

méthodes d'analyses appliquées aux sciences de la
vie

Comparaison de Moyennes et de Variances

Plan du cours

- **Rappel---Généralités**
- **I. Comparaison de variances**
- **II. Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique**
 - Test Z de l'écart réduit
 - Test t de Student
- **III. Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons indépendants**
 - Test Z de l'écart réduit
 - Test t de Student
- **IV. Comparaison de 2 moyennes observées sur 2 échantillons appariés**
 - Test Z de l'écart réduit
 - Test t de Student

Rappel

- Principe d'un test statistique
- Cas des variables continues / quantitatives
 - Ages
 - Notes
 - Paramètres biologiques
 - Etc ...



**Moyenne, médiane, écart type
variance**

Rappel---Généralités

- Situation du problème :
 - On dispose d'une variable qualitative binaire (Sexe : Homme vs Femme) qui permet de définir deux groupes de population.
 - On mesure une variable quantitative (note à des examens) qui permet de calculer dans chaque groupe les différents paramètres de la distribution : moyenne, estimateur de l'écart type...

I --- Comparaison de variances

I --- Comparaison de variances

- **Variance** = moyenne des carrés des écarts à la moyenne
- Somme des carrés d'écart à la moyenne $\sum e_i^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2$

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

- Rapporté à l'effectif
 - Échantillon $s^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-1}$
 - Population $\sigma^2 = \frac{\sum e_i^2}{N}$
- Ecart type = racine carrée de la variance

I--- Comparaison de variances

- La comparaison de la variance est un outil essentiel en statistique.
- Supposons que nous disposons de p échantillons gaussiens indépendants de tailles respectives $n_1; \dots; n_p$.
- On peut pour chaque échantillon, calculer un estimateur sans biais de la variance de la population.
- Par exemple, pour le k ème échantillon, un estimateur sans biais de la variance de population σ_k^2 est donné par:

$$\hat{\sigma}_k^2 = \frac{1}{n_k - 1} \sum_{i=1}^{n_k} (X_i^k - \bar{X}^k)^2$$

- où est X_i^k la i ème donnée de l'échantillon k , et, \bar{X}^k est la moyenne de l'échantillon k .

I--- Comparaison de variances

- Intérêt de comparer deux variances :
 - Comparer 2 moyennes lorsque les échantillons sont petits et qu'on utilise le test t de Student pour vérifier l'égalité des variances
 - Comme une fin en soi lorsque la question est centrée sur variabilité : i.e comparer la précisions de 2 méthodes de laboratoires quantifiant un paramètre sanguin

I--- Comparaison de variances

- Comparaison de 2 variances peut être basée
 - Sur leur différence si les échantillons sont grands
 - Un test plus général basé sur le **rapport de leurs 2 variances** dans étude préalable des fluctuations d'échantillonnage du rapport de 2 variances, celles-ci différant significativement si le rapport s'écarte trop de 1.

I --- Comparaison de variances

- Rapport de 2 variances

- Tirage au sort de , 2 échantillons n_A et n_B issues de 2 populations qui ont la même variance σ^2
- Variances estimées S_A^2 et S_B^2 doivent être proches de σ^2
- Rapport $F = \frac{S_A^2}{S_B^2}$ dont la valeur théorique est proche de 1 sous l'hypothèse H_0 d'égalité des variances
- Fluctuations d'échantillonnage : intervalle de confiance du rapport F : F_{sup} et F_{inf}

I --- Comparaison de variances

- Solution grâce **aux tables F** qui permettent de déterminer les limites de l'Intervalle de Confiance F_{sup} et F_{inf} pour les différents risques d'erreur alpha (α) de première espèce en fonction des degrés de liberté (d.d.l) : $n_A - 1$ et $n_B - 1$
- Test de comparaison F doit rester compris dans les limites F_{sup} et F_{inf} , pour le risque α déterminé-choisi en général 5%
- Condition d'utilisation de ces tables :
 - distribution normale quel que soit la taille de l'échantillon.

