Delta t\to 0\,; \qquad f_{calculée}\to f_{exacte}$$

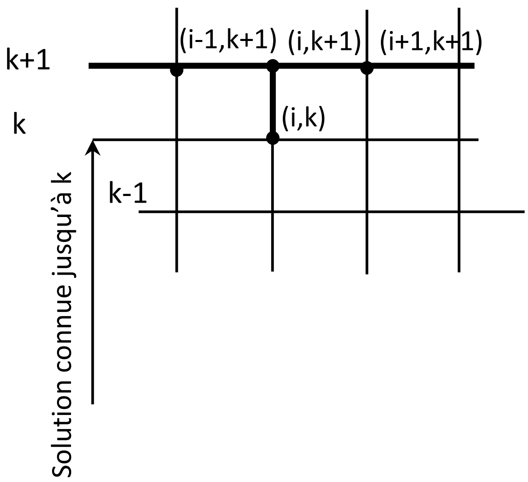
Il faut que le coefficient de $f_{i,k}$ soit positif.

$$\left[1-\frac{2A_i\Delta t}{(\Delta x)^2}+C_i\Delta t\right]\geq 0\leftrightarrow\left(\frac{2A_i}{(\Delta x)^2}-C_i\right)\Delta t\leq 1$$

On choisit Δx et d'après cette condition on calcule Δt. A cause de ce risque d'instabilité, il est préférable lorsque cela est possible d'utiliser l'une des méthodes suivantes :

3.2. Méthodes implicite de résolution

On obtient une équation implicite en écrivant le second membre de l'équation **(1)** à l'instant t_{k+1} ou la solution n'est pas connue, ce qui donne :



$$Premier\ membre|_{i,k+1} = Deuxième\ membre|_{i,k+1}$$

Par les différences à gauche

$$\frac{f_{i,k+1} - f_{i,k}}{\Delta t} = A_i \frac{f_{i+1,k+1} - 2f_{i,k+1} + f_{i-1,k+1}}{(\Delta x)^2} + B_i \frac{f_{i+1,k+1} - f_{i-1,k+1}}{2\Delta x} + C_i f_{i,k+1} + D_i$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\underbrace{\left[\frac{A_i}{(\Delta x)^2} - \frac{B_i}{2\Delta x}\right]}_{\alpha_i} f_{i-1,k+1} - \underbrace{\left[\frac{1}{\Delta t} + \frac{2A_i}{(\Delta x)^2} - C_i\right]}_{\beta_i} f_{i,k+1} + \underbrace{\left[\frac{A_i}{(\Delta x)^2} + \frac{B_i}{2\Delta x}\right]}_{\gamma_i} f_{i+1,k+1} = -\underbrace{\left[\frac{f_{i,k}}{\Delta t} + D_i\right]}_{K_i}}$$

(3)

$$\alpha_i f_{i-1,k+1} + \beta_i f_{i,k+1} + \gamma_i f_{i+1,k+1} = K_i$$

La discrétisation $k = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 f_{0,1} + \beta_1 f_{1,1} + \gamma_1 f_{2,1} = K_1 & noeud\ (1,1) \\ \alpha_2 f_{1,1} + \beta_2 f_{2,1} + \gamma_2 f_{3,1} = K_2 & noeud\ (2,1) \\ \alpha_3 f_{2,1} + \beta_3 f_{3,1} + \gamma_3 f_{4,1} = K_3 & noeud\ (3,1) \\ \\ \alpha_n f_{n-1,1} + \beta_n f_{n,1} + \gamma_n f_{n+1,1} = K_n & noeud\ (n,1) \end{cases}$$

On obtient un système d'équation linéaire qui relie les frontières $f_{0,1}$; $f_{1,1}$; $f_{2,1}$; ……….$f_{n+1,1}$.

On a ***(n+2)*** inconnus mais nous avons ***n*** équations, on remplace donc $f_{0,1}$, $f_{n+1,1}$ par leur valeurs des conditions aux limites, alors on aura un système de ***n*** équations à ***n*** inconnus.

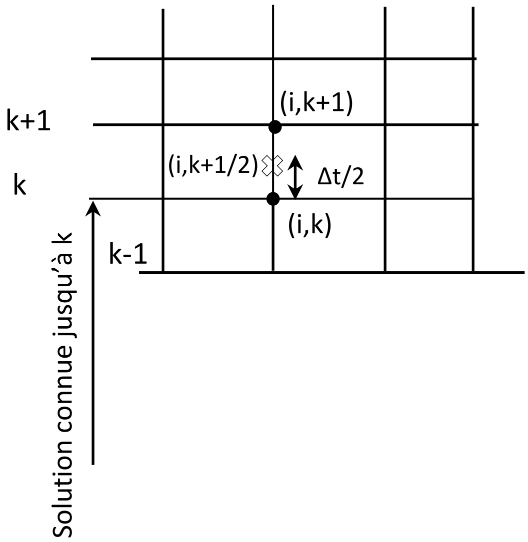
- On obtient f_i comme à l'instant (k) comme combinaison linéaire des f_{i-1} ; f_i ; f_{i+1} inconnues à l'instant $(k + 1)$.
- L'équation obtenue peut s'appliquer en chaque point aux temps $(k + 1)$. On obtient ainsi un système d'équations linéaires dont la résolution nous donne les valeurs de f au temps $(k + 1)$.
- On procède de la même manière pour avoir les valeurs de f au temps $(k + 2)$; $(k + 3)$……
- Un avantage essentiel de cette méthode est qu'elle est **universellement stable**.

