Cours d'Analyse Numérique Matricielle

1ère Année Master – Année Universitaire 2026/2027

Dr. Bousafsaf

17 octobre 2026

Table des matières

1 Rappels **5**
1.1 Espaces Vectoriels, Bases et Sous-Espaces 6
1.2 Produit scalaire canonique et orthogonalité 6
1.3 Applications linéaires et matrices 7
1.4 Matrice transposée et matrice adjointe 8
1.5 Produit matriciel et décomposition par blocs 8
1.6 Matrices carrées et classes particulières 10
1.7 Trace, Déterminant et Matrices de Permutation 11
1.7.1 La Trace d'une Matrice ($\mathrm{tr}(A)$) 11
1.7.2 Les Matrices de Permutation (P_σ) 11
1.7.3 Le Déterminant ($\det(A)$) 12
1.8 Valeurs propres, spectre et rayon spectral 13
1.9 Noyau, Image et Rang d'une Matrice 14
1.10 Réduction des Matrices 16
1.11 Valeurs Singulières et Décomposition SVD 19
1.12 Propriétés Variationnelles des Matrices Hermitiennes 22

Chapitre 1

Rappels

Introduction Générale

L'analyse numérique matricielle est la branche des mathématiques appliquées qui étudie la conception, la recherche et l'analyse d'algorithmes pour résoudre des problèmes d'algèbre linéaire continue (systèmes d'équations, calculs de valeurs propres, moindres carrés) à l'aide d'ordinateurs.

En pratique, la recherche d'une solution analytique exacte est souvent impossible ou trop coûteuse lorsque la taille des données devient importante. L'objectif principal de ce cours est de fournir des méthodes d'approximation fiables en garantissant deux impératifs : la **précision des résultats** et l'**efficacité calculatoire**.

1.1 Espaces Vectoriels, Bases et Sous-Espaces

Définition 1.1.1 (Espace vectoriel et représentation en base)**.** Soit V un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une **base** de V est un ensemble de n vecteurs linéairement indépendants $(e_i)_{i=1}^n$. Tout vecteur $v \in V$ admet une décomposition unique :

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i$$

Les scalaires $v_i \in K$ sont les **composantes** du vecteur v dans la base (e_i).

Définition 1.1.2 (Vecteurs colonnes, transposée et adjointe)**.** En notation matricielle, le vecteur v est représenté par le vecteur colonne :

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

On désigne par v^T et v^* les vecteurs lignes :

$$v^T = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \quad \text{et} \quad v^* = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n)$$

où v^T est le **vecteur transposé** et v^* est le **vecteur adjoint** (transposé conjugué), $v^T = v^*$ dans le cas réel ($K = \mathbb{R}$).

Exemple 1.1.1.

1. Soit $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, la base de $\mathbb{R}^3$ et $(e_i)_{i=1}^3$ où $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
   On a $v = 2e_1 + 4e_2 - 5e_3$ et l'écriture est unique tel que $v_1 = 2, v_2 = 4, v_3 = -5 \in \mathbb{K}$
2. Soit $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a $v^T = (2, -5, 3)$ et $v^* = v^T = (2, -5, 3)$.
3. Soit $w = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 1-i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. On a $w^T = (2+3i, 1-i)$ et $w^* = (2-3i, 1+i)$.

1.2 Produit scalaire canonique et orthogonalité

Définition 1.2.1 (Produit scalaire canonique)**.** L'application $(\cdot, \cdot) : V \times V \to K$ définie par :

$$(u, v) = v^T u = u^T v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \quad \text{si } K = \mathbb{R} \quad \text{(produit scalaire euclidien)}$$

$$(u, v) = v^* u = \overline{u^* v} = \sum_{i=1}^{n} u_i \bar{v}_i \quad \text{si } K = \mathbb{C} \quad \text{(produit scalaire hermitien)}$$

est appelée **produit scalaire canonique**. On écrit $(u, v)_n$ pour préciser la dimension de l'espace.

Définition 1.2.2 (Orthogonalité et Orthonormalité)**.** Soit un espace muni de son produit scalaire canonique :

- Deux vecteurs u et v de V sont **orthogonaux** si $(u, v) = 0$.
- Un vecteur v est orthogonal à une partie $U \subset V$ (noté $v \perp U$) si $(v, u) = 0$ pour tout $u \in U$.
- Un ensemble $\{v_1, \ldots, v_k\}$ est dit **orthonormal** si $(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq k)$, où δ_{ij} est le **symbole de Kronecker** :

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{si } i = j \quad \text{et} \quad \delta_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

Exemple 1.2.1.

1- Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$.

$$(u, v) = u^T v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1(3) + 2(-1) + (-1)(1) = 3 - 2 - 1 = 0$$

Les vecteurs u et v sont donc orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

2- Soient $u = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{C}^2$.

$$(u, v) = v^* u = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = 1(i) + (-i)(1) = i - i = 0$$

Les vecteurs u et v sont donc orthogonaux dans $\mathbb{C}^2$.

1.3 Applications linéaires et matrices

Définition 1.3.1 (Matrice d'une application linéaire)**.** Soient V et W deux espaces vectoriels sur le même corps K, munis respectivement des bases $(e_j)_{j=1}^n$ et $(f_i)_{i=1}^m$. Relativement à ces bases, une application linéaire $\mathcal{G} : V \to W$ est représentée par la matrice A à m lignes et n colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

dont les éléments a_{ij} sont définis de façon unique par :

$$\mathcal{G}e_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \quad (1 \leq j \leq n)$$

Le j-ième vecteur colonne de A représente le vecteur $\mathcal{G}e_j$ dans la base $(f_i)_{i=1}^m$.

Une telle matrice est de type (m, n). On note $\mathcal{M}_{m,n}(K)$ l'espace vectoriel des matrices de type (m, n). Une matrice A d'éléments a_{ij} est notée $A = (a_{ij})$, et a_{ij} désigne l'élément à la ligne i et colonne j.

Exemple 1.3.1 (Représentation matricielle)**.** Soit $\mathcal{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\mathcal{G}(x_1, x_2) = (3x_1 - x_2,\, 2x_2,\, x_1 + 4x_2)^T$. Pour la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{G}(e_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{G}(e_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. La matrice associée $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1.4 Matrice transposée et matrice adjointe

Définition 1.4.1.

— Étant donnée $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, la **matrice transposée** $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est définie par :

$$(Au, v)_m = (u, A^T v)_n \quad \forall u \in \mathbb{R}^n, \forall v \in \mathbb{R}^m \implies (A^T)_{ij} = a_{ji}$$

— Étant donnée $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, la **matrice adjointe** $A^* \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ est définie par :

$$(Au, v)_m = (u, A^* v)_n \quad \forall u \in \mathbb{C}^n, \forall v \in \mathbb{C}^m \implies (A^*)_{ij} = \bar{a}_{ji}$$

Remarque 1.4.1. On peut définir la transposée d'une matrice complexe, mais c'est une notion d'intérêt moindre car l'application $(u, v) \mapsto \sum u_i v_i$ n'est pas un produit scalaire sur $\mathbb{C}^n$.

Exemple 1.4.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{C})$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 3 & 2-i \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^* = \begin{pmatrix} \overline{1+i} & 0 \\ \bar{3} & \overline{2-i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 3 & 2+i \end{pmatrix}$$

1.5 Produit matriciel et décomposition par blocs

Définition 1.5.1 (Produit matriciel)**.** Si $A = (a_{ik}) \in \mathcal{M}_{m,l}(K)$ et $B = (b_{kj}) \in \mathcal{M}_{l,n}(K)$, leur produit $AB \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ est défini par :

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}$$

On rappelle les propriétés : $(AB)^T = B^T A^T$ et $(AB)^* = B^* A^*$.

Définition 1.5.2 (Décomposition par blocs)**.** Soient $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_N$ et $W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_M$ des décompositions en sommes directes. On associe la décomposition par blocs de la matrice A :

$$A = (A_{IJ})_{1 \le I \le M, 1 \le J \le N}$$

chaque sous-matrice A_{IJ}, de type (m_I, n_J), représentant une application linéaire de V_J dans W_I.

Si $A = (A_{IK})$ et $B = (B_{KJ})$ sont décomposées par blocs compatibles, le produit $AB = (C_{IJ})$ s'effectue par blocs :

$$C_{IJ} = \sum_K A_{IK} B_{KJ} \quad \text{(Attention à l'ordre des facteurs !)}$$

De même pour un vecteur décomposé en blocs $v = (v_J)_{J=1}^N$, on a $(Av)_I = \sum_{J=1}^N A_{IJ} v_J$.

Exemple 1.5.1.