I --- Comparaison de variances

- Nous disposons de 2 échantillons (n_A et n_B) extraits de 2 populations dont la distribution de la variable étudiée est supposée suivre une loi normale
 - 2 variances estimées S_A^2 et S_B^2
- Question : peut on admettre que les variances des 2 populations σ_A^2 et σ_B^2 sont égales ?
 - **Hypothèse nulle H_0** $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$
 - **Hypothèse alternative H_1** $\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$
- Si l'hypothèse nulle H_0 est vérifiée, le rapport $F = \frac{S_A^2}{S_B^2}$ doit rester dans les limites F_{sup} et F_{inf} pour un risque global de 5 %
- S'il sort de cet intervalle = les variances diffèrent on rejette H_0 et on accepte

I --- Comparaison de variances

- Etapes du calcul
 - Estimation de chacune des variances dans l'échantillon A et B
 - Recherche des limites F_{sup} et F_{inf} dans les tables du F à 2,5% (ie risque global de 5%)
 - F_{sup} pour un échantillon A de 25 pts et B de 30 pts est $F_{29}^{24} = 2.15$
 - $F_{inf} = \frac{1}{\frac{1}{F_{24}^{29}}} = \frac{1}{2.22} = 0.45$
 - L'IC est donc 0.45 – 2.15
 - Les variances S_A^2 et S_B^2 sont respectivement 5.16 et 1.96
- Donc $F = \frac{S_A^2}{S_B^2} = \frac{5.16}{1.96} = 2.63$

