Chapitre III : Modèle Géométrique Direct (MGD) d'un Robot

1. Introduction :

Le MGD d'un robot permet de calculer les coordonnées opérationnelles de son organe terminal en fonction de ses coordonnées articulaires (**Figure III-1**) , il est donné par la relation :

$$X = f(q) \qquad \text{(III-1)}$$

avec : X : vecteur des coordonnées opérationnelles (P_x , P_y et P_z) de l'organe terminal.

q : vecteur des variables articulaires (notées θ pour les rotations et r pour les translations)

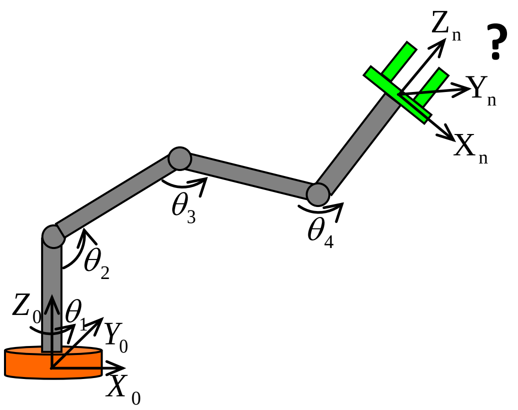

Figure III-1: Définition du MGD

Le calcul de ce MGD de façon programmable exige une méthode générale pour décrire la structure du robot. La plus répondue est celle de la méthode de Denavit-Hartenberg qui est développée pour paramétrer les robots à structure ouverte simple.

2. Les quatre paramètres de Dénavit-Hartenberg :

Cette méthode est fondée sur les conventions et règles suivantes (**Figure III-2**) :

- Une structure ouverte simple est composée de $n+1$ corps rigides, notés $C_0,....,C_n$, et de n articulations
- Le corps C_0 désigne la base du robot et le corps C_n porte l'organe terminal.
- L'articulation j connecte le corps C_j au corps C_{j-1} les corps sont supposée parfaitement rigides, liés entre eux par des articulations qui sont considérées comme idéales et qui peuvent être soit rotoïdes soit prismatiques.
- Le repère R_j est lié au corps C_j

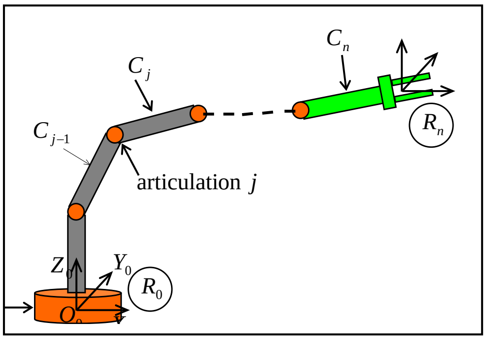

Figure III-2 : Notations associées à une chaine ouverte simple

- Le passage du repère R_{j-1} au repère R_j s'exprime en fonction des quatre paramètres géométriques $\alpha_j, d_j, \theta_j, r_j$ (**Figure III-3**) , selon les conventions du **Tableau III-1.**

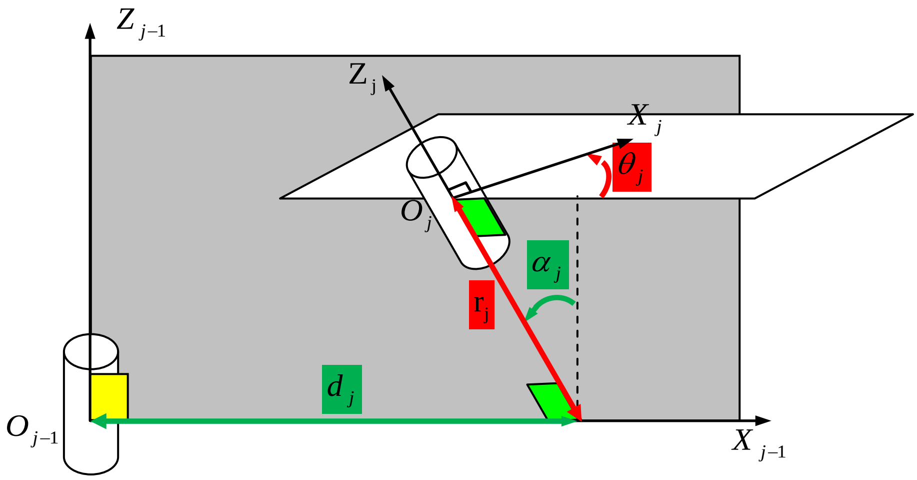

Figure III-3 : Les quatre paramètres de Denavit-Hartenberg .