1- Soient $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ avec $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = (2)$.

$$Av = A_{11}v_1 + A_{12}v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} (2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Soient deux matrices A et B décomposées par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

On pose les blocs suivants :

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = (0)$$

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B_{21} = (4), \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Le produit $C = AB$ est calculé par blocs $C_{IJ} = \sum_K A_{IK} B_{KJ}$:

1. Calcul du bloc C_{11} :

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} (4) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \end{pmatrix}$$

2. Calcul du bloc C_{12} :

$$C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 15 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 20 & 24 \end{pmatrix}$$

3. Calcul du bloc C_{21} :

$$C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (0)(4) = (3 - 1) + (0) = (2)$$

4. Calcul du bloc C_{22} :

$$C_{22} = A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + (0) \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-5 & 2-6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Résultat final :

On obtient la matrice $C = AB$ suivante :

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 11 & 14 \\ 13 & 20 & 24 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

1.6 Matrices carrées et classes particulières

Une matrice de type (n, n) est appelée **matrice carrée d'ordre** n. On note $\mathcal{M}_n(K) = \mathcal{M}_{n,n}(K)$ l'anneau de ces matrices.

Définition 1.6.1 (Inversibilité et matrice singulière)**.** Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est **inversible** s'il existe une unique matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Dans le cas contraire, la matrice est dite **singulière**.

Propriété 1.6.1. *Soient A et B deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*
*Si A et B sont deux matrices **inversibles**, alors :*

1. *La matrice produit AB est inversible et son inverse est :*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

2. *La matrice transposée A^T est inversible et :*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

3. *La matrice adjointe A^* est inversible et :*

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

Définition 1.6.2 (Classes de matrices carrées)**.** Une matrice carrée $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ est dite :

— **Symétrique :** si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $A = A^T$.
— **Hermitienne :** si $A = A^*$.
— **Orthogonale :** si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $AA^T = A^TA = I$.
— **Normale :** si $AA^* = A^*A$.
— **Unitaire :** si $AA^* = A^*A = I$.
— **Diagonale :** si $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. On la note $\text{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$.

Exemple 1.6.1.

— **Symétrique :** $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = A^T$.
— **Hermitienne :** $H = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 2+i & 5 \end{pmatrix} = H^*$. (Les éléments diagonaux sont réels).
— **Orthogonale :** $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies QQ^T = I_2$.
— **Normale :** $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies NN^T = N^TN = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
— **Unitaire :** $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \implies UU^* = I_2$.

1.7 Trace, Déterminant et Matrices de Permutation

1.7.1 La Trace d'une Matrice ($\mathbf{tr}(A)$)

Définition 1.7.1 (Trace)**.** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. La **trace** de la matrice A, notée $\mathrm{tr}(A)$, est la somme des éléments situés sur sa diagonale principale :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Propriété 1.7.1 (Propriétés de la trace)**.** *Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ et tout scalaire $\alpha \in K$:*

1. $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$
2. $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$
3. $tr(AB) = tr(BA)$

Exemple 1.7.1 (Calcul d'une trace)**.** Soit la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

On calcule la trace en faisant la somme des éléments diagonaux :

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 5 + (-2) + 8 = 11$$

—

1.7.2 Les Matrices de Permutation (P_σ)

Définition 1.7.2 (Matrice de permutation)**.** Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (l'ensemble des $n!$ réarrangements possibles de $\{1, 2, \ldots, n\}$).

La **matrice de permutation** associée à σ, notée $P_\sigma = (p_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est définie par :

$$p_{ij} = \delta_{i,\sigma(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où δ est le symbole de Kronecker.

Propriété 1.7.2 (Orthogonalité)**.** *Toute matrice de permutation est **orthogonale**. Sa transposée est égale à son inverse, et correspond à la permutation inverse σ^{-1} :*

$$P_\sigma P_\sigma^T = P_\sigma^T P_\sigma = I_n \implies P_\sigma^{-1} = P_\sigma^T = P_{\sigma^{-1}}$$

Exemple 1.7.2. Considérons la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ (Le nombre total de permutations possibles dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ est 6, ce qui correspond à 3!) définie par :

$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 1$$

1. Construction de la matrice P_σ :

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Effet sur un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)^T$: La multiplication par P_σ réordonne les composantes du vecteur selon la permutation :

$$P_\sigma x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

3. Vérification de l'orthogonalité ($P_\sigma P_\sigma^T = I_3$) :

$$P_\sigma^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies P_\sigma P_\sigma^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

—

1.7.3 Le Déterminant ($\det(A)$)

Définition 1.7.3 (Formule de Leibniz)**.** Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$. Le **déterminant** de A est le scalaire défini par la formule de Leibniz :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

où :

— $\mathfrak{S}_n$ est l'ensemble de toutes les $n!$ permutations possibles.