F_{sup} pour un échantillon A de 25 pts et B de 30 pts est $F^{24}_{29} = 2.15$

Table A4. Upper percentage points of the F distribution with ν_1, ν_2 df

(b) 2.5% points

ν_2	ν_1 —df for the numerator																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	
1	647.790	799.502	864.165	899.585	921.850	937.113	948.219	956.658	963.286	968.629	976.710	984.869	993.105	997.251	1001.416	1005.600	1009.802	1014.022	1018.260	
2	38.506	39.000	39.166	39.248	39.298	39.331	39.355	39.373	39.387	39.398	39.415	39.431	39.448	39.456	39.465	39.473	39.481	39.490	39.498	
3	17.4435	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4190	14.3366	14.2827	14.1674	14.1242	14.0805	14.0365	13.9921	13.9473	13.9021	
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439	8.7512	8.6565	8.5599	8.5109	8.4613	8.4111	8.3604	8.3092	8.2573	
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192	6.5246	6.4277	6.3286	6.2780	6.2269	6.1751	6.1225	6.0693	6.0153	
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613	5.3662	5.2687	5.1684	5.1172	5.0652	5.0125	4.9589	4.9044	4.8491	
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611	4.6658	4.5678	4.4667	4.4150	4.3624	4.3089	4.2544	4.1989	4.1423	
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951	4.1997	4.1012	3.9995	3.9472	3.8940	3.8398	3.7844	3.7279	3.6702	
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639	3.8682	3.7694	3.6669	3.6142	3.5604	3.5055	3.4493	3.3918	3.3329	
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168	3.6209	3.5217	3.4185	3.3654	3.3110	3.2554	3.1984	3.1399	3.0798	
11	6.7241	5.2559	4.6300	4.2751	4.0440	3.8807	3.7586	3.6638	3.5879	3.5257	3.4296	3.3299	3.2261	3.1725	3.1176	3.0613	3.0035	2.9441	2.8828	
12	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358	3.3736	3.2773	3.1772	3.0728	3.0187	2.9633	2.9063	2.8478	2.7874	2.7249	
13	6.4143	4.9653	4.3472	3.9959	3.7667	3.6043	3.4827	3.3880	3.3120	3.2497	3.1532	3.0527	2.9477	2.8932	2.8372	2.7797	2.7204	2.6590	2.5955	
14	6.2979	4.8567	4.2417	3.8919	3.6634	3.5014	3.3799	3.2853	3.2093	3.1469	3.0502	2.9493	2.8437	2.7888	2.7324	2.6742	2.6142	2.5519	2.4872	
15	6.1995	4.7650	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227	3.0602	2.9633	2.8621	2.7559	2.7006	2.6437	2.5850	2.5242	2.4611	2.3954	
16	6.1151	4.6867	4.0768	3.7294	3.5021	3.3406	3.2194	3.1248	3.0488	2.9862	2.8890	2.7875	2.6808	2.6252	2.5678	2.5085	2.4471	2.3831	2.3163	