Règles de construction	Z_j : axe de l'articulation j supportant le corps C_j X_j : axe perpendiculaire à $(Z_j \,\&\, Z_{j+1})$				
Variable	Axe de référence	De l'axe	A l'axe	Remarque	Type de paramètres
α_j	X_{j-1}	Z_{j-1}	Z_j	angle entre les axes de deux articulations	Paramètres **fixes** de **configuration**
d_j	X_{j-1}	Z_{j-1}	Z_j	distance entre les axes de deux articulations	
θ_j	Z_j	X_{j-1}	X_j	variables articulaires pour la rotation	**Variables** articulaires de **mouvement**
r_j	Z_j	X_{j-1}	X_j	variables articulaires pour la translation	

Tableau III-1: Conventions de Denavit-Hartenberg pour la structure ouverte simple .

3. La Matrice de Dénavit-Hartenberg :

La matrice de Dénavit-Hartenberg qui résulte de la composition en ordre de ces quatre mouvements pour passer du repère R_{j-1} au repère R_j est donnée par la relation:

$$^{j-1}T_j = Rot(X,\alpha_j)Trans(X,d_j)Rot(Z,\theta_j)Trans(Z,r_j) \qquad \text{(III-2)}$$

Après son développement, on obtient :

$$^{j-1}T_j = \begin{bmatrix} C\theta_j & -S\theta_j & 0 & d_j \\ C\alpha_j S\theta_j & C\alpha_j C\theta_j & -S\alpha_j & -r_j S\alpha_j \\ S\alpha_j S\theta_j & S\alpha_j C\theta_j & C\alpha_j & r_j C\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(III-3)}$$

avec : $C\theta_j = \cos(\theta_j)$ et $S\theta_j = \sin(\theta_j)$

Sa matrice inverse est donnée par :

$$^{j}T_{j-1} = \begin{bmatrix} & -d_j C\theta_j \\ {}^{j-1}A_j^{T} & d_j S\theta_j \\ & -r_j \\ 0\quad 0\quad 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(III-4)}$$

- $^{j-1}A_j^T$:désigne la transpose de $^{j-1}A_j$

4. Le MGD d'un robot à chaine ouverte simple :

Le passage du repère de base R_0 au repère portant l'organe terminal R_n se définit par les multiplications des MTH intermédiaires suivantes :

$$^{0}T_n = {}^{0}T_1\ {}^{1}T_2\ {}^{2}T_3 \ \ldots\ {}^{n-1}T_n \qquad \text{(III-5)}$$

Cette matrice $^{0}T_n$ est celle qui donne Le MGD du robot . En la partitionnant, on constate que :

- Les coordonnées opérationnelles de l'origine du repère R_n portant l'organe terminal par rapport au repère de base R_0 se trouvent à la quatrième colonne (de rang : 3*1) de $^{0}T_n$ ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{0}T_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(III-5)}$$

- L'orientation du repère R_n portant l'organe terminal par rapport au repère de base R_0 se définit par la matrice ${}^{j-1}A_j$ (de rang : 3*3) de rotation extraite de ${}^{0}T_n$:

$$
{}^{0}A_n = \begin{bmatrix} {}^{0}s_{x,n} & {}^{0}n_{x,n} & {}^{0}a_{x,n} \\ {}^{0}s_{y,n} & {}^{0}n_{y,n} & {}^{0}a_{y,n} \\ {}^{0}s_{z,n} & {}^{0}n_{z,n} & {}^{0}a_{z,n} \end{bmatrix} \qquad \text{(III-6)}
$$

Bibliographie :

[1] Wissama khalil et Etienne Dombre. « Modélisation, identification et commandes des robots », HERMESS Science Publications, Paris,1988,1999.

[2] T.Alani. Introduction à la robotique. Laboratoire A^2SI-ESIEE-Paris, France, 2002.

Exemple 1:

1. Soit à calculer le MGD du robot simple suivant à **1 ddl** (**Figure III-4**) :

   - une seule variable articulaire θ_1
   - de longueur d_1 .