— $\epsilon_\sigma \in \{+1, -1\}$ désigne la **signature** de la permutation σ ($+1$ si le nombre de transpositions est pair, -1 s'il est impair).

Exemple 1.7.3.

1. Pour $n = 2$, le groupe $\mathfrak{S}_2$ contient $2! = 2$ permutations :
   (a) **Permutation identité σ_1 :** $(1, 2) \mapsto (1, 2)$.
   — Signature : $\epsilon_{\sigma_1} = +1$ (0 transposition, nombre pair).
   — Produit associé : $a_{\sigma_1(1)1} a_{\sigma_1(2)2} = a_{11} a_{22}$.
   (b) **Transposition σ_2 :** $(1, 2) \mapsto (2, 1)$.
   — Signature : $\epsilon_{\sigma_2} = -1$ (1 transposition, nombre impair).
   — Produit associé : $a_{\sigma_2(1)1} a_{\sigma_2(2)2} = a_{21} a_{12}$.

   En appliquant la formule de Leibniz :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_2} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} = (+1)(a_{11} a_{22}) + (-1)(a_{21} a_{12}) = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

2. Pour $n = 3$, le groupe $\mathfrak{S}_3$ contient $3! = 6$ permutations :
   (a) **Permutation identité σ_1 :** $(1, 2, 3) \mapsto (1, 2, 3)$.
   — Signature : $\epsilon_{\sigma_1} = +1$ (0 transposition, nombre pair).
   — Produit associé : $a_{\sigma_1(1)1} a_{\sigma_1(2)2} a_{\sigma_1(3)3} = a_{11} a_{22} a_{33}$.
   (b) **Permutation circulaire σ_2 :** $(1, 2, 3) \mapsto (2, 3, 1)$.
   — Signature : $\epsilon_{\sigma_2} = +1$ (2 transpositions, nombre pair).
   — Produit associé : $a_{\sigma_2(1)1} a_{\sigma_2(2)2} a_{\sigma_2(3)3} = a_{21} a_{32} a_{13}$.
   (c) **Permutation circulaire σ_3 :** $(1, 2, 3) \mapsto (3, 1, 2)$.

— Signature : $\epsilon_{\sigma_3} = +1$ (2 transpositions, nombre pair).
— Produit associé : $a_{\sigma_3(1)1}a_{\sigma_3(2)2}a_{\sigma_3(3)3} = a_{31}a_{12}a_{23}$.

(d) **Transposition σ_4 :** $(1,2,3) \mapsto (1,3,2)$.
— Signature : $\epsilon_{\sigma_4} = -1$ (1 transposition de 2 et 3, nombre impair).
— Produit associé : $a_{\sigma_4(1)1}a_{\sigma_4(2)2}a_{\sigma_4(3)3} = a_{11}a_{32}a_{23}$.

(e) **Transposition σ_5 :** $(1,2,3) \mapsto (2,1,3)$.
— Signature : $\epsilon_{\sigma_5} = -1$ (1 transposition de 1 et 2, nombre impair).
— Produit associé : $a_{\sigma_5(1)1}a_{\sigma_5(2)2}a_{\sigma_5(3)3} = a_{21}a_{12}a_{33}$.

(f) **Transposition σ_6 :** $(1,2,3) \mapsto (3,2,1)$.
— Signature : $\epsilon_{\sigma_6} = -1$ (1 transposition de 1 et 3, nombre impair).
— Produit associé : $a_{\sigma_6(1)1}a_{\sigma_6(2)2}a_{\sigma_6(3)3} = a_{31}a_{22}a_{13}$.

En appliquant la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} \epsilon_\sigma a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}\end{aligned}$$

Propriété 1.7.3. *Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ deux matrices carrées de même ordre n. Le déterminant du produit AB est égal au produit des déterminants de A et de B :*

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$$

1.8 Valeurs propres, spectre et rayon spectral

Définition 1.8.1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$:
— Les **valeurs propres** $\lambda_i(A)$ sont les n racines du **polynôme caractéristique** :

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

— Le **spectre** de A est l'ensemble $\mathrm{sp}(A) = \bigcup_{i=1}^{n}\{\lambda_i(A)\} \subset \mathbb{C}$.
— Le **rayon spectral** est le nombre réel $\rho(A) = \max\{|\lambda_i(A)|;\ 1 \le i \le n\}$.
— Un **vecteur propre** $v \neq 0$ vérifie $Av = \lambda v$.
— Le **sous-espace propre** associé est $\{v \in V;\ Av = \lambda v\}$.

