Université Larbi Ben M'hidi, Oum el Bouaghi
Master 1 Mathématiques Appliquées   Module: Partial differential equations
Série TD 1 : Généralités sur Les équations aux dérivées partièlles
"Orthogonalité et problèmes de Sturm Liouville"

Exercice 1:

1. Montrer que l'ensemble des fonctions suivante est orthogonal par rapport au fonction du poids w sur l'intervalle $[-1,\ 1]$

$$1,\ 2x,\ \ -1+4x^2; \quad \text{avec } w(x)=\sqrt{1-x^2}.$$

2. Montrer que l'ensemble de fonctions

$$1,\ \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right),\ \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right),...,\ \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right),\ \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right),...\ m\in\mathbb{N} \qquad (1)$$

forme un ensemble orthogonal dans $[-l;l]$.

3. Déterminer les constantes de normalisation correspondantes pour que l'ensemble (1) soit orthonormé dans $[-l,l]$.

Exercice 2:

1. Vérifier que le système suivant

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=0, \quad y(1)=0; \end{cases}$$

est un système de Sturm-Liouville.

2. Trouver les valeurs propres et les fonctions propres.

3. Montrer que les fonctions propres sont orthogonales dans $[0,1]$.

4. Trouver l'ensemble des fonctions propres normalisées correspondantes.

5. Développer la fonction $f(x)=1$ en série de ces fonctions orthonormées.

Exercice 3:

1. Résoudre les problèmes de Sturm-Liouville suivants:

$$(\text{Pr } 1):\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=0, \quad y(\pi)=0. \end{cases} \qquad (\text{Pr } 2):\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=0, \quad y'(\frac{\pi}{2})=0. \end{cases}$$

$$(\text{Pr } 3):\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3y'(x)\right)+\lambda xy(x)=0 \\ y(1)=0, \quad y(e)=0. \end{cases} \qquad (\text{Pr } 4):\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)+y'(0)=0,\ y(1)=0. \end{cases}$$

$$(\text{Pr } 5):\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)+y'(0)=0,\ y(1)+y'(1)=0. \end{cases} \qquad (\text{Pr } 6):\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=0,\ y(1)+y'(1)=0. \end{cases}$$

2. Mettre les équations données sous forme Sturm Liouville et décider que le problème est régulier ou singulier.

$$(\text{Pr } 7): xy''+y'+\lambda y=0; \qquad y(0)=0, \quad y(1)=0,$$
$$(\text{Pr } 8): xy''-y'+\lambda xy=0; \qquad y(0)=0, \quad y(1)=0,$$
$$(\text{Pr } 9): (1-x^2)\,y''-2xy'+(1+\lambda x)\,y=0; \qquad y(-1)=0, \quad y(1)=0.$$

Par: Dr OUSSAEIF Taki Eddine

Université Larbi Ben M'hidi, Oum el Bouaghi
Master 1 Mathématiques Appliquées   Module: Partial differential equations
Série TD 2 : Les équations elliptiques

Exercice 1: Résoudre en utilisant la méthode de séparation de variables le problème de Dirichlet intérieur au rectangle:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < y < H$$

avec les conditions aux limites:

$$\begin{cases} u(0,y) = g(y), & u(L,y) = 0 \\ u(x,0) = 0, & u(x,H) = 0. \end{cases}$$

Exercice 2: Résoudre l'équation de Laplace dans le domaine rectangulaire: $0 < x < L$, $0 < y < H$ avec les conditions aux limites:

a)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = g(y), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L,y) = 0 \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,H) = 0. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}(L,y) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,H) = 0, \ u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad 0 < x < \frac{L}{2} \\ 0 & \text{pour} \quad \frac{L}{2} < x < L \end{cases} \end{cases}$$

Exercice 3: Résoudre:

$$(\text{Pr } 1) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = 100, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 100, & 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

$$(\text{Pr } 2) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ u(x,0) = 1 - x, \quad u(x,1) = x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u(0,y) = 0, \quad u(1,y) = 0, & 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

Exercice 4: Résoudre l'équation de Laplace dans le cercle $0 \leqslant \rho \leqslant 1, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$:

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \\ u(\rho, -\pi) = u(\rho, \pi), \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1 \\ u(1,\theta) = f(\theta), \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

Exercice 5: Résoudre l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad \rho \geqslant 1$$
$$u(1,\theta) = f(\theta), \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