17	6.0420	4.6189	4.0112	3.6648	3.4379	3.2767	3.1556	3.0610	2.9849	2.9222	2.8249	2.7230	2.6158	2.5598	2.5020	2.4422	2.3801	2.3153	2.2474	
18	5.9781	4.5597	3.9539	3.6083	3.3820	3.2209	3.0999	3.0053	2.9291	2.8664	2.7689	2.6667	2.5590	2.5027	2.4445	2.3842	2.3214	2.2558	2.1869	
19	5.9216	4.5075	3.9034	3.5587	3.3327	3.1718	3.0509	2.9563	2.8801	2.8172	2.7196	2.6171	2.5089	2.4523	2.3937	2.3329	2.2696	2.2032	2.1333	
20	5.8715	4.4613	3.8587	3.5147	3.2891	3.1283	3.0074	2.9128	2.8365	2.7737	2.6758	2.5731	2.4645	2.4076	2.3486	2.2873	2.2234	2.1562	2.0853	
21	5.8266	4.4199	3.8188	3.4754	3.2501	3.0895	2.9686	2.8740	2.7977	2.7348	2.6368	2.5338	2.4247	2.3675	2.3082	2.2465	2.1819	2.1141	2.0422	
22	5.7863	4.3828	3.7829	3.4401	3.2151	3.0546	2.9338	2.8392	2.7628	2.6998	2.6017	2.4984	2.3890	2.3315	2.2718	2.2097	2.1446	2.0760	2.0032	
23	5.7498	4.3492	3.7505	3.4083	3.1835	3.0232	2.9023	2.8077	2.7313	2.6682	2.5699	2.4665	2.3567	2.2989	2.2389	2.1763	2.1107	2.0415	1.9677	
24	5.7166	4.3187	3.7211	3.3794	3.1548	2.9946	2.8738	2.7791	2.7027	2.6396	2.5411	2.4374	2.3273	2.2693	2.2090	2.1460	2.0799	2.0099	1.9353	
25	5.6864	4.2909	3.6943	3.3530	3.1287	2.9685	2.8478	2.7531	2.6766	2.6135	2.5149	2.4110	2.3005	2.2422	2.1816	2.1183	2.0516	1.9811	1.9055	
26	5.6586	4.2655	3.6697	3.3289	3.1048	2.9447	2.8240	2.7293	2.6528	2.5896	2.4908	2.3867	2.2759	2.2174	2.1565	2.0928	2.0257	1.9545	1.8781	
27	5.6331	4.2421	3.6472	3.3067	3.0828	2.9228	2.8021	2.7074	2.6309	2.5676	2.4688	2.3644	2.2533	2.1946	2.1334	2.0693	2.0018	1.9299	1.8527	
28	5.6096	4.2205	3.6264	3.2863	3.0626	2.9027	2.7820	2.6872	2.6106	2.5473	2.4484	2.3438	2.2324	2.1735	2.1121	2.0477	1.9797	1.9072	1.8291	
29	5.5878	4.2006	3.6072	3.2674	3.0438	2.8840	2.7633	2.6686	2.5920	2.5286	2.4295	2.3248	2.2131	2.1540	2.0923	2.0276	1.9591	1.8861	1.8072	
30	5.5675	4.1821	3.5894	3.2499	3.0265	2.8667	2.7460	2.6513	2.5746	2.5112	2.4120	2.3072	2.1952	2.1359	2.0739	2.0089	1.9400	1.8664	1.7867	
40	5.4239	4.0510	3.4633	3.1261	2.9037	2.7444	2.6238	2.5289	2.4519	2.3882	2.2882	2.1819	2.0677	2.0069	1.9429	1.8752	1.8028	1.7242	1.6371	
60	5.2856	3.9253	3.3425	3.0077	2.7863	2.6274	2.5068	2.4117	2.3344	2.2702	2.1692	2.0613	1.9445	1.8817	1.8152	1.7440	1.6668	1.5810	1.4822	
120	5.1523	3.8046	3.2269	2.8943	2.6740	2.5154	2.3948	2.2994	2.2217	2.1570	2.0548	1.9450	1.8249	1.7597	1.6899	1.6141	1.5299	1.4327	1.3105	
∞	5.0239	3.6889	3.1161	2.7858	2.5665	2.4082	2.2876	2.1918	2.1137	2.0483	1.9447	1.8326	1.7085	1.6402	1.5660	1.4836	1.3883	1.2685	1.0039	