3.3. Méthodes du type Crank-Nicholson

Dans la méthode explicite, le second membre de l'équation **(1)** est écrit à l'instant ***(k).***

Dans la méthode implicite, le second membre est écrit à l'instant ***(k+1)***.

La méthode de Crank-Nicholson consiste à écrire le 1er et le 2ème membre au temps $(\boldsymbol{k}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$**.** Le premier membre est approché par les différences centrées et le second est exprimé comme la demi somme du second membre des méthodes implicite et explicite, on obtient alors :



$$Premier\ membre|_{i,k+1/2} = Deuxième\ membre|_{i,k+1/2}$$

$$\frac{f_{i,k+1}-f_{i,k}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\overbrace{S.M_{i,k+1}}^{Second\ Membre} + \overbrace{S.M_{i,k}}^{Second\ Membre}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{A_i}{(\Delta x)^2}\left(f_{i-1,k+1} - 2f_{i,k+1} + f_{i+1,k+1}\right) + \frac{B_i}{2\Delta x}\left(f_{i+1,k+1} - f_{i-1,k+1}\right) + C_i f_{i,k+1} + D_i\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{A_i}{(\Delta x)^2}\left(f_{i-1,k} - 2f_{i,k} + f_{i+1,k}\right) + \frac{B_i}{2\Delta x}\left(f_{i+1,k} - f_{i-1,k}\right) + C_i f_{i,k} + D_i\right]$$

(4)

Le second crochet de l'équation **(4)** étant connu, on voit que l'équation **(4)** est en fait une équation implicite, qui se traite exactement comme il a été indiqué au paragraphe précédent.

- L'avantage principal de ce schéma est que pour une valeur donnée de Δx, l'erreur de troncature sur le terme en Δt est nettement plus petit que dans les méthodes implicite et explicite.
- La méthode de Crank-Nicholson est inconditionnellement stable et converge quel que soit $\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

4. Méthodes de résolution des E.D.P elliptiques

4.1. Expression à l'aide des différences finies

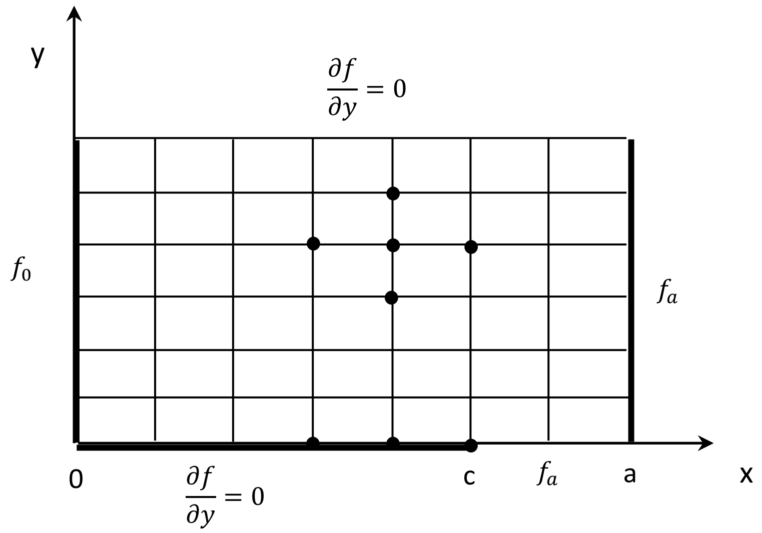
La mise en équation à l'aide des différences finies comporte les étapes suivantes :

- Définir un maillage couvrant le domaine et sa frontière ;
- En tout nœud intérieur au domaine, exprimer les dérivées à l'aide des différences finies. ces termes contiennent des points situés sur la frontière ;
- Exprimer les valeurs de la fonction en tout point sur la frontière en tenant compte des conditions aux limites. On obtient alors un système de ***n*** équations à ***n*** inconnus dont on résout par l'une des techniques de résolution.

Exemple :

Déterminer la fonction $f(x,y)$ dans le domaine rectangulaire $(0 \le x \le a, 0 \le y \le b)$. f satisfait l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} f(x=0,y) = f_0 & \\ f(x=a,y) = f_a & \\ f(c \le x \le a, y=0) = f_a & \quad Dirichlet \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x \le c, y=0) = 0 & \quad Neumann \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y=b) = 0 & \end{cases}$$



