Chapitre II : Matrices de Transformations Homogènes (MTH)

1. Introduction :

Les **Matrices de Transformations Homogènes (MTH)** définissent un outil mathématique permettant de calculer un changement de repère en une seule opération matricielle, leurs utilisation est à la base de la modélisation des robots .

Une MTH a la dimension 4*4 , sa forme générale est :

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_x & \boldsymbol{n}_x & \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{P}_x \\ \boldsymbol{s}_y & \boldsymbol{n}_y & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{P}_y \\ \boldsymbol{s}_z & \boldsymbol{n}_z & \boldsymbol{a}_z & \boldsymbol{P}_z \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-1)}$$

- Remarquons que la valeur de la quatrième ligne reste inchangée et vaut : $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Coordonnées Homogènes :

2.1. Coordonnées Homogènes d'un point :
Un point P de coordonnées cartésiennes P_x , P_y et P_z s'écrit sous la forme homogène :

$$P = \begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \\ P_Z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(II-2)}$$

2.2. Coordonnées Homogènes d'un vecteur :
Un vecteur v de coordonnées cartésiennes v_x, v_y et v_z s'écrit sous la forme homogène :

$$v = \begin{bmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(II-3)}$$

3. Matrices de Transformations Homogènes :

Soit un repère R_i qui a subi une transformation (Translation et /ou Rotation) qui l'amène à la situation R_j (**Figure II-1**).On décrit cette transformation par la MTH notée $^i\boldsymbol{T_j}$ qui est donnée par la relation:

$$^iT_j = \begin{bmatrix} ^is_j & ^in_j & ^ia_j & ^iP_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_X \\ s_y & n_y & a_y & P_Y \\ s_z & n_z & a_z & P_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(II-4)}$$

où :

- $^i\boldsymbol{s_j}, ^i\boldsymbol{n_j}\, ^i\boldsymbol{a_j}$: désignent respectivement les vecteurs unitaires suivant les axes X_j, Y_j et Z_j du repère R_j exprimés dans le repère R_i : Autrement dit : c'est **la Rotation** du repère R_j par rapport au le repère R_i .

- $^i\boldsymbol{P_j}$: le vecteur exprimant les coordonnées cartésiennes de l'origine O_j du repère R_j dans le repère R_i :

Autrement dit : c'est **la Translation** de l'origine O_j du repère R_j dans le repère R_i .

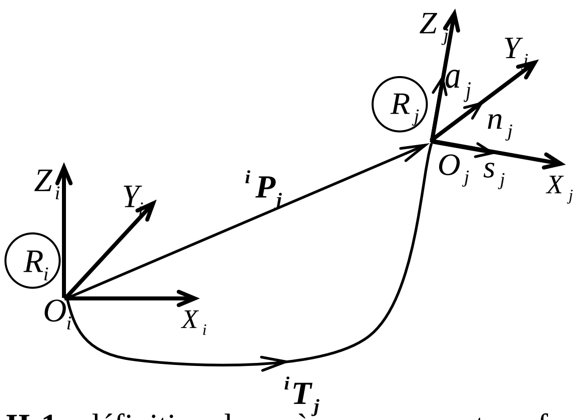

Figure II-1 : définition de repères pour une transformation homogène.

4. Propriétés des MTH :

4.1. la MTH $^i\boldsymbol{T_j}$ décrivant la situation du repère R_j dans le repère R_i s'écrit sous la **forme partitionné** :

$$^i\boldsymbol{T_j} = \begin{bmatrix} ^i\boldsymbol{A_j} & & & ^i\boldsymbol{P_j} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ^i\boldsymbol{s_j} & ^i\boldsymbol{n_j} & ^i\boldsymbol{a_j} & ^i\boldsymbol{P_j} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(II-5)}$$

- où ${}^{i}\boldsymbol{A}_j$ représente la matrice de rotation formée par les vecteurs $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{n}\ et\ \boldsymbol{a}$ qui sont les vecteurs unitaires du repère R_j exprimés dans R_i, alors que la matrice colonne ${}^{i}\boldsymbol{P}_j$ représente la translation formée des coordonnées de l'origine du repère R_j exprimées dans R_i.