$$F_{inf} = \frac{1}{F_{29}} = \frac{1}{2.22} = 0.45$$



Table A4. Upper percentage points of the F distribution with ν_1, ν_2 df

(b) 2.5% points

ν_2	ν_1 —df for the numerator																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	647.790	799.502	864.165	899.585	921.850	937.113	948.219	956.658	963.286	968.629	976.710	984.869	993.105	997.251	1001.416	1005.600	1009.802	1014.022	1018.260
2	38.506	39.000	39.166	39.248	39.298	39.331	39.355	39.373	39.387	39.398	39.415	39.431	39.448	39.456	39.465	39.473	39.481	39.490	39.498
3	17.4435	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4190	14.3366	14.2527	14.1674	14.1242	14.0805	14.0365	13.9921	13.9473	13.9021
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439	8.7512	8.6565	8.5599	8.5109	8.4613	8.4111	8.3604	8.3092	8.2573
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192	6.5246	6.4277	6.3286	6.2780	6.2269	6.1751	6.1225	6.0693	6.0153
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6935	5.5996	5.5234	5.4613	5.3662	5.2687	5.1684	5.1172	5.0652	5.0125	4.9589	4.9044	4.8491
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2832	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611	4.6658	4.5678	4.4667	4.4150	4.3624	4.3089	4.2544	4.1989	4.1423
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951	4.1997	4.1012	3.9995	3.9472	3.8940	3.8398	3.7844	3.7279	3.6702
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639	3.8682	3.7694	3.6689	3.6142	3.5604	3.5055	3.4493	3.3918	3.3329
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168	3.6209	3.5217	3.4185	3.3654	3.3110	3.2554	3.1984	3.1399	3.0798
11	6.7241	5.2559	4.6300	4.2751	4.0440	3.8807	3.7586	3.6638	3.5879	3.5257	3.4296	3.3299	3.2261	3.1725	3.1176	3.0613	3.0035	2.9441	2.8828
12	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358	3.3736	3.2773	3.1772	3.0728	3.0187	2.9633	2.9063	2.8478	2.7874	2.7249
13	6.4143	4.9653	4.3472	3.9959	3.7667	3.6043	3.4827	3.3880	3.3120	3.2497	3.1532	3.0527	2.9477	2.8932	2.8372	2.7797	2.7204	2.6590	2.5955
14	6.2979	4.8567	4.2417	3.8919	3.6634	3.5014	3.3799	3.2853	3.2093	3.1469	3.0502	2.9493	2.8437	2.7888	2.7324	2.6742	2.6142	2.5519	2.4872
15	6.1995	4.7650	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227	3.0602	2.9633	2.8621	2.7559	2.7006	2.6437	2.5850	2.5242	2.4611	2.3954
16	6.1151	4.6867	4.0768	3.7294	3.5021	3.3406	3.2194	3.1248	3.0488	2.9862	2.8890	2.7875	2.6808	2.6252	2.5678	2.5085	2.4471	2.3831	2.3163
17	6.0420	4.6189	4.0112	3.6648	3.4379	3.2767	3.1556	3.0610	2.9849	2.9222	2.8249	2.7230	2.6158	2.5598	2.5020	2.4422	2.3801	2.3153	2.2474
18	5.9781	4.5597	3.9539	3.6083	3.3820	3.2209	3.0999	3.0053	2.9291	2.8664	2.7689	2.6667	2.5590	2.5027	2.4445	2.3842	2.3214	2.2558	2.1869
19	5.9216	4.5075	3.9034	3.5587	3.3327	3.1718	3.0509	2.9563	2.8801	2.8172	2.7196	2.6171	2.5089	2.4523	2.3937	2.3329	2.2696	2.2032	2.1333
20	5.8715	4.4613	3.8587	3.5147	3.2891	3.1283	3.0074	2.9128	2.8365	2.7737	2.6758	2.5731	2.4645	2.4076	2.3486	2.2873	2.2234	2.1562	2.0853
21	5.8266	4.4199	3.8188	3.4754	3.2501	3.0895	2.9686	2.8740	2.7977	2.7348	2.6368	2.5338	2.4247	2.3675	2.3082	2.2465	2.1819	2.1141	2.0422
22	5.7863	4.3828	3.7829	3.4401	3.2151	3.0546	2.9338	2.8392	2.7628	2.6998	2.6017	2.4984	2.3890	2.3315	2.2718	2.2097	2.1446	2.0760	2.0032
23	5.7498	4.3492	3.7505	3.4083	3.1835	3.0232	2.9023	2.8077	2.7313	2.6682	2.5699	2.4665	2.3567	2.2989	2.2389	2.1763	2.1107	2.0415	1.9677
24	5.7166	4.3187	3.7211	3.3794	3.1548	2.9946	2.8738	2.7791	2.7027	2.6396	2.5411	2.4374	2.3273	2.2693	2.2090	2.1460	2.0799	2.0099	1.9353
25	5.6864	4.2909	3.6943	3.3530	3.1287	2.9685	2.8478	2.7531	2.6766	2.6135	2.5149	2.4110	2.3005	2.2422	2.1816	2.1183	2.0516	1.9811	1.9055
26	5.6586	4.2655	3.6697	3.3289	3.1048	2.9447	2.8240	2.7293	2.6528	2.5896	2.4908	2.3867	2.2759	2.2174	2.1565	2.0928	2.0257	1.9545	1.8781
27	5.6331	4.2421	3.6472	3.3067	3.0828	2.9228	2.8021	2.7074	2.6309	2.5676	2.4688	2.3644	2.2533	2.1946	2.1334	2.0693	2.0018	1.9299	1.8527
28	5.6096	4.2205	3.6264	3.2863	3.0626	2.9027	2.7820	2.6872	2.6106	2.5473	2.4484	2.3438	2.2324	2.1735	2.1121	2.0477	1.9797	1.9072	1.8291
29	5.5878	4.2006	3.6072	3.2674	3.0438	2.8840	2.7633	2.6686	2.5920	2.5286	2.4295	2.3248	2.2131	2.1540	2.0923	2.0276	1.9591	1.8861	1.8072
30	5.5675	4.1821	3.5894	3.2499	3.0265	2.8667	2.7460	2.6513	2.5746	2.5112	2.4120	2.3072	2.1952	2.1359	2.0739	2.0089	1.9400	1.8664	1.7867
40	5.4239	4.0510	3.4633	3.1261	2.9037	2.7444	2.6238	2.5289	2.4519	2.3882	2.2882	2.1819	2.0677	2.0069	1.9429	1.8752	1.8028	1.7242	1.6371
60	5.2856	3.9253	3.3425	3.0077	2.7863	2.6274	2.5068	2.4117	2.3344	2.2702	2.1692	2.0613	1.9445	1.8817	1.8152	1.7440	1.6668	1.5810	1.4822
120	5.1523	3.8046	3.2269	2.8943	2.6740	2.5154	2.3948	2.2994	2.2217	2.1570	2.0548	1.9450	1.8249	1.7597	1.6899	1.6141	1.5299	1.4327	1.3105
∞	5.0239	3.6889	3.1161	2.7858	2.5665	2.4082	2.2876	2.1918	2.1137	2.0483	1.9447	1.8326	1.7085	1.6402	1.5660	1.4836	1.3883	1.2685	1.0039