Propriété 1.8.1. *On rappelle les relations fondamentales suivantes :*

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(A), \quad \det(A) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i(A)$$

Exemple 1.8.1. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Polynôme caractéristique :

$$p_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 6\lambda + 8$$

2. Valeurs propres :

$$(\lambda-2)(\lambda-4) = 0 \implies \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 4 \quad \implies \quad \mathrm{sp}(A) = \{2,4\}$$

3. Vecteurs propres et sous-espaces propres :
   — Pour $\lambda_1 = 2$: On résout $(A - 2I_2)v_1 = 0$ pour $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies x + y = 0 \implies y = -x$$

   Un vecteur propre associé est $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, et le sous-espace propre est :

$$E_2 = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

   — Pour $\lambda_2 = 4$: On résout $(A - 4I_2)v_2 = 0$ pour $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies -x + y = 0 \implies y = x$$

   Un vecteur propre associé est $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, et le sous-espace propre est :

$$E_4 = \text{vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

4. Vérifications : $\text{tr}(A) = 3 + 3 = 6 = 2 + 4$, et $\det(A) = 9 - 1 = 8 = 2 \times 4$.
5. Rayon spectral : $\rho(A) = \max(|2|, |4|) = 4$.

1.9 Noyau, Image et Rang d'une Matrice

Définition 1.9.1. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice à m lignes et n colonnes.
— L'**image** de A, notée $\text{Im}(A)$, est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^m$ défini par :

$$\text{Im}(A) = \{y \in \mathbb{K}^m \,;\, \exists x \in \mathbb{K}^n,\, y = Ax\}$$

— Le **noyau** de A, noté $\text{Ker}(A)$, est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ défini par :

$$\text{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{K}^n \,;\, Ax = 0\}$$

Définition 1.9.2 (Rang d'une matrice)**.** Le **rang** d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, noté $\text{rg}(A)$, est défini équivalemment par :

1. La dimension du sous-espace image : $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$.
2. Le plus grand ordre des sous-matrices carrées inversibles extraites de A.

Théorème 1.9.1 (Théorème du Rang)**.** *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, la somme de la dimension du noyau et du rang de la matrice est égale au nombre de colonnes n :*

$$\dim(Ker(A)) + rg(A) = n$$

*La matrice A est dite à **rang plein** si $rg(A) = \min(m, n)$, et à **rang déficient** si $rg(A) < \min(m, n)$.*

Exemple 1.9.1. Considérons les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

1. Calcul et étude de l'Image (Im) :

— **Pour la matrice A :** Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$, l'image est $Ax = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Les colonnes engendrent tout l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^2$, donc :

$$\mathrm{Im}(A) = \mathbb{R}^2 \implies \mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = 2$$

— **Pour la matrice B :** Pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $Bx = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2(x_1 + 2x_2 + 3x_3) \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$. Tout vecteur $y = (y_1, y_2, y_3)^T \in \mathrm{Im}(B)$ vérifie la relation $y_2 = 2y_1$, d'où :

$$\mathrm{Im}(B) = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} \subsetneq \mathbb{R}^3 \implies \mathrm{rg}(B) = \dim(\mathrm{Im}(B)) = 2$$

2. Calcul et étude du Noyau (Ker) :

— **Pour la matrice A :**

$$Ax = 0 \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \iff x = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 1$.

— **Pour la matrice B :**

$$Bx = 0 \iff \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 = -x_3 \\ x_1 = -x_3 \end{cases} \iff x = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et $\dim(\mathrm{Ker}(B)) = 1$.

3. Vérification du Théorème du Rang :

— **Pour la matrice A :** $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A) = 1 + 2 = 3 = n$ (nombre de colonnes de A).

— **Pour la matrice B :** $\dim(\mathrm{Ker}(B)) + \mathrm{rg}(B) = 1 + 2 = 3 = n$ (nombre de colonnes de B).

4. Calcul du Rang par extraction de sous-matrices :

— **Pour la matrice A :** En choisissant la sous-matrice d'ordre 2 formée par les colonnes 1 et 3 : $M_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\det(M_A) = 1 \neq 0$, ce qui confirme que $\mathrm{rg}(A) = 2$.

— **Pour la matrice B :** Comme $L_2 = 2L_1$, $\det(B) = 0 \implies \mathrm{rg}(B) < 3$. En choisissant la sous-matrice d'ordre 2 : $M_B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (lignes 1,3 et colonnes 2,3), on a $\det(M_B) = 2 - 3 = -1 \neq 0$, d'où $\mathrm{rg}(B) = 2$.