4.2. l'inverse de la matrice ${}^{i}\boldsymbol{T}_j$ est la matrice ${}^{j}\boldsymbol{T}_i$, définie par :

$$ {}^{j}\boldsymbol{T}_i = \begin{bmatrix} & & & -\boldsymbol{s}^t\ \boldsymbol{P} \\ & \boldsymbol{A}^T & & -\boldsymbol{n}^t\ \boldsymbol{P} \\ & & & -\boldsymbol{a}^t\ \boldsymbol{P} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \boldsymbol{A}^T & & -\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(II-6)} $$

4.3. Si un repère $\boldsymbol{R}_0$ a subit $\boldsymbol{k}$ transformations **successives** de la forme : ${}^{i-1}\boldsymbol{T}_i$ $(\boldsymbol{i} = 1 : \boldsymbol{k})$, alors la transformation globale ${}^{0}\boldsymbol{T}_k$ peut être déduite de la composition **des multiplications à droite** de ces transformations :

$$ {}^{0}T_k = {}^{0}T_1\ {}^{1}T_2\ {}^{2}T_3\ \dots\ {}^{k-1}T_k \qquad \text{(II-7)} $$

4.4. Le produit des MTH n'est pas commutatif : $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2 \neq \boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_1$

5. Transformation homogènes courantes : Prenons les cas des transformations habituelles qui permettent de situer un repère $\boldsymbol{R}_j$ par rapport au repère de référence $\boldsymbol{R}_i$ par une :

5.1. MTH décrivant une Translation pure :

5.2.1. Le long de l'axe X d'une distance a : (**Figure II-2**)

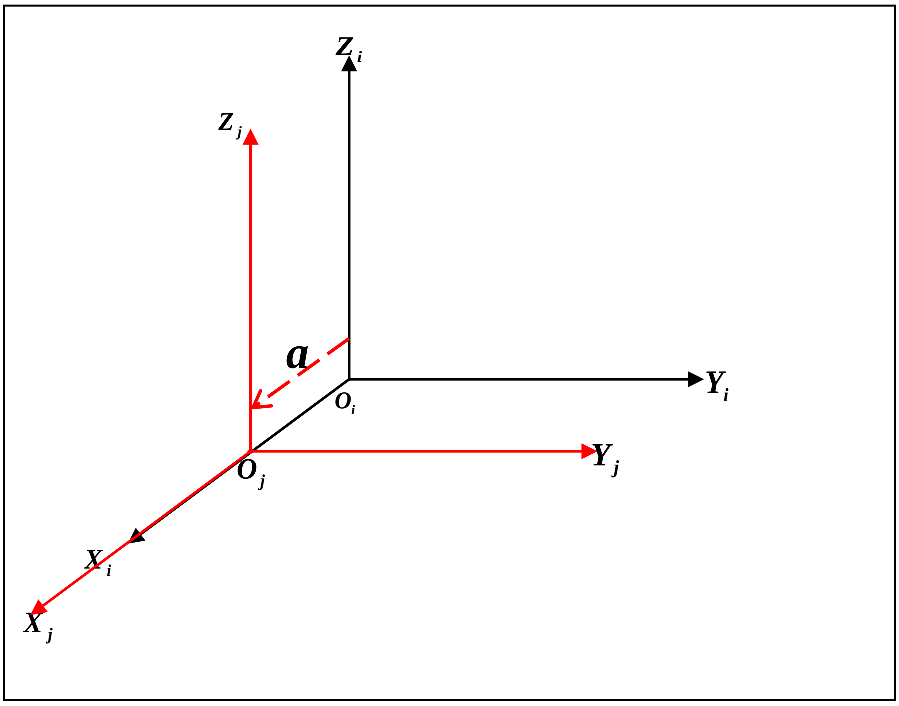

Figure II-2: Translation pure le long de X d'une distance a.

$$ {}^{i}T_{j} = \boldsymbol{Trans(X,a)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \boldsymbol{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-8)} $$

