Exercices corrigés

Université de M'sila

Faculté de Mathématiques et d'Informatique

Département de mathématiques

Analyse 3

Exercices et corrigés

- Séries numériques
- Suites et séries de fonctions
- Séries entières
- Séries de Fourier
- Intégrales impropres

Dr. D. Bouafia

Édition 2023

Licence de mathématiques, L2

Titre

Table de matières

Chapitre 0

1 Séries numériques **3**
1.1 Série d'exercices N 1 3
1.2 Correction de série N 1 7

2 Suites et séries de fonctions **25**
2.1 Série d'exercices N 2 25
2.2 Correction de série N 2 29

3 Séries entières **49**
3.1 Série d'exercices N 3 49
3.2 Correction de série N 3 53

4 Séries de Fourier **69**
4.1 Série d'exercices N 4 69
4.2 Correction de série N 4 72

5 Intégrales impropres **85**
5.1 Série d'exercices N 5 85
5.2 Correction de série N 5 90

Introduction

Cette polycopié est une tentative de donner un coup de main à nos étudiants, en résolvant en détail certains exercices d'analyse 3 et dans tous les chapitres liés à la polycopié comme séries numériques, suites et séries de fonctions, séries entières, séries de Fourier et les intégrales impropres.
De plus, nous n'avons généralement pas résolu les exercices notés par une étoile $(\star)$ ou les exercices supplémentaires et avons laissé le soin au lecteur.
Ce travail, et comme tout travail humain, il n'est pas exempt d'erreurs et de manquements, nous vous demandons donc de nous conseiller et de corriger nos erreurs si possible.

Séries numériques

Chapitre 1

Sommaire

1.1 Série d'exercices N 1 3
1.2 Correction de série N 1 7

1 Série d'exercices N 1

Remarque

L'exercice noté par $(\star)$ ou supplémentaire ne sera pas corrigé dans le sience de **TD**

Exercice 1

En utilisant la limite des suites des sommes partielles, déterminer la nature des séries numériques suivantes:

1. $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
2. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4n^2-1}$.
3. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.
4. $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$.
5. $\sum_{n\geq 3}\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)$.
6. $\sum_{n\geq 1}\arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

Exercice 2

Montrer que la série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente.

Exercice 3

Étudier la convergence des séries suivantes

1. $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n}.(\star)$
2. $\sum_{n\geq 0}\frac{1}{3n+1}$.
3. $\sum_{n\geq 2}\frac{n^2+2}{n^2}$.
4. $\sum_{n\geq 1}\frac{3}{\sqrt{n}}$.
5. $\sum_{n\geq 1}\frac{(4n+1)^3}{(5n^2+1)^3}$.
6. $\sum_{n\geq 1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.
7. $\sum_{n\geq 1}\left(ne^{\frac{1}{n}}-n\right)$.
8. $\sum_{n\geq 1}\ln\left(1+e^{-n}\right).(\star)$

Exercice 4

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants:

1. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$
2. $u_n = \frac{1}{n\cos^2 n}$
3. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

Exercice 5

Donner la nature des séries numériques suivantes en se servant du critère des suites des sommes partielles associées.

1. $a_n = \frac{(n+1)}{3^n}$.
2. $b_n = \frac{(n-(-1)^n)}{3^n}$.
3. $c_n = \frac{1+2+...+n}{1^3+2^3+...+n^3}$.
4. $u_n = \frac{n^4-(n+1)^3}{n!}.(\star)$
5. $v_n = \frac{n}{n^4+n^2+1}$.
6. $w_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 6

Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(2+\sqrt{n})}$ est semi-convergente.

