

## Chapitre 2 : Classification des équations aux dérivées partielles

### 1. Définition :

- Une équation aux dérivées partielles (EDP) est une relation faisant intervenir les variables indépendantes  $x_1, x_2, \dots, \dots, x_n$ , la fonction  $f$  et ses dérivées partielles.

Par exemple, si  $f$  est une fonction de deux variables, une EDP peut s'écrire par la relation :

$$F\left(x, y, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \dots\right) = 0$$

- On appelle ordre de l'EDP l'ordre le plus élevé des dérivées partielles intervenant dans l'EDP, par exemple :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial x} + f + c = 0 \quad \text{est d'ordre 3}$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 - c = 0 \quad \text{est d'ordre 2}$$

- L'EDP est dite linéaire si  $F$  est linéaire par rapport à ses arguments  $f$  et ses dérivées partielles, et si les coefficients qui les lient ne dépendent que de  $(x, y)$  ; sinon elle est non linéaire. Par exemple, l'EDP du second ordre :

$$a_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + a_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + a_4 \frac{\partial f}{\partial x} + a_5 \frac{\partial f}{\partial y} + a_6 f + a_7 = 0 \quad (1)$$

est linéaire si les  $a_i$  ne dépendent que de  $(x, y)$ .

### 2. Classification mathématique des EDP linéaires du second ordre (cas de deux variables indépendantes) :

De très nombreux phénomènes physiques se traduisent par les EDP linéaires du second ordre du type (1) qui peuvent s'écrire sous la forme :

$$a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = d \quad (2)$$

Où  $a, b$  et  $c$  ne dépendent que de  $(x, y)$  et  $d$  est une fonction linéaire de  $(x, y, f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ .

Il y a trois types d'équations aux dérivées partielles représentés par l'équation (2) :

- Lorsque la quantité  $\Delta = (b^2 - 4ac) < 0$  l'équation (2) est dite du type elliptique.
- Lorsque la quantité  $\Delta = (b^2 - 4ac) = 0$  l'équation (2) est dite du type parabolique.
- Lorsque la quantité  $\Delta = (b^2 - 4ac) > 0$  l'équation (2) est dite du type hyperbolique.

Cette appellation est faite par analogie avec l'équation générale du second ordre en géométrie analytique :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = d \quad (3)$$

Ainsi, selon le signe du discriminant  $\Delta = (b^2 - 4ac)$ , nous obtenons différentes formes géométriques :

- $\Delta = (b^2 - 4ac) < 0 \rightarrow$  ellipse.
- $\Delta = (b^2 - 4ac) = 0 \rightarrow$  parabole.
- $\Delta = (b^2 - 4ac) > 0 \rightarrow$  hyperbole.

### 3. Classification mathématique dans le cas général (n variables indépendantes) :

Si  $f$  est une fonction de  $n$  variables indépendantes, les EDP linéaires du second ordre sont du type :

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n b_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + c(x_1, \dots, x_n) f + d(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (4)$$

- Si tous les  $a_i$  sont non nuls et de même signe, l'EDP est de type elliptique.
- Si tous les  $a_i$  sont non nuls et sont ; à une exception près, de même signe, l'EDP est de type hyperbolique.
- Si un seul des  $a_i$  est nul (noté  $a_{i_0}$ ) et tous les autres de même signe et si  $b_{i_0}$  est non nul, l'EDP est de type parabolique.

Les fonctions  $a_i$  et  $b_i$  étant dépendantes des variables  $(x_1, \dots, x_n)$ , la classification est évidemment fonction du point  $(x_1, \dots, x_n)$  considéré. Une EDP peut donc être de différents types suivant les points considérés : on dit qu'elle est de type mixte.