5.2.2. Le long de l'axe Y d'une distance $\boldsymbol{b}$: (**Figure II-3**)

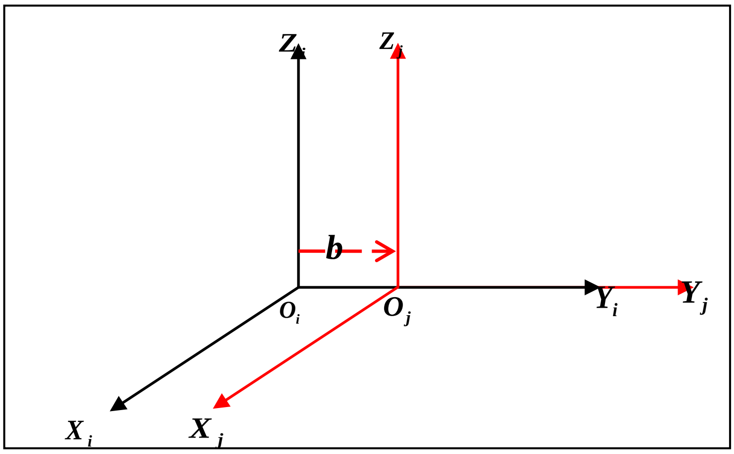

Figure II-3: Translation pure le long de Y d'une distance $\boldsymbol{b}$.

$$ {}^{i}T_{j} = \boldsymbol{Trans(Y,b)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{b} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-9)} $$

5.2.3. Le long de l'axe Z d'une distance $\boldsymbol{c}$: (**Figure II-4**)

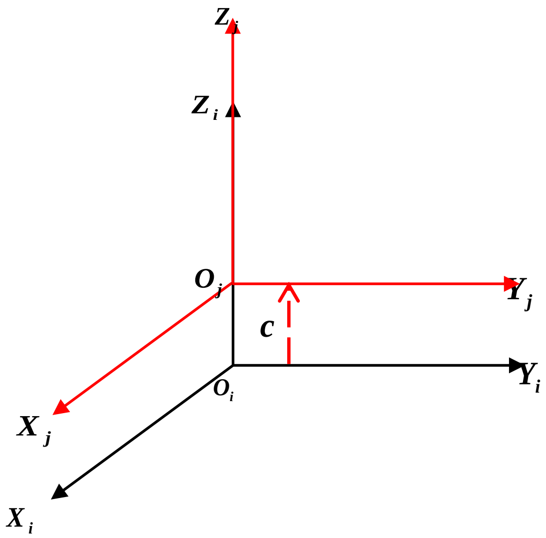

Figure II-4: Translation pure le long de Z d'une distance $\boldsymbol{c}$.

$$^{i}T_j = Trans(Z,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-10)}$$

5.2.4. Le long des axes X,Y et Z des distances $\boldsymbol{a,b}$ ***et*** $\boldsymbol{c}$: (**Figure II-5**)

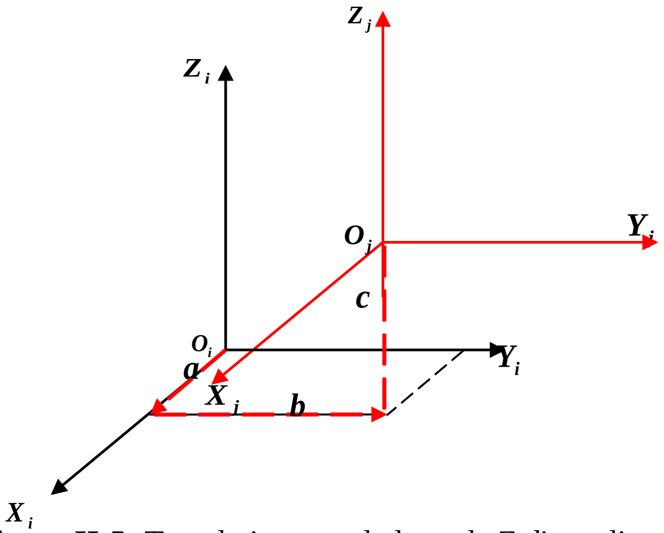

Figure II-5: Translation pure le long de Z d'une distance $\boldsymbol{a,b}$ ***et*** $\boldsymbol{c}$.

$$^{i}T_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \boldsymbol{a} \\ 0 & 1 & 0 & \boldsymbol{b} \\ 0 & 0 & 1 & \boldsymbol{c} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-11)}$$