I --- Comparaison de variances

- Conclusion 2.63 est supérieur à F_{sup} donc au seuil de 5% les 2 variances diffèrent significativement on rejette **H0**
- Plus de variabilité dans l'échantillon A
- Résultats identiques si on avait travaillé sur le rapport $F = \frac{S_B^2}{S_A^2}$

II --- Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

II --- Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

• Formulation de la problématique

– La moyenne des notes d'un échantillon d'étudiants de PACES en 2012 en FC est elle différente de la moyenne de l'ensemble des étudiants de PACES en France?

– $H_0 : \mu = \mu_0$

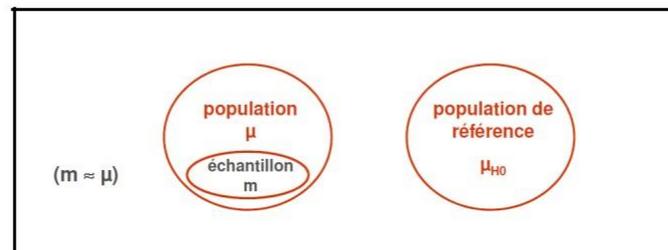
– $H_1 : \mu \neq \mu_0$



--- Test Z de l'écart réduit ($n \geq 30$)

--- Test t de Student (hypothèse de normalité)

– La moyenne de l'échantillon est $m =$ estimation de μ



II --- Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- **Grands échantillons $n \geq 30$**

- La comparaison d'une moyenne m , observée sur n personnes/cas (échantillon), à une valeur moyenne théorique μ_0 est basée sur l'estimation de l'écart réduit

- $$Z = \frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

- S : écart type de l'échantillon

- Si $|Z| < 1.96$ la différence entre les moyennes m et μ_0 n'est pas significative à 5 % ie non rejet de H_0
- Si $|Z| \geq 1.96$ la différence entre les moyennes m et μ_0 est significative à 5 % ie rejet de H_0
- Le Risque Z est lu dans la table de l'écart réduit (ie ici valeur 1.96 pour 5%)

II --- Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- Test Z de l'écart réduit
 - Sous H_0 :
 - $\mu = \mu_0$ donc $\mu - \mu_0 = 0$
 - m estimation de μ sur l'échantillon
 - Si $n \geq 30$ alors m suit une loi normale $N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$
 - $\Rightarrow m - \mu_0$ suit une loi normale centrée réduite $N(0, \sigma/\sqrt{n})$
 - S^2 est une estimation de σ^2

II --- Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- Soit un échantillon de 30 étudiants âgés de 18 ans et dont la moyenne des notes est de 43.5 sur 100.
 - *Sur le critère de la moyenne l'échantillon peut-il provenir d'une population P dont la moyenne est 44 et de $\sigma^2 = 2.54^2$?*
- Choix du test et vérification des conditions d'utilisation
 - On veut comparer la moyenne d'un échantillon à la moyenne d'une population P de référence
 - La taille de l'échantillon est ≥ 30 et sa moyenne suit une loi normale

II --- Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- La variable centrée réduite $Z = \frac{m - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ suit une loi normale centrée réduite $N(0,1)$
- On définit H_0 et H_1
 - $H_0 : \mu = \mu_0$
 - $H_1 : \mu \neq \mu_0$
- On fixe le risque α à 5%
- On cherche à savoir si $\mu \neq \mu_0$ que μ soit inférieure ou supérieure (**situation bilatérale**)
- **moyenne μ** de la population est estimée par la **moyenne m** de l'échantillon donc au final on test $m \neq \mu_0$

II --- Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

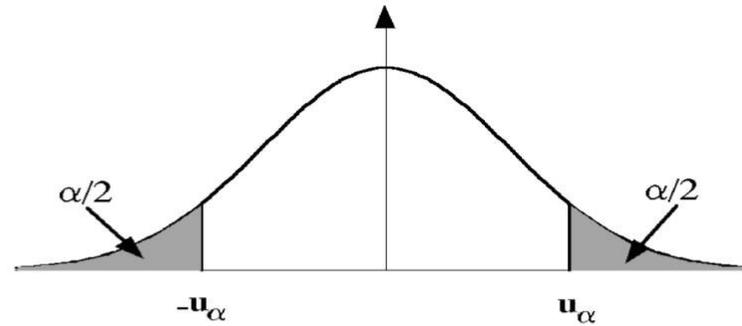
- On **rejettera H0 si $|Z| \geq 1.96$** et on acceptera H1
- Si **$|Z| < 1.96$ on ne rejettera pas H0**
- Calcul de la statistique

$$- Z = \frac{43.5 - 44}{2.54/\sqrt{30}} = - 1.078$$

- $|Z| = 1.078 < 1.96$ donc on ne rejette pas H0 ie la moyenne observée ne diffère pas significativement de la moyenne théorique
 - p = compris en **0.28 et 0.29** (table de l'écart réduit)
 - Donc l'échantillon peut provenir de cette population

Loi normale centrée réduite

Table de l'écart réduit



$$Z = \frac{43.5 - 44}{2.54/\sqrt{30}} = -1.078$$

La table donne la probabilité α pour que l'écart réduit dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée u , c'est-à-dire la probabilité de ne pas trouver z dans l'intervalle $[-u ; u]$ centré sur 0. Chaque ligne de chiffres hachurés correspondent à une probabilité égales $\alpha/2$. La probabilité d'observer z dans l'intervalle $[-u ; u]$ est évidemment $1 - \alpha$.