**Exemples :** soient  $f(x, y)$  une fonction de deux variables et  $g(x, y, t)$  une fonction de trois variables.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \text{est une EDP elliptique}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \quad \text{est une EDP hyperbolique}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \quad \text{est une EDP parabolique}$$

$$x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \begin{array}{ll} \text{Elliptique} & \text{pour } x > 0 \end{array}$$

$$\text{Hyperbolique} \quad \text{pour } x < 0$$

$$\text{Parabolique} \quad \text{pour } x = 0$$

#### 4. Classification physique des EDP :

De nombreux phénomènes physiques se rangent dans l'une des classes suivantes :

- Les problèmes d'équilibre étudient l'état stationnaire d'un phénomène (champ, chaleur.....) dans un domaine borné ou non. Ils sont gouvernés par l'EDP elliptiques.
- Les problèmes de valeurs propres sont en général des extensions des problèmes d'équilibre dans lesquels les valeurs critiques de certains paramètres doivent être déterminées. C'est le cas par exemple de la résonance des circuits électriques.
- Les problèmes d'évolution étudient l'évolution avec le temps d'un phénomène (champ, chaleur, vibration,...) à partir d'un état initial donné. Ils sont gouvernés par des EDP hyperboliques ou des EDP paraboliques.

#### Exemples :

##### a- Equation de la chaleur :

La conduction thermique à l'intérieur d'un domaine D bidimensionnel provoque un changement de la température  $(t, x, y)$ , qui régit, en l'absence de source de chaleur par l'EDP :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

Où  $k, \rho, c$  sont respectivement la conductivité thermique, la masse volumique et la chaleur spécifique du solide constituant le domaine D.

Lorsque  $k$  dépend seulement de la position  $(x, y)$ , l'EDP est linéaire ; si  $k$  dépend de la température  $T$ , l'EDP est non linéaire.

Dans la majorité des cas rencontrés, on considère  $k$  comme constante et l'équation de la chaleur peut être sous la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \alpha \Delta T$$

Où  $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$  désigne le Laplacien de T

$\alpha = \frac{k}{\rho c}$  est le coefficient de diffusion thermique

De manière générale, si T dépend de n variables d'espace  $(x_1, \dots, x_n)$  on a :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} = \alpha \Delta T$$

Tous les problèmes de diffusion sont régis par ce type d'équations.

Exemple : La diffusion d'un polluant dans des eaux calmes est gouvernée par l'EDP  $\frac{\partial C}{\partial t} = \alpha_m \Delta C$

Où  $C$  est la concentration et  $\alpha_m$  le coefficient de diffusion de la matière.

Pour pouvoir résoudre ce type d'équation nous devons fixer la condition initiale et les conditions aux limites.

La condition initiale est fixée en donnant la valeur de la température au temps  $t = 0$  dans tous les points du domaine  $D$  :

$$T(0, x, y) = T_0(x, y) \quad (x, y) \in D$$

Soit  $F$  la frontière du domaine  $D$ , les conditions aux limites peuvent être de différents types selon la situation physique étudiée :

**i. Différents types de conditions aux limites :**

- **Température connue à tout instant sur la frontière :**

Dans ce cas la condition aux limites est écrite sous la forme :

$$T(t, x, y) = U(t, x, y) \quad (x, y) \in F, \quad t > 0 \quad \text{(i.1)}$$

La condition  $t > 0$  est rajoutée, car à l'instant  $t = 0$  la condition initiale et aux limites peuvent ne pas avoir les mêmes valeurs. C'est par exemple le cas d'une barre de fer rougie au feu et plongée brutalement dans l'eau glacée. La condition initiale est la température de la barre rougie au feu et est supérieure à la condition aux limites qui est la température de l'eau glacée.

- **La frontière est isolée thermiquement :**

Dans ce cas il n'y a aucun flux de chaleur à travers  $F$  et la condition aux limites est donnée par la relation :

$$\frac{\partial T}{\partial n}(t, x, y) = 0; \quad (x, y) \in F; \quad t > 0 \quad \text{(i.2)}$$

Où  $\frac{\partial}{\partial n}$  désigne la dérivée dans la direction de la normale à  $F$ , dirigée vers l'extérieur de  $D$ .

- **Le solide baigne dans le courant d'un fluide :**

Lorsqu'un fluide s'écoule sur la surface du solide  $D$ , nous avons une condition aux limites du type :

$$k \frac{\partial T(t, x, y)}{\partial n} + h(T(t, x, y) - \theta_f) = 0 \quad (x, y) \in F, \quad t > 0 \quad \text{(i.3)}$$

Où :  $\theta_f$  est la température du fluide

$h$  est un coefficient qui dépend des caractéristiques du fluide, de la vitesse d'écoulement et aussi de la forme de  $F$ .