5.2. MTH décrivant une rotation pure :

5.2.5. Autour de l'axe X d'un angle α : (**Figure II-6**)

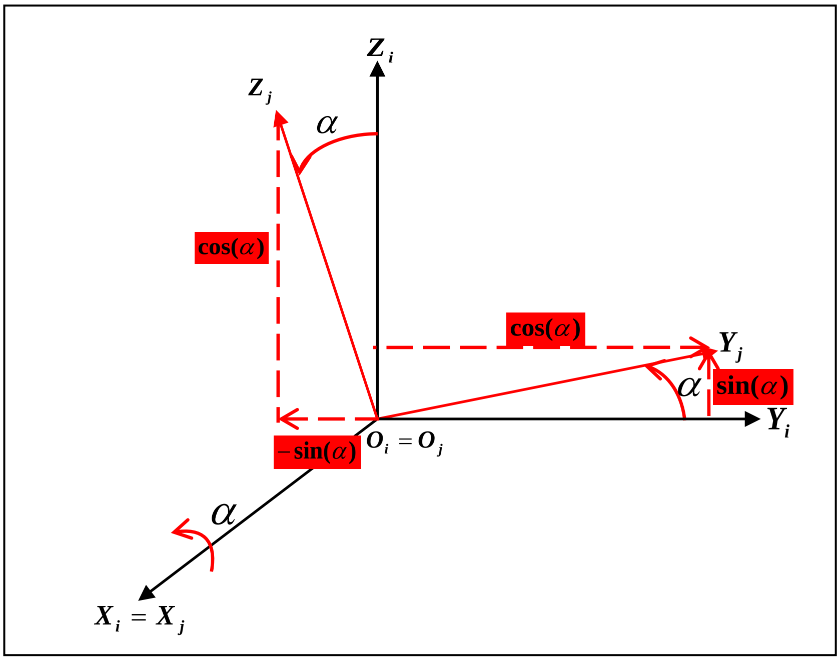

Figure II-6: Rotation pure autour de X d'un angle α .

$$ {}^{i}\boldsymbol{T}_{j} = \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{X},\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha & 0 \\ 0 & s\alpha & c\alpha & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-12)} $$

- Avec les notations abrégées : $c\alpha = \cos(\alpha)$ ***et*** $s\alpha = \sin(\alpha)$

5.2.1. autour de l'axe Y d'un angle α : (**Figure II-7**)

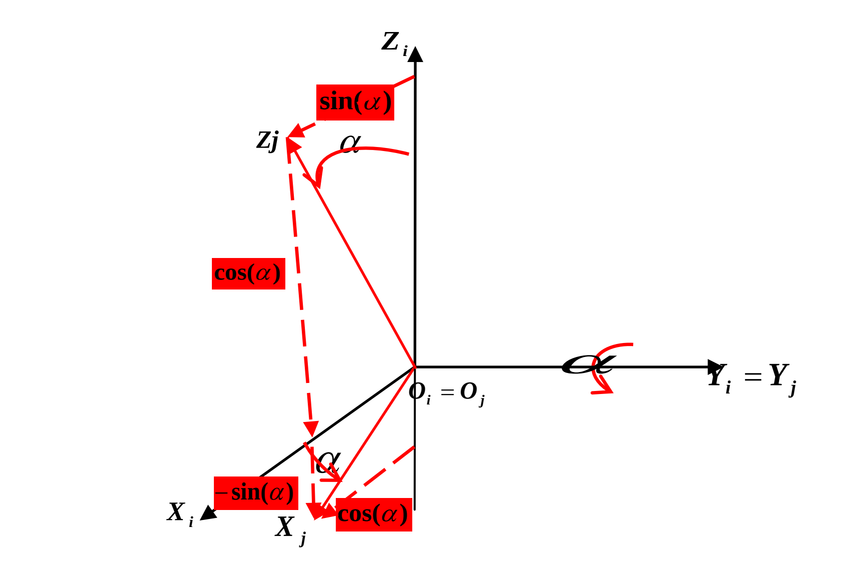

Figure II-7: Rotation pure autour de Y d'un angle α .

$$ {}^{i}\boldsymbol{T}_{j} = \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Y},\alpha) = \begin{bmatrix} c\alpha & 0 & s\alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\alpha & 0 & c\alpha & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-13)} $$

5.2.2. autour de l'axe Z d'un angle α : (**Figure II-8**)