1.10 Réduction des Matrices

Définition 1.10.1 (Matrices Semblables et Diagonalisabilité)**.** Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. Une matrice A est dite **diagonalisable** s'il existe une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale.

Exemple 1.10.1.

1) Matrices semblables

Considérons les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

— **Matrice de passage P :** Choisissons la matrice inversible $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, dont l'inverse est $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— **Vérification de la relation $B = P^{-1}AP$:**

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = B$$

2) Matrice diagonalisable

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

— **Matrice de passage P :** Choisissons la matrice inversible $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (formée des vecteurs propres de A), d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— **Calcul du produit $P^{-1}AP$:**

$$AP = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}(AP) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$$

— **Conclusion :** La matrice A est semblable à la matrice $D = \text{diag}(1, 3)$. Comme D est une matrice diagonale, la matrice A est **diagonalisable**.

Proposition 1.10.1. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de cette matrice. Dans ce cas, les éléments diagonaux de la matrice $D = P^{-1}AP$ sont les valeurs propres correspondantes.*

Exemple 1.10.2.

1) Cas d'une matrice diagonalisable (Existence d'une base de vecteurs propres) :

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

— **Valeurs propres :** Le polynôme caractéristique est $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5)$. Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 5$.

— **Recherche des vecteurs propres :**
  — Pour $\lambda_1 = 2$: $(A - 2I_2)v = 0 \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x + y = 0$. Un vecteur propre est $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
  — Pour $\lambda_2 = 5$: $(A - 5I_2)v = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x + y = 0$. Un vecteur propre est $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
— **Formation de la base et de la matrice P :** La famille $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ forme une base de $\mathbb{R}^2$ constituée de vecteurs propres de A. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, on obtient :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$$

2) Contre-exemple : cas d'une matrice non diagonalisable (Absence de base de vecteurs propres) :

Soit $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

— **Valeurs propres :** Le polynôme caractéristique est $p_B(\lambda) = (2 - \lambda)^2$. L'unique valeur propre est $\lambda = 2$ de multiplicité 2.
— **Recherche du sous-espace propre :**

$$(B - 2I_2)v = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff y = 0$$

Ainsi, $E_2(B) = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et $\dim E_2(B) = 1$.

— Comme la dimension du sous-espace propre ($\dim E_2(B) = 1$) est strictement inférieure à la dimension de l'espace ($\mathbb{R}^2$), il est impossible de former une base de $\mathbb{R}^2$ avec des vecteurs propres de B. Par conséquent, B **n'est pas diagonalisable**.

Théorème 1.10.1 (Théorème de Schur)**.**

1. *Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice unitaire U telle que U^*AU soit triangulaire supérieure.*
2. *Si la matrice A est normale, il existe une matrice unitaire U telle que U^*AU soit diagonale.*
3. *Si la matrice A est réelle et symétrique, il existe une matrice orthogonale Q telle que Q^TAQ soit diagonale.*

Exemple 1.10.3.

1. **Triangularisation de Schur d'une matrice non diagonalisable (valeur propre double) :**

   Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

— **Valeur propre :** $\det(A - \lambda I_2) = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$. L'unique valeur propre est $\lambda = 2$ (de multiplicité 2).

— **Vecteur propre normé :** Le sous-espace propre associé est déterminé par $(A - 2I_2)v = 0 \iff x - y = 0$. On choisit le vecteur propre normé $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

— **Complétion en une base orthonormée :** On complète u_1 avec $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (où u_2 est orthonormale avec u_1) pour former une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

— **Matrice unitaire (orthogonale) U :**

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies U^* = U^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

— **Calcul du produit $T = U^*AU$:**

$$AU = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T = U^*AU = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matrice T est bien **triangulaire supérieure**, avec la valeur propre 2 sur sa diagonale.

2. **Triangularisation de Schur d'une matrice à deux valeurs propres distinctes :**

Considérons la matrice non symétrique $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

— **Valeurs propres :** Le polynôme caractéristique est :

$$\det(A - \lambda I_2) = (-\lambda)(4-\lambda) + 3 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

La matrice admet deux valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

— **Vecteur propre normé :** Pour la première valeur propre $\lambda_1 = 1$:

$$(A - I_2)v = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 3y$$

On choisit le vecteur propre normé $u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

— **Complétion en une base orthonormée :** On complète u_1 avec $u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour former une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$.