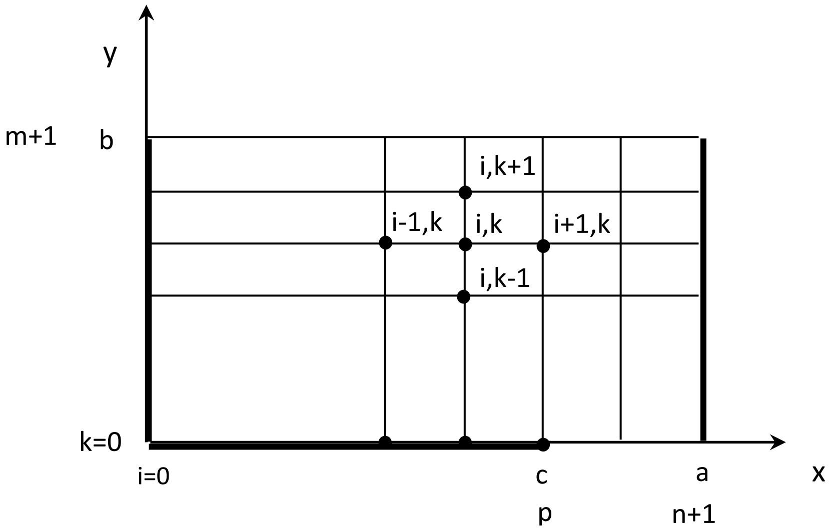
Problème elliptique

- On définit un maillage qui coïncide avec les frontières du domaine ;

- On choisit $(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1})$ pas sur $\boldsymbol{x}$ de valeur $\Delta \boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}}$. Choisissons $\Delta \boldsymbol{x}$ sous multiple de $\boldsymbol{a}$ et de $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$ de façon que $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ corresponde au p$^{\text{ième}}$ pas sur $\boldsymbol{x}$ **.** On choisit le maillage de telle façon que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{c_1}\Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}\,; \\ \boldsymbol{c_2}\Delta \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}) \end{cases}$$

Ce qui veut dire une ligne du maillage qui passe par le point $\boldsymbol{c}$. Si on trouve une discontinuité des limites, on procède de la même manière.



Maillage

- On choisit $(\boldsymbol{m}+\boldsymbol{1})$ pas sur $\boldsymbol{y}$ de valeur $\Delta \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{1}}$. Choisissons $\Delta \boldsymbol{x}$ sous multiple de $\boldsymbol{a}$ et de $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$ de façon que $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ corresponde au p$^{\text{ième}}$ pas sur $\boldsymbol{x}$ **;**
- En chaque nœud interne $(1 \le i \le n; 1 \le k \le m)$, on exprime l'équation aux D.P de Laplace à l'aide des différences finies (différences centrées), ce qui donne :

$$\boxed{\frac{f_{i+1,k} - 2f_{i,k} + f_{i-1,k}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i,k+1} - 2f_{i,k} + f_{i,k-1}}{\Delta y^2} = 0}$$

L'équation obtenue fait intervenir les points à la frontière $(i=0; i=n+1; k=0; k=m+1)$.

Remarque : Lorsque

$$\begin{cases} i = n, & \text{il faut intervenir les valeurs} \quad f_{n+1,k} \\ k = m, & /\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/ \quad f_{i,m+1} \\ i = 1, & /\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/ \quad f_{0,k} \\ k = 1, & /\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/\!/ \quad f_{i,0} \end{cases}$$

- Il faut maintenant exprimer les conditions aux limites, elle porte sur $i = 1; i = n; k = 1; k = m$.

$$\boxed{f_{0,k} = f_0}$$

$$\boxed{f_{n+1,k} = f_a}$$

- **On approche les conditions aux limites :**

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,0} = 0 \qquad (i < p)$$

Par les différences à droite d'ordre 2 en h

$$\frac{-3f_{i,0} + 4f_{i,1} - f_{i,2}}{2\Delta y} = 0$$

On tire $\boxed{f_{i,0} = \frac{4}{3}f_{i,1} - \frac{1}{3}f_{i,2}}$

Pour $\quad i \geq p, \qquad \boxed{f_{i,0} = f_a}$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{i,m+1} = 0$$

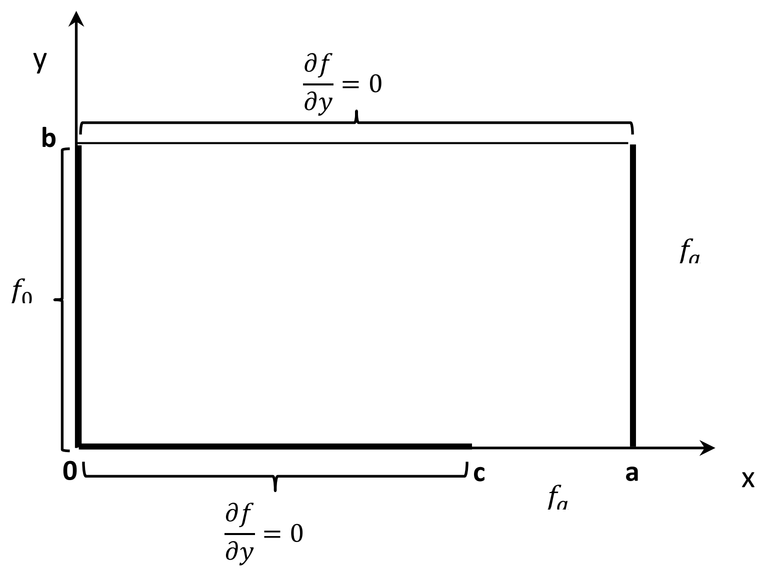
Par les différences à gauche d'ordre 2 en h