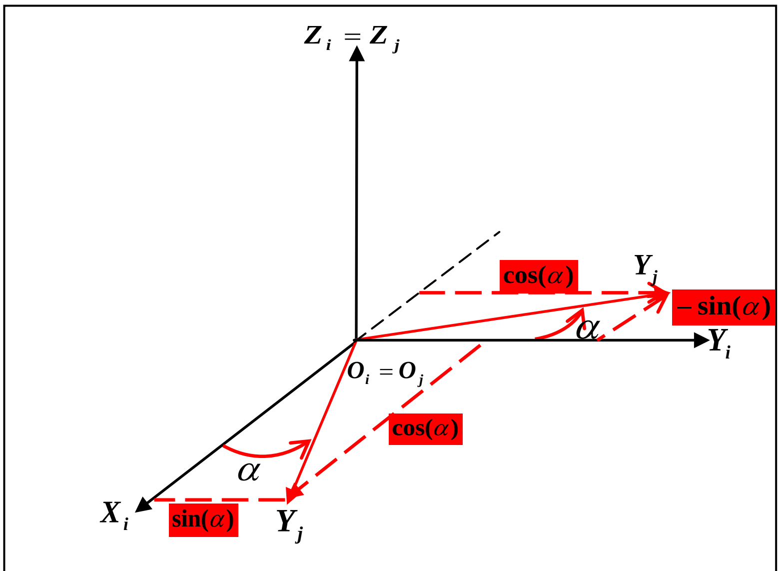

Figure II-7: Rotation pure autour de Z d'un angle α .

$$ {}^{i}\boldsymbol{T}_{j} = \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Z},\alpha) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c\alpha} & -\boldsymbol{s\alpha} & 0 & 0 \\ \boldsymbol{s\alpha} & \boldsymbol{c\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \qquad \text{(II-14)} $$

5.2.3. autour des axes X,Y et Z d'angles respectifs α, β ***et*** γ :

$$ {}^{i}\boldsymbol{T}_{j} = \boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{X},\alpha)\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Y},\beta)\boldsymbol{Rot}(\boldsymbol{Z},\gamma) \qquad \text{(II-15)} $$

5.3. MTH décrivant une Transformation combinée (Translation et /ou Rotation):

$$ {}^{i}T_{j} = \begin{bmatrix} s_x & n_x & a_x & P_X \\ s_y & n_y & a_y & P_Y \\ s_z & n_z & a_z & P_Z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Matrice de Rotation : A ***colonne de Translation : P***

- S'il s'agit d'une Translation pure : $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Identit\acute{e}}_{3*3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- S'il s'agit d'une Rotation pure : $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Matrice\ Colonne\ Nulle}_{3*1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Bibliographie :

[1] Wissama khalil et Etienne Dombre. « Modélisation, identification et commandes des robots », HERMESS Science Publications, Paris,1988,1999.

[2] T. Chateau. « Eléments de Robotique », Université Blaise Pascal, 2012/2013

6. Exercices :

6.1. Donnez l'expression littérale et la valeur numérique de la MTH permettant d'effectuer les transformations suivantes:

- $^{i}\boldsymbol{T}_j = \boldsymbol{Trans(X,a)}$ ***avec*** $\boldsymbol{a} = 2$ ***cm***
- $^{i}\boldsymbol{T}_j = \boldsymbol{Rot(Z,\alpha)}$ ***avec*** $\alpha = 45^\circ$
- $^{i}\boldsymbol{T}_j = \boldsymbol{Rot(X,\alpha) * Rot(Y,\beta) * Rot(Z,\gamma)}$ ***avec*** $\alpha = 10°$ **,** $\beta = 15°$ ***et*** $\gamma = 20°$

6.2. A quoi correspondent les MTH suivantes :

$$^{i}\boldsymbol{T}_j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c\alpha} & 0 & \boldsymbol{s\alpha} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -\boldsymbol{s\alpha} & 0 & \boldsymbol{c\alpha} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \; ; \; ^{i}\boldsymbol{T}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \boldsymbol{c\alpha} & -\boldsymbol{s\alpha} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{s\alpha} & \boldsymbol{c\alpha} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \; ; \; ^{i}\boldsymbol{T}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

6.3. Soit la transformation suivante :

- Donnez son expression littérale en composant les quatre mouvements directs suivants :

$$^{j-1}\boldsymbol{T}_j = \boldsymbol{Rot(X,\alpha_j) * Trans(X,d_j) * Rot(Z,\theta_j) * Trans(Z,r_j)}$$

- Donnez son expression littérale **inverse** et ses quatre mouvements inverses conséquents.