— **Matrice unitaire (orthogonale) U :**

$$U = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \implies U^* = U^T = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

— **Calcul du produit $T = U^*AU$:**

$$AU = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$$

$$T = U^*AU = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 & 40 \\ 0 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matrice T est bien **triangulaire supérieure**, avec les valeurs propres 1 et 3 sur sa diagonale.

3. **Diagonalisation unitaire d'une matrice normale :**

   Soit la matrice anti-symétrique réelle $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   — **Normalité :** On a $A^*A = A^TA = I_2$ et $AA^* = I_2$, donc $A^*A = AA^*$ (A est normale).

   — **Valeurs propres :** $\det(A - \lambda I_2) = \lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$.

   — **Vecteurs propres orthonormés dans $\mathbb{C}^2$:**

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } \lambda_1 = i, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } \lambda_2 = -i$$

   — **Matrice unitaire U et forme diagonale :**

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \implies U^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^*AU = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

4. **Diagonalisation orthogonale d'une matrice réelle symétrique :**

   Soit la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   — **Valeurs propres :** $\det(A - \lambda I_2) = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \implies \lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$.

   — **Vecteurs propres orthonormés :**

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } \lambda_1 = 1, \qquad q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } \lambda_2 = 3$$

   — **Matrice orthogonale Q :**

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies Q^TQ = I_2$$

$$Q^TAQ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1.11 Valeurs Singulières et Décomposition SVD

Définition 1.11.1. Les **valeurs singulières** d'une matrice carrée A sont les racines carrées positives des valeurs propres de la matrice hermitienne A^*A (ou A^TA si A est réelle).

Exemple 1.11.1. Considérons la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. **Calcul de la matrice produit A^TA :** Puisque A est réelle, $A^* = A^T$.

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & 2+2 \\ 2+2 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

2. **Recherche des valeurs propres de A^TA :** On calcule le polynôme caractéristique de A^TA :

$$P_{A^TA}(\lambda) = \det(A^TA - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 16$$

On cherche les racines :

$$(5-\lambda)^2 - 16 = 0 \iff (5-\lambda)^2 = 16 \iff 5-\lambda = \pm 4$$

Ce qui donne deux valeurs propres positives :

$$\lambda_1 = 9 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1$$

Les valeurs singulières sont les racines carrées positives des valeurs propres de A^TA

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{9} = 3$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{1} = 1$$

Les valeurs singulières de la matrice A sont $\sigma_1 = 3$ et $\sigma_2 = 1$.

Remarque 1.11.1. Les valeurs singulières d'une matrice A sont toutes strictement positives si et seulement si A est inversible.

Exemple 1.11.2. Considérons la matrice non inversible $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour déterminer ses valeurs singulières :

1. **Calcul de la matrice A^TA :**

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. **Recherche des valeurs propres de A^TA :** Le polynôme caractéristique est :

$$P_{A^TA}(\lambda) = \det(A^TA - \lambda I_2) = (2-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4)$$

Les valeurs propres sont donc :

$$\lambda_1 = 4 \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 0$$

3. **Calcul des valeurs singulières :** On prend les racines carrées des valeurs propres ordonnées ($\sigma_1 \geq \sigma_2$) :

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{0} = 0$$

La présence d'une valeur singulière nulle ($\sigma_2 = 0$) indique que la matrice A est singulière (non inversible). Le nombre de valeurs singulières non nulles est toujours égal au rang de la matrice : $\text{rg}(A) = 1$.

Théorème 1.11.1 (Décomposition en Valeurs Singulières - SVD)**.** *Si A est une matrice complexe carrée, il existe deux matrices unitaires U et V telles que :*

$$U^*AV = diag(\mu_i)$$

où les $\mu_i \geq 0$ sont les valeurs singulières de la matrice A.