$$\frac{3f_{i,m+1} - 4f_{i,m} + f_{i,m-1}}{2\Delta y} = 0$$

On tire $\quad \boxed{f_{i,m+1} = \frac{4}{3}f_{i,m} - \frac{1}{3}f_{i,m-1}}$

Récapitulatif

$$\begin{cases} \dfrac{f_{i+1,k}-2f_{i,k}+f_{i-1,k}}{\Delta x^2}+\dfrac{f_{i,k+1}-2f_{i,k}+f_{i,k-1}}{\Delta y^2}=0 \\ f_{0,k}=f_0 \\ f_{n+1,k}=f_a \\ i<p \qquad f_{i,0}=\dfrac{4}{3}f_{i,1}-\dfrac{1}{3}f_{i,2} \\ i\geq p \qquad f_{i,0}=f_a \\ f_{i,m+1}=\dfrac{4}{3}f_{i,m}-\dfrac{1}{3}f_{i,m-1} \end{cases}$$



<u>Nœud (1,1) : $i=1, k=1$</u>

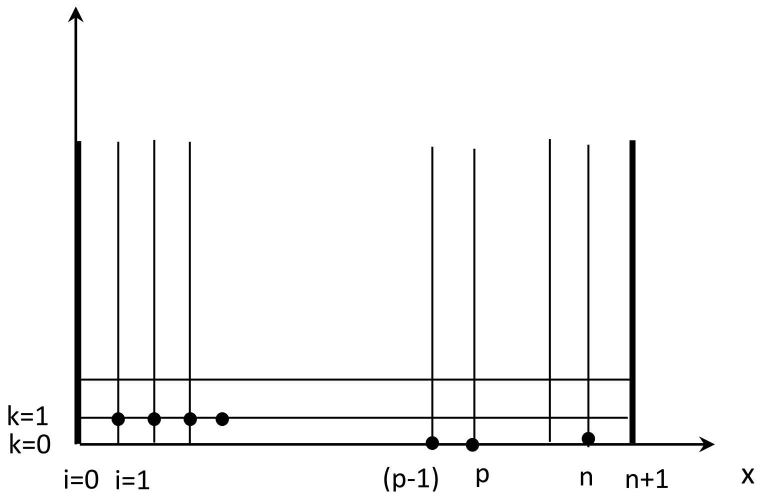
$$\frac{1}{\Delta x^2}\left[f_{0,1}-2f_{1,1}+f_{2,1}\right]+\frac{1}{\Delta y^2}\left[f_{1,0}-2f_{1,1}+f_{1,2}\right]=0$$

$f_{0,1}$ et $f_{1,0}$ sont tirées des conditions aux limites.

$$\begin{cases} f_{0,1}=f_0 \\ f_{1,0}=\dfrac{4}{3}f_{1,1}-\dfrac{1}{3}f_{1,2} \end{cases}$$

On remplace dans l'équation, on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{\Delta x^2}\left[-2f_{1,1}+f_{2,1}\right]-\frac{2}{3(\Delta y)^2}\left[f_{1,1}-f_{1,2}\right]=-\frac{1}{\Delta x^2}f_0}$$



Pour $x < c$

$$\text{Pour}\begin{cases} i=2\,, & k=1\\ \quad\vdots & \\ i=p-1\,, & k=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta x^2}\left[f_{i+1,1}-2f_{i,1}+f_{i-1,1}\right]+\dfrac{1}{\Delta y^2}\left[f_{i,2}-2f_{i,1}+f_{i,0}\right]=0\\ f_{i,0}=\dfrac{4}{3}f_{i,1}-\dfrac{1}{3}f_{i,2}\end{cases}$$

On remplace $f_{i,0}$ on obtient l'équation :

$$\boxed{\frac{1}{\Delta x^2}\left[f_{i+1,1}-2f_{i,1}+f_{i-1,1}\right]-\frac{2}{3(\Delta y)^2}\left[f_{i,1}-f_{i,2}\right]=0}$$

Pour $x \geq c$

Pour $p \leq i \leq n-1$ et $k=1$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\Delta x^2}\left[f_{i+1,1}-2f_{i,1}+f_{i-1,1}\right]+\dfrac{1}{\Delta y^2}\left[f_{i,2}-2f_{i,1}+f_{i,0}\right]=0\\ f_{i,0}=f_a\end{cases}$$

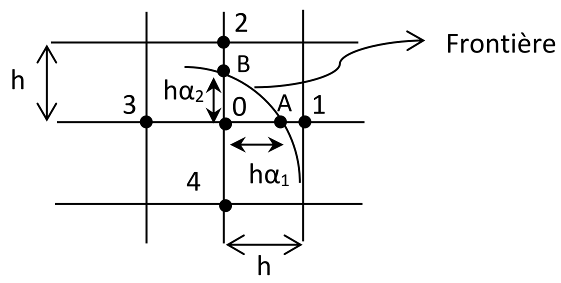
On remplace $f_{i,0}$ on obtient l'équation :

$$\boxed{\frac{1}{\Delta x^2}\left[f_{i+1,1} - 2f_{i,1} + f_{i-1,1}\right] - \frac{1}{\Delta y^2}\left[f_{i,2} - 2f_{i,1}\right] = -\frac{1}{\Delta y^2} f_a}$$

On est ainsi ramené à la résolution d'un système de $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ équation à $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ inconnus. On peut utiliser pour cela soit une méthode directe ou itérative.