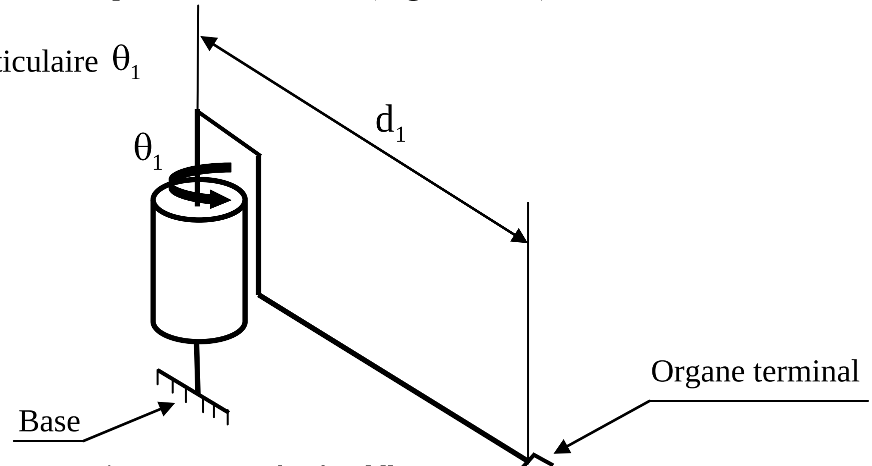

Figure III-4 : Robot à **1 ddl** "**R**"

- **Les étapes du calcul du MGD sont :**

1.1. Affectation des repères selon les convention de D-H (**Figure III-5**) :

- O_j : Origine de l'articulation j supportant le corps C_j
- Z_j : axe de l'articulation j supportant le corps C_j
- X_j : axe perpendiculaire à $(Z_j \,\&\, Z_{j+1})$

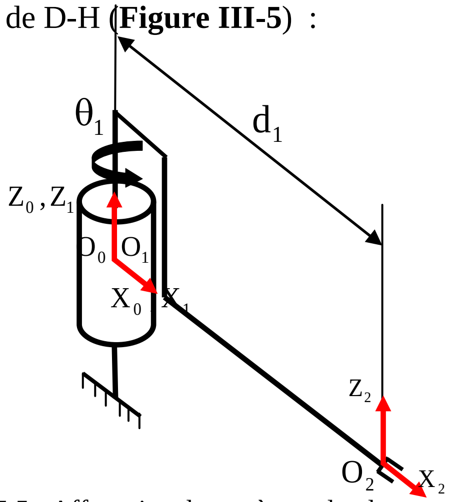

Figure III-5 : Affectation des repères selon les convention de D-H.

1.2. Tableau de D-H de la forme :

$j-1$	j	α_j	d_j	θ_j	r_j	
0	1	0	0	θ_1	0	← Cette ligne modélise uniquement l'articulation rotoide
1	2	0	d_1	0	0	← Cette ligne modélise le corps qu'elle porte

1.3. Calcul des MTH intermédiaires selon la matrice de D-H : Pour **1 ddl** on a : $j = 1:2$, d'où deux matrices intermédiaires : ${}^0T_1$ et ${}^1T_2$

$$ {}^0T_1 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & 0 \\ S1 & C1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

1.4. Calcul du MGD qui correspond à $^{0}T_2$ ce qui nous donne :

$$^{0}T_2 = {}^{0}T_1\,{}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} C1 & -S1 & 0 & C1d_1 \\ S1 & C1 & 0 & S1d_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Exemple</u> 2: Soit à calculer le MGD de l'articulation suivante (**Figure III-6**) :

- uniquement une articulation prismatique r_1 $(j=1)$
- Ne supportant aucun corps .

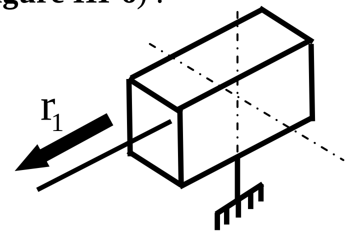

Figure III-6 : Robot à **1 ddl** **"P"**

- **<u>Les étapes du calcul du MGD sont</u> :**

3.1. Affectation des repères selon les convention de D-H (**Figure III-7**) :

- O_j : Origine de l'articulation *j* supportant le corps C_j
- Z_j : axe de l'articulation *j* supportant le corps C_j
- X_j : axe perpendiculaire à $(Z_j \& Z_{j+1})$

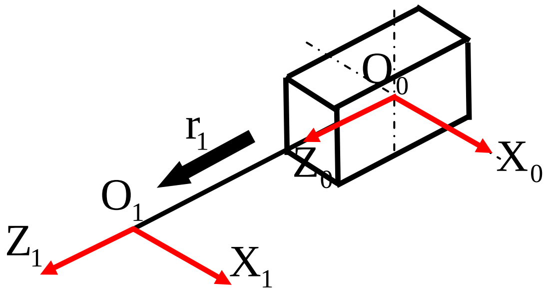

Figure III-7 : Affectation des repères selon les convention de D-H.