Exemple 1.11.3. Considérons la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Pour déterminer explicitement les matrices unitaires (orthogonales) U et V ainsi que la matrice diagonale des valeurs singulières $\Sigma = \text{diag}(\mu_1, \mu_2)$, on suit les étapes ci-dessous :

1. **Calcul de A^TA, de ses valeurs propres et des valeurs singulières μ_i :**

   $$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

   Les valeurs propres de A^TA sont $\lambda_1 = 9$ et $\lambda_2 = 1$.
   Les valeurs singulières sont les racines carrées ordonnées :

   $$\mu_1 = \sqrt{9} = 3 \quad \text{et} \quad \mu_2 = \sqrt{1} = 1$$

2. **Construction de la matrice unitaire V (Vecteurs propres de A^TA(c'est une matrice symétrique)) :**
   — Pour $\lambda_1 = 9$: $(A^TA - 9I_2)v = 0 \iff -4x + 4y = 0 \implies v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   — Pour $\lambda_2 = 1$: $(A^TA - I_2)v = 0 \iff 4x + 4y = 0 \implies v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   D'où la matrice orthogonale V :

   $$V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Construction de la matrice unitaire U :** Pour chaque valeur singulière $\mu_i > 0$, les colonnes de U sont données par la formule $u_i = \frac{1}{\mu_i}Av_i$:
   — $u_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   — $u_2 = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
   D'où la matrice orthogonale U (et sa transposée $U^* = U^T$) :

   $$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \implies U^* = U^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

4. **Vérification de la relation $U^*AV = \text{diag}(\mu_1, \mu_2)$:**

   $$U^*A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   $$U^*AV = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : On obtient bien la forme diagonale voulue $U^*AV = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.12 Propriétés Variationnelles des Matrices Hermitiennes

Définition 1.12.1 (Quotient de Rayleigh)**.** Soit A une matrice hermitienne ($A^* = A$). Pour tout vecteur non nul $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, le **quotient de Rayleigh** est l'application définie par :

$$R_A(v) = \frac{(Av, v)}{(v, v)} = \frac{v^* Av}{v^* v}$$

Proposition 1.12.1. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne ($A^* = A$) dont les valeurs propres sont ordonnées $\lambda_{\min} = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n = \lambda_{\max}$. Pour tout vecteur non nul $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, le quotient de Rayleigh $R_A(v) = \frac{v^* Av}{v^* v}$ satisfait les propriétés suivantes :*

1. ***Réalité :*** *$R_A(v) \in \mathbb{R}$ pour tout $v \neq 0$.*
2. ***Invariance par homothétie :*** *Pour tout scalaire non nul $\alpha \in \mathbb{C}^*$:*

$$R_A(\alpha v) = R_A(v)$$

3. ***Valeur sur un vecteur propre :*** *Si v est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors :*

$$R_A(v) = \lambda$$

4. ***Encadrement de Rayleigh-Ritz :*** *Pour tout vecteur non nul v, le quotient de Rayleigh est strictement borné par les valeurs propres extrêmes de A :*

$$\lambda_{\min} \leq R_A(v) \leq \lambda_{\max}$$

Ces bornes sont atteintes aux vecteurs propres associés à $\lambda_{\min}$ et $\lambda_{\max}$, ce qui implique :

$$\min_{v \neq 0} R_A(v) = \lambda_{\min} \quad \text{et} \quad \max_{v \neq 0} R_A(v) = \lambda_{\max}$$

Exemple 1.12.1. Considérons la matrice symétrique réelle $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. **Calcul du quotient de Rayleigh pour un vecteur quelconque :** Soit le vecteur $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
   — Calcul du dénominateur $v^T v$:

$$v^T v = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1^2 + 2^2 = 5$$

   — Calcul du numérateur $v^T Av$:

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$v^T Av = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = (1 \times 4) + (2 \times 5) = 14$$

   — Valeur du quotient de Rayleigh :

$$R_A(v) = \frac{v^T Av}{v^T v} = \frac{14}{5} = 2.8$$

2. **Évaluation sur un vecteur propre :** Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$. Un vecteur propre associé à $\lambda_1 = 1$ est $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Calculons $R_A(v_1)$:

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot v_1$$

$$R_A(v_1) = \frac{v_1^T(Av_1)}{v_1^T v_1} = \frac{v_1^T(1 \cdot v_1)}{v_1^T v_1} = 1 \cdot \frac{v_1^T v_1}{v_1^T v_1} = 1 = \lambda_1$$

3. **Vérification de l'encadrement de Rayleigh-Ritz :** On constate bien que la valeur trouvée $R_A(v) = 2.8$ est encadrée par le spectre de A :

$$\lambda_{\min}(A) \leq R_A(v) \leq \lambda_{\max}(A) \implies 1 \leq 2.8 \leq 3$$

Définition 1.12.2 (Matrice Définie Positive)**.** Une matrice hermitienne A est dite **définie positive** (resp. **positive**) si pour tout $v \neq 0$, $v^*Av > 0$ (resp. $v^*Av \geq 0$). C'est équivalent à dire que toutes ses valeurs propres sont strictement positives (resp. positives ou nulles).