Test bilatéral : lire α

Test unilatéral à droite ou à gauche : diviser α par 2

α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,017	1,881	1,812	1,751	1,695	
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,059
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

II --- Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

-

- **Petits échantillons $n < 30$**

- Si la distribution de la variable aléatoire suit une **loi normale et la variance est connue** on revient au cas précédant de la loi centrée réduite avec le test Z

- $Z = \frac{\bar{m} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ suit une loi normale centrée réduite $N(0,1)$

II --- Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- **Petits échantillons $n < 30$**

- Si la distribution de la variable aléatoire suit une **loi normale** et la **variance est inconnue**

- **Test T de Student**

- La comparaison de la moyenne m observée sur n cas à une valeur théorique μ_0 est basée sur le rapport : $\frac{\mu - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$
- S désigne l'écart type estimé sur l'échantillon

II --- Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- Si $|t|$ est inférieur à la valeur lue dans la table de t (loi de Student) pour $ddl = n - 1$ et le risque 5%, la différence n'est pas significative (ie l'échantillon provient bien de la population au regard de la moyenne);
- Si $|t|$ est supérieur ou égal à la valeur lue dans la table de t (loi de Student) pour $ddl = n - 1$ et le risque 5%, la différence est significative
- Valeur $|t|$ trouvée dans la table de Student pour le risque fixé = degré de signification

II --- Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- La moyenne des notes de statistique en PACES est de 45/ 100 (μ_0)
- Chez 18 étudiants on trouve une moyenne (m) de 54/ 100 avec un écart type (s) de 9
 - Peut on conclure que la moyenne m de cet échantillon **est supérieur (test unilatéral)** à la moyenne habituelle /théorique μ_0 ?
 - La moyenne m des notes suit une loi normale

II --- Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- Choix du test et vérification des conditions d'utilisation
 - L'échantillon est petit ($n < 30$) mais la moyenne μ suit une loi normale dans la population dont est issue l'échantillon (test unilatéral)
 - La statistique $t = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ suit une loi normale de $18 - 1 = 17$ dll

II --- Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

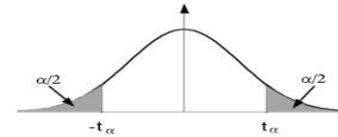
- Définir H_0 et H_1
 - $H_0 : \mu \leq \mu_0$
 - $H_1 : \mu > \mu_0$
- Fixer le risque alpha et définir la règle de décision
 - On s'intéresse seulement à savoir si $\mu > \mu_0$ donc situation unilatéral
 - Valeur seuil en situation bilatérale $t(2.5\%, 17 \text{ ddl}) = 2.11$
 - Valeur seuil en situation unilatérale $t(5\%, 17 \text{ ddl}) \geq 1.74$
 - Si H_1 avait été $\mu < \mu_0$ avec $H_0 : \mu \geq \mu_0$
 - Valeur seuil en situation unilatérale $t(5\%, 17 \text{ ddl}) \leq 1.74$

II --- Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

- Si $t = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \geq 1.74$ on rejette H_0 , on accepte H_1
- Si $t = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} < 1.74$ on ne rejette pas H_0
- Calcul de la statistique
 - $t = \frac{m - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{54 - 45}{\frac{9}{\sqrt{18}}} = \frac{9}{\frac{9}{4.24}} = 4.24$
 - **4.24 (t calculé) \geq 1.74 (t seuil)** on rejette H_0 , on accepte H_1 au risque de 5%
 - Au regard des résultats la moyenne de la population représentée par ces étudiants est supérieure à la moyenne habituelle
 - $p < 0,0005$ sur la table t de Student unilatéral

II --- Comparaison d'une moyenne observée à une moyenne théorique

TABLE DU t DE STUDENT



ddl \ α	0,45	0,25	0,15	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0005	TU
ddl \ α	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001	TB
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619	
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598	
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924	
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610	
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869	
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959	
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408	
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041	
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781	
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587	
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437	
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318	
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221	
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140	
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073	
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015	
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965	
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922	



$t = 4.24$
unilatéral
donc $p < 0.0005$