3.2. Tableau de D-H de la forme :

$j-1$	j	α_j	d_j	θ_j	r_j
0	1	*0*	0	0	r_1

3.3. Calcul des MTH intermédiaires selon la matrice de D-H : on a : $j=1:1$, d'où on a une seule matrice pour ce MGD :

$$^{0}T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemple 3:

3. Soit à calculer le MGD du robot suivant à **2 ddl** dans cette configuration de dessin (**Figure III-8**) :

- Deux variables articulaires r_1 et θ_2
- Pas de distance entre l'articulation 1 et 2
- Corps de longueur d_2

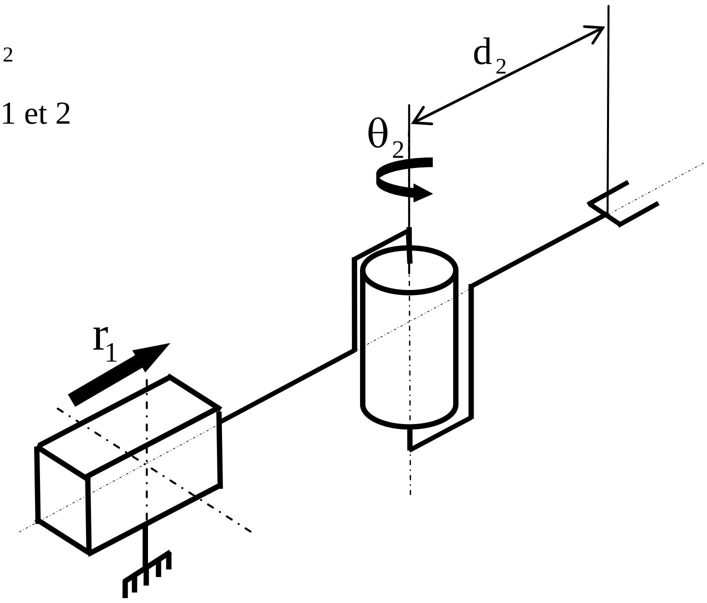

Figure III-8 : Robot à **2 ddl** "**P**R"

- **Les étapes du calcul du MGD sont :**

3.1. Affectation des repères selon les convention de D-H (**Figure III-9**) :

- O_j : Origine de l'articulation *j* supportant le corps C_j
- Z_j : axe de l'articulation *j* supportant le corps C_j
- X_j : axe perpendiculaire à $(Z_j \,\&\, Z_{j+1})$

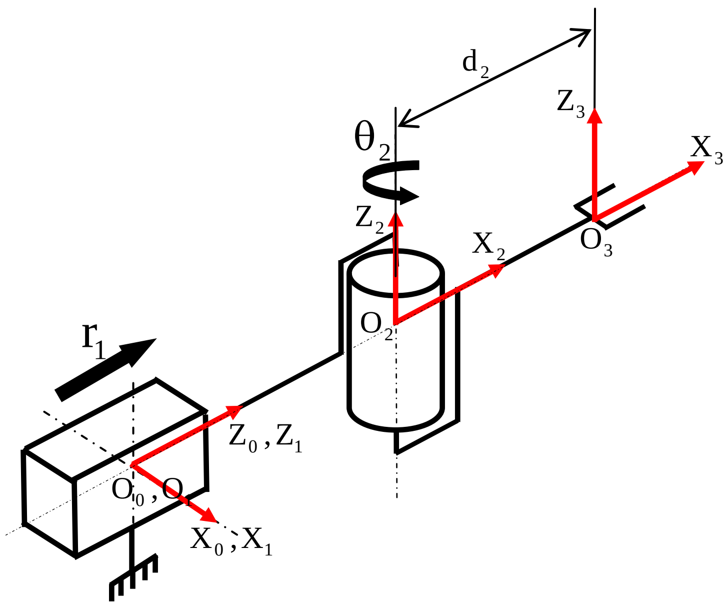

Figure III-9 : Affectation des repères selon les convention de D-H.

3.2. Tableau de D-H de la forme :

$j-1$	j	α_j	d_j	θ_j	r_j
0	1	*0*	*0*	0	r_1
1	2	$\pi/2$	0	$\pi/2+\theta_2$	0
2	3	0	d_2	0	0

3.3. Calcul des MTH intermédiaires selon la matrice de D-H : Pour **1 ddl** on a : $j=1:2$, d'où deux matrices intermédiaires : ${}^{0}T_1$ et ${}^{1}T_2$

$$ {}^{0}T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & r_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{1}T_2 = \begin{bmatrix} -C2 & -S2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S2 & -C2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{2}T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

3.4. Enfin le calcul du MGD qui correspond à ${}^{0}T_3$ ce qui nous donne :

$$ {}^{0}T_3 = {}^{0}T_1 \, {}^{1}T_2 \, {}^{2}T_3 = \begin{bmatrix} -C2 & -S2 & 0 & -C2d_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ S2 & -C2 & 0 & S2d_2 + r1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$