5. Approximation des dérivées aux nœuds avoisinants une frontière irrégulière :

Lorsque la frontière rencontre le maillage rectangulaire en des points qui ne sont pas des nœuds du maillage (voir figure), les formules précédemment utilisées pour approcher les dérivées aux nœuds à proximité du maillage ne sont pas valables car le pas varie de part et d'autre de ces nœuds. Ce paragraphe concerne les approximations par les différences finies des dérivées en un point tel que « O », proche de la frontière **F** sur laquelle les valeurs de f sont supposées connues.



Frontière irrégulière

Ainsi, pour le cas simple d'un maillage carré de pas ***h*** le théorème de Taylor donne :

$$f_A = f_0 + h\alpha_1 \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \alpha_1^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + O(h^3)$$

$$f_3 = f_0 + h \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} + O(h^3)$$

L'élimination de $\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}$ donne :

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\alpha_1(1+\alpha_1)} f_A - \frac{(1-\alpha_1)}{\alpha_1} f_0 - \frac{\alpha_1}{(1+\alpha_1)} f_3\right] + O(h^2)$$

De même l'élimination de $\frac{\partial f_0}{\partial x}$ mène à :

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\left[\frac{2}{\alpha_1(1+\alpha_1)} f_A + \frac{2}{(1+\alpha_1)} f_3 - \frac{2}{\alpha_1} f_0\right] + O(h)$$

Donc, l'équation de Laplace au point « O » s'écrit :

$$\boxed{\frac{2}{\alpha_1(1+\alpha_1)} f_A + \frac{2}{\alpha_2(1+\alpha_2)} f_B + \frac{2}{(1+\alpha_1)} f_3 + \frac{2}{(1+\alpha_2)} f_4 - 2\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}\right) f_0 = 0}$$

6. Méthodes de résolution des E.D. Hyperboliques

6.1. Introduction : il existe essentiellement deux méthodes de résolution des équations hyperboliques : la méthode des différences finies et celle des caractéristiques.

La méthode des différences finies peut s'appliquer soit à l'équation du second ordre soit au système du premier ordre équivalent et donne lieu à des résolutions de type explicite ou implicite.

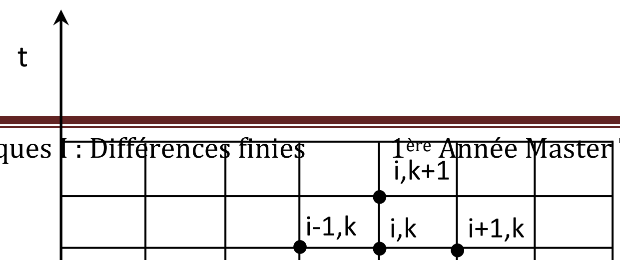
La méthode des caractéristiques est en général la procédure la mieux adaptée et la plus précise. Cependant pour des équations pas trop compliquées dont les solutions sont continues, on peut appliquer la méthode des différences. Si par contre, la fonction ou l'une de ses dérivées présente une discontinuité en un point de la frontière, on sait que cette discontinuité se propage le long des caractéristiques passant par ce point : une telle situation peut être difficilement maitrisée par la méthode des différences finies et on devra dans ce cas utiliser impérativement la méthode des caractéristiques.

6.2. Méthode des différences finies :

Soit l'équation des ondes ou des cordes vibrantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} \\ f(x, t=0) = F(x) \qquad pour \qquad 0 \le x \le a \\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial t}\right|_{x,t=0} = G(x) \end{cases}$$

Choix du maillage : on choisit un maillage de l'espace (x,t) correspondant à des pas Δx et Δt.



On considère la solution connue jusqu'à l'instant k.

6.2.1. Méthode explicite :

On discrétise l'équation des ondes par les différences centrées au nœud ***(i,k)***, ce qui donne :

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,k} = \frac{1}{c^2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right|_{i,k}$$

$$\frac{f_{i+1,k} - 2f_{i,k} + f_{i-1,k}}{\Delta x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{f_{i,k+1} - 2f_{i,k} + f_{i,k-1}}{\Delta t^2}$$

$$\boxed{\begin{cases} f_{i,k+1} = -f_{i,k-1} + 2(1-\lambda)f_{i,k} + \lambda(f_{i+1,k} + f_{i-1,k}) \\ \lambda = c^2\,\dfrac{\Delta t^2}{\Delta x^2} \end{cases}}$$