Exercice 6: Résoudre le problème elliptique suivant:

$$\begin{cases} \Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \quad 1 < \rho < 2, \quad 0 < \theta < \pi \\ u(\rho,0) = u(\rho,\pi) = 0, \quad 1 \leqslant \rho \leqslant 2 \\ u(1,\theta) = \sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \\ u(2,\theta) = 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \end{cases}$$

Par: Dr OUSSAEIF Taki Eddine

Série TD 3 : Les équations hyperboliques

Exercice 1: Résoudre l'équation d'onde avec les conditions initiales et limites suivantes:

$$(\text{Pr } 1) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(1,t) = 0, \qquad t > 0 \\ u(x,0) = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right). \end{cases}$$

Exercice 2: Résoudre:

$$(\text{Pr } 2) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2, \ 0 < x < \pi, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 2x(x-\pi) + 3, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 3. \end{cases} \quad (\text{Pr } 3) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{4}{x}\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x}), \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \ t > 0, \\ u(x,0) = 5J_0(\alpha_3 x), \\ u(1,t) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = 0. \end{cases}$$

Où $J_0(z)$ fonction de Bessel d'ordre zero et α_n est $n^{\text{ème}}$ zéro de $J_0(z)$.

Exercice 3: Résoudre sur le domaine $0 < x < \pi, \quad t > 0$:

$$(\text{Pr } 4) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t\sin x, \\ u(x,0) = x(\pi - x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0. \end{cases} ; \quad (\text{Pr } 5) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t\sin x, \\ u(x,0) = x(\pi - x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \pi^2, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = \pi^2 t. \end{cases}$$

Exercice 4: Déterminer la solution formelle $u(x,y,t)$ du problème suivant:

$$(\text{Pr } 6) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad 0 < x, y < 1, \quad t > 0, \\ u(x,y,0) = \sin\pi x \sin\pi y, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = \sin\pi x, \\ u(0,y,t) = u(1,y,t) = 0, \\ u(x,0,t) = u(x,1,t) = 0. \end{cases}$$

Exercice 5: Une onde de pression générée en conséquence d'une explosion satisfait l'équation:

$$P_{tt} - 16P_{xx} = 0$$

dans le domaine $\{-\infty < x < +\infty, \ t > 0\}$, $P(x,t)$ est la pression au point x a l'instant t. Les conditions initiales au moment de l'explosion $t = 0$ sont

$$P(x,0) = \begin{cases} 10 & |x| \leqslant 1, \\ 0 & |x| > 1, \end{cases}$$

$$P_t(x,0) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant 1, \\ 0 & |x| > 1. \end{cases}$$

Un bâtiment est situé au point $x_0 = 10$. L'ingénieur qui a conçu le bâtiment a déterminé qu'il supporterait une pression jusqu'à $P = 6$. Trouver l'heure t_0 lorsque la pression sur le bâtiment est maximale. Est ce que le bâtiment va s'effondrer.

Exercice 6: Utilisant la formule de d'Alembert pour trouver une solution du problème suivant:

$$\text{Pr } 7 : \begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 1; \ -\infty < x < +\infty, \ t > 0 \\ u(x,0) = x^2, \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1. \end{cases}$$

Par: Dr OUSSAEIF Taki Eddine

Université Larbi Ben M'hidi, Oum el Bouaghi
Master 1 Mathématiques Appliquées Module: Partial differential equations
Série TD 4 : Les équations paraboliques et hyperboliques

Exercice 1:
Résoudre en utilisant la méthode de séparation de variables le problème avec les conditions initiales et limites suivant:

$$(\text{Pr } 1) : \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos 2\pi x \cos 2\pi t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0) = (\cos \pi x)^2 \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 2\cos 2\pi x \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 \quad t \geqslant 0. \end{cases}$$

Exercice 2:
Résoudre en utilisant la méthode de D'Alembert, le problème suivant:

$$(\text{Pr } 2) : \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x < \infty, \\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x < \infty, \\ u_x(0,t) = 0 \ , \ 0 \leq t < \infty \end{cases}$$

Exercice 3:
Résoudre l'équation parabolique avec les conditions initiales et limites suivantes:

$$(\text{Pr } 3) : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(x,0) = 3\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right) \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0 \end{cases}$$

Exercice 4:
Résoudre l'équation parabolique non homogène avec les conditions initiales et limites suivantes:

$$(\text{Pr } 4) : \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x \exp(-2t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \quad t > 0 \end{cases}$$

Exercice 5:
Résoudre en utilisant la méthode de séparation de varriables le problème suivant:

$$(\text{Pr } 5) : \begin{cases} u_t = u_{xx} - u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \ , \\ u(x,0) = x(2-x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

Par: Dr OUSSAEIF Taki Eddine