<u>Lorsque $k = 0$</u>

$$f_{i,1} = -f_{i,-1} + 2(1-\lambda)f_{i,0} + \lambda(f_{i+1,0} + f_{i-1,0}) \qquad \textbf{(1)}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{x,t=0} = G(x)$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{i,0} = \frac{f_{i,1} - f_{i,-1}}{2\Delta t} = G(x_i)$$

$$f_{i,1} - f_{i,-1} = 2\Delta t.G(x_i) \qquad \textbf{(2)}$$

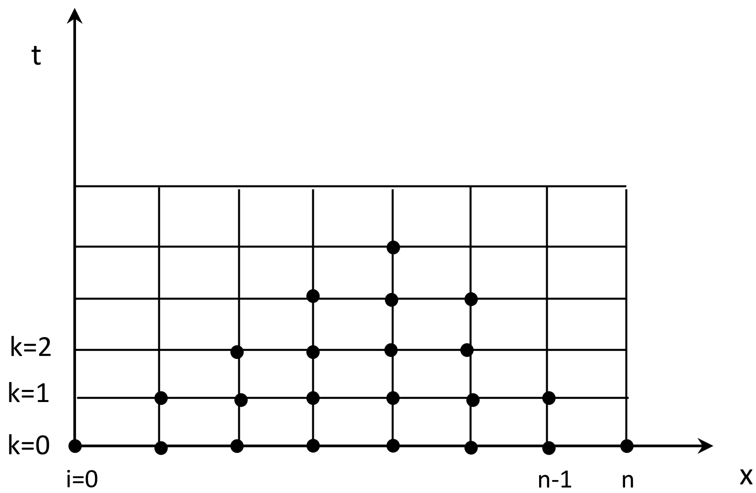
<u>Pour avoir $f_{i,1}$</u>

(2) $\Rightarrow f_{i,1} = f_{i,-1} + 2\Delta t.G_i$ substituant dans **(1)** :

$$f_{i,-1} + 2\Delta t.G(x_i) = -f_{i,-1} + 2(1-\lambda)f_{i,0} + \lambda(f_{i+1,0} + f_{i-1,0})$$

$$\Rightarrow f_{i,-1} = -\Delta t.G_i + (1-\lambda)f_{i,0} + \frac{\lambda}{2}(f_{i+1,0} + f_{i-1,0})$$

$$\Rightarrow f_{i,1} = \Delta t . G_i + (1-\lambda) f_{i,0} + \frac{\lambda}{2}(f_{i+1,0} + f_{i-1,0})$$



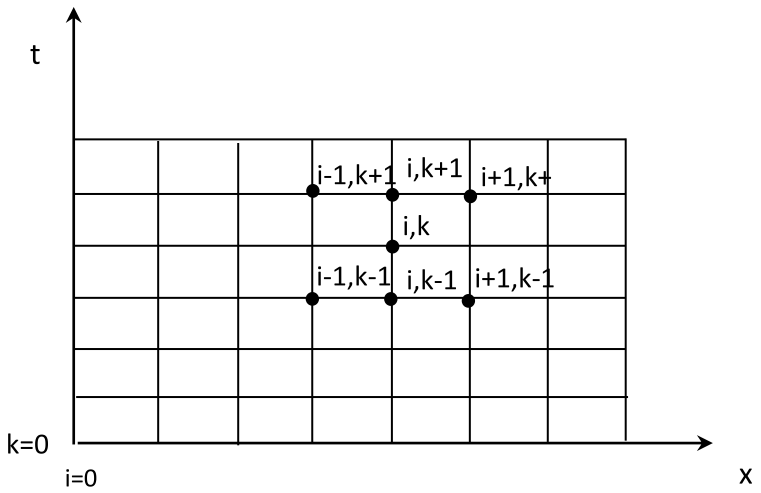
La solution ne peut être déterminée complètement (c'est-à-dire pour tout $t \geq 0$ et tout x tel que $0 \leq x \leq a$) que si l'on impose des conditions aux limites en x=0 et x=a.

La stabilité :

Il faut que $\Delta t < \frac{\Delta x}{c}$. On peut montrer que la solution n'est pas stable si $\Delta t > \frac{\Delta x}{c}$. C'est la raison pour laquelle il faut employer la méthode implicite si l'on désire calculer f en des pas assez grand sur le temps.

6.2.2. Méthode implicite :

La dérivée par rapport à t est approchée comme dans la méthode explicite cependant celle par rapport à x est évaluée en prenant la demi somme des valeurs de cette dérivée en (k-1) et (k+1).



$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right|_{i,k} = \frac{f_{i,k+1} - 2f_{i,k} + f_{i,k-1}}{\Delta t^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,k} = \frac{1}{2}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,k+1} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{i,k-1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{f_{i+1,k+1} - 2f_{i,k+1} + f_{i-1,k+1}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i+1,k-1} - 2f_{i,k-1} + f_{i-1,k-1}}{\Delta x^2}\right]$$

$$\Rightarrow -\frac{\lambda}{2} f_{i+1,k+1} + (1+\lambda) f_{i,k+1} - \frac{\lambda}{2} f_{i-1,k+1} = 2f_{i,k} + \frac{\lambda}{2}\left[f_{i+1,k-1} - 2f_{i,k-1} + f_{i-1,k-1}\right]$$

A la fin on obtient un système d'équation à matrice tri-diagonale qui peut être résolu par double balayage ou par la méthode itérative à conditions de connaître les conditions aux limites : ceci n'était pas nécessaire dans la méthode explicite.

L'avantage principal de la méthode implicite est qu'elle est stable quel que soit Δt. On peut donc utiliser des pas sur le temps plus important que dans la méthode explicite, ce qui permet de gagner de temps, au prix d'une complication mineur des calculs.

6.3. Résolution d'une équation du second ordre après remplacement par un système d'équations du premier ordre :

Les mêmes méthodes ci-dessus peuvent s'appliquer si on remplace l'équation du second ordre par un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ p = \dfrac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad q = \dfrac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial q}{\partial t} \\ \dfrac{\partial p}{\partial t} = \dfrac{\partial q}{\partial x} \end{cases} \qquad (\mathbf{I})$$

6.3.1. Résolution du système (I) par la méthode explicite :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\left[q_{i,k+1} - \dfrac{1}{2}\left(q_{i+1,k} + q_{i-1,k}\right)\right] = \dfrac{1}{2\Delta x}\left[p_{i+1,k} - p_{i-1,k}\right] \\ \dfrac{1}{\Delta t}\left[p_{i,k+1} - \dfrac{1}{2}\left(p_{i+1,k} + p_{i-1,k}\right)\right] = \dfrac{1}{2\Delta x}\left[q_{i+1,k} - q_{i-1,k}\right] \end{cases}$$

Cette méthode est stable lorsque $\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$.

6.3.2. Résolution du système (I) par la méthode implicite :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\Delta t}\left[q_{i,k+1} - q_{i,k}\right] = \dfrac{1}{2\Delta x}\left[p_{i+1/2,k} - p_{i-\frac{1}{2},k} + p_{i+\frac{1}{2},k+1} - p_{i-\frac{1}{2},k+1}\right] \\ \dfrac{1}{\Delta t}\left[p_{i-1/2,k+1} - p_{i-1/2,k}\right] = \dfrac{1}{2\Delta x}\left[q_{i,k+1} - q_{i-1,k+1} + q_{i,k} - q_{i-1,k}\right] \end{cases}$$

6.4. Méthode des caractéristiques :

a. Détermination de la fonction aux nœuds du réseau des caractéristiques :

$$\begin{cases} a\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e \\ b^2 - 4ac > 0 \end{cases} \qquad (\mathbf{a})$$

Equation du type hyperbolique. En faisant la substitution :

$p = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial f}{\partial y}$

On obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} ag_1 dp + cdq - edy = 0 & (\mathbf{1}) \\ ag_2 dp + cdq - edy = 0 & (\mathbf{2}) \end{cases}$$

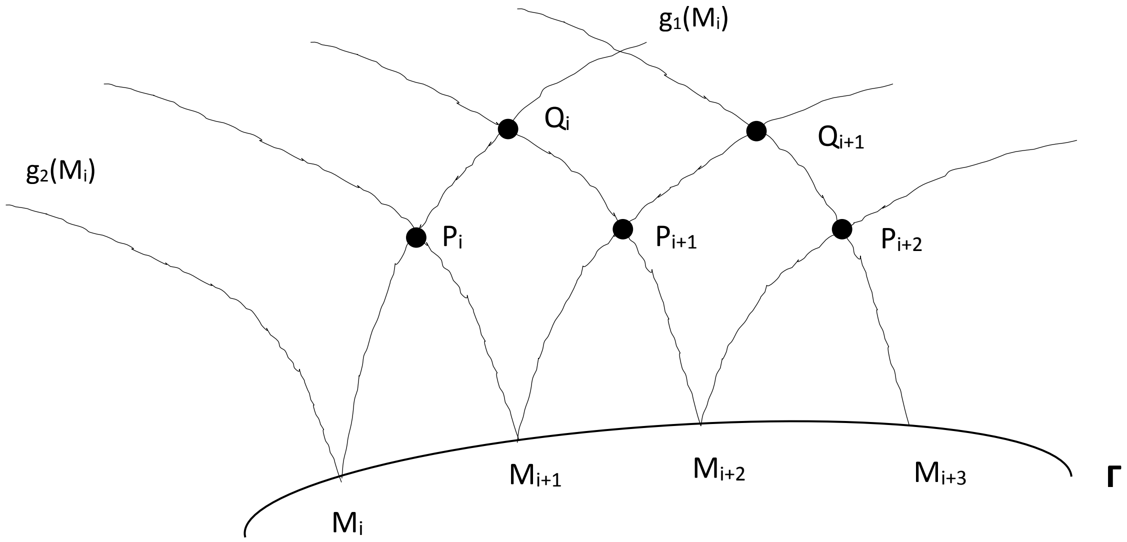
g_1 et g_2 sont des pentes des courbes caractéristiques. L'équation des courbes caractéristiques pour l'équation **(a)** est :

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b\left(\frac{dy}{dx}\right) + c = 0$$

L'inconnu est $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, elle admet deux solutions :

$$\frac{dy}{dx} = g_1 \Rightarrow dy = g_1 dx \qquad (\mathbf{3})$$

$$\frac{dy}{dx} = g_2 \Rightarrow dy = g_2 dx \qquad (\mathbf{4})$$



Dans chaque point issu l'équation caractéristique **(3)** et **(4)** en intégrant les équations **(3)** et **(4)** en M_i, on obtient les deux courbes $g_1(M_i)$ et $g_2(M_i)$. (Dans chaque point M_i on peut tracer deux courbes caractéristiques).

Les solutions sont l'intersection des courbes $(P_i, P_{i+1}, \dots \dots)$ ensuite on passe aux points $(Q_i, Q_{i+1}, \dots \dots)$.

Supposons que la fonction cherchée $\boldsymbol{f}$ et ses dérivées $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ soient connues le long d'une courbe $\boldsymbol{\Gamma}$. A partir de chaque point $\boldsymbol{M_i}$ sont issues deux caractéristiques, de pentes $g_1(M_i)$ et $g_2(M_i)$.

Considérons le point P_i, intersection des caractéristiques de type g_1 issue de $\boldsymbol{M_i}$ et de type g_2 issue de $\boldsymbol{M_{i+1}}$: Nous pouvons, à l'aide des équations **(1)** jusqu'à **(4)** déterminer ses coordonnées ainsi que les valeurs de p et q en P_i.

Les équations **(3)** et **(4)**, intégrées par la méthode des trapèzes donnent :

$$y(P_i) - y(M_i) = \frac{1}{2}[g_1(P_i) + g_1(M_i)][x(P_i) - x(M_i)] \qquad (\mathbf{5})$$

On intègre la courbe passant par $\boldsymbol{M_{i+1}}$

$$y(P_i) - y(M_{i+1}) = \frac{1}{2}[g_1(P_i) + g_1(M_{i+1})][x(P_i) - x(M_{i+1})] \qquad (\mathbf{6})$$

Les inconnus sont les coordonnées de P_i et de g_1 et g_2 en P_i.

Les équations **(1)** et **(2)** intégrées par la méthode des trapèzes donnent :

$$\frac{1}{2}[a(P_i)g_1(P_i) + a(M_i)g_1(M_i)][p(P_i) - p(M_i)] + \frac{1}{2}[c(P_i) + c(M_i)][q(P_i) - q(M_i)] - \frac{1}{2}[e(P_i) + e(M_i)][y(P_i) - y(M_i)] = 0 \qquad (\mathbf{7})$$

$$\frac{1}{2}[a(P_i)g_2(P_i) + a(M_{i+1})g_2(M_{i+1})][p(P_i) - p(M_{i+1})] + \frac{1}{2}[c(P_i) + c(M_{i+1})][q(P_i) - q(M_{i+1})] - \frac{1}{2}[e(P_i) + e(M_{i+1})][y(P_i) - y(M_{i+1})] = 0 \qquad (\mathbf{8})$$

En fin $f(P_i)$ est obtenue à partir de la relation en p et q.

$$df = pdx + qdy$$

Cette équation peut être intégrée par la méthode des trapèzes, soit le long de g_1 entre ($P_i\ et\ M_i$), soit le long de g_2 entre ($P_i\ et\ M_{i+1}$) pour donner l'une ou l'autre des équations.

$$f(P_i) - f(M_i) = \frac{1}{2}[p(P_i) + p(M_i)][x(P_i) - x(M_i)] + \frac{1}{2}[q(P_i) + q(M_i)][y(P_i) - y(M_i)] \qquad (\mathbf{9})$$

L'intégral de l'équation précédente le long de g_1

$$\begin{aligned} f(P_i) - f(M_{i+1}) \\ &= \frac{1}{2}[p(P_i) + p(M_{i+1})][x(P_i) - x(M_{i+1})] \\ &+ \frac{1}{2}[q(P_i) + q(M_{i+1})][y(P_i) - y(M_{i+1})] \qquad (\mathbf{10}) \end{aligned}$$

L'intégral de l'équation précédente le long de g_2

Toutes les quantités en M_i et M_{i+1} étant supposées connues, l'ensemble des quatre équations de **(5)** à **(8)** jointes à l'une des deux équations **(9)** ou **(10)** constitues un ensemble de cinq équations à cinq inconnus : $x(P_i)$; $y(P_i)$; $p(P_i)$; $q(P_i)$; $f(P_i)$.

Deux cas sont alors possibles :

1. Ou bien les coefficients a, b et c ne dépendent pas de l'inconnu f et alors g_1 et $g_2$ne dépendent pas non plus de f. Dans ces conditions, les deux équations **(5)** et **(6)** donnent $x(P_i)$ et $y(P_i)$ puis les deux équations **(7)** et **(8)** donnent $p(P_i)$ et $q(P_i)$, en fin l'une des équations (9) ou (10) donnent $f(P_i)$.
2. Les coefficients a, b et c de l'équation hyperbolique dépendent de l'inconnu f et alors g_1 et g_2 dépendent de f. Dans ce cas, il faut procédé par itération : on donne une valeur estimée à $f(P_i)$, ce qui détermine $g_1(P_i)$ et $g_2(P_i)$ et nous ramène au cas précédent. La résolution des cinq

équations $x(P_i)$, $y(P_i)$, $p(P_i)$ et $q(P_i)$ et une nouvelle valeur $f(P_i)$ et on recommence à nouveau la résolution des cinq équations.

Le processus converge rapidement si M_i et M_{i+1} ne sont pas trop éloignés l'un de l'autre, ce qui est d'autre part nécessaire pour minimiser les erreurs de troncature.