Exercice 7

Étudier la convergence de la série numérique de terme général u_n

1. $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!}$.
2. $u_n = \frac{a}{n!}$, $a \in \mathbb{C}$.
3. $u_n = na^{n-1}$, $a \in \mathbb{C}$.
4. $u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$
5. $u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
6. $u_n = \frac{n!}{n^n}$, pour $n \geq 1$

Exercice 8

Étudier la nature des séries à termes positifs suivantes

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{2^n+1}$.
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{2+\cos(n)}{n^3}$.
3. $\sum_{n\geq 0} ne^{-n}$.

Exercice 9

En utilisant le théorème de comparaison, étudier la nature des séries suivantes

1. $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. $\sum_{n\geq 2} \frac{\cos(n)}{n(n-1)}$.
3. $\sum_{n\geq 1} \arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$.

Exercice 10

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les suivantes sont aussi convergentes

$$\sum \max(u_n, v_n), \quad \sum \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Exercice 11

Déterminer en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}.$$

Exercice 12

En utilisant les critères du convergences (Riemann, Cauchy, D'Alembert, Raabe-Duhamel,...). Étudier la nature des séries dont les termes généraux sont les suivantes

1. $u_n = \frac{3^n}{n!}$.
2. $u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2n)}$.
3. $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{-n^2}$ où $a > 0$ est un réel.
4. $u_n = \frac{n^n}{3^{n^2}}$.
5. $u_n = \frac{1}{n^2}$.
6. $u_n = \left(\frac{\prod_{k=1}^{n}(3k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 3k}\right)^2$.
7. $u_n = \frac{3^{2n-1}}{n^2+1}$.

Exercice 13

Étudier la nature de la série de terme général u_n (convergence et absolue convergence).

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n}$.
2. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
3. $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$.
4. $u_n = \frac{2 + \sin(an)}{n^2}$, où $a > 0$ est un réel.

Exercice supplémentaire 1

1. Soit (u_n) une suite de réels positifs et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ Montrer que les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

2 Même question avec

$$v_n = \frac{u_n}{u_1 + u_2 + ... + u_n}$$

On pourra établir $\ln(1 - v_n)$ dans le cadre de divergence

Exercice supplémentaire 2

Étudier la nature de la série de Bertrand suivante

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta}(n)}, \quad (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}).$$

Exercice supplémentaire 3

Étudier la nature des série suivantes.

1 $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$.

2 $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n}$.

Exercice supplémentaire 4

1 Déterminer la série $\left(\sum_{n\geq 0} a^{2n} \right)^2$, $a \in]0,1[$.

2 Calculer le produit de série $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec elle même, telle que $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

2 Correction de série N 1

Correction d'exercice 1

1 La suite de terme général $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$, alors,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right),$$

donc,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = 3,$$

ainsi la série $\sum_{n\geq 0} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ est convergente et sa somme est

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} S_n = 3.$$

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2n+1},$$

par conséquent,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k\geq 1} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2k+1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right), \end{aligned}$$

donc, on trouve,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

Alors, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$ est convergente.

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)},$$

donc on aura,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)}\right).$$

Or,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(k+2)} &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}\right] \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \sum_{k=3}^{k=n} \frac{1}{k} + \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}, \end{aligned}$$

et

$$\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k+1}=\sum_{k=2}^{k=n+1}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{k=n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent, on obtient

$$S_n=\frac{1}{2}\Big[\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\Big]-\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{k+2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\frac{1}{4}.$$

Alors, la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$ est convergente.

4 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1},$$

par conséquent, on trouve,

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=0}^{n}\Big(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\Big)=\sqrt{n+2}-1.$$

Alors, on résulte que,

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty,$$

ainsi la série $\sum_{n\geq 0}\dfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}$ est divergente.

5 Pour tout $n\geq 3$, on a

$$\ln\Big(1-\frac{2}{n}\Big)=\ln(n-2)-\ln(n),$$

alors,

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=3}^{n}\ln\Big(1-\frac{2}{n}\Big)=\sum_{k=3}^{n}\Big(\ln(k-2)-\ln(k)\Big)=\sum_{k=1}^{n-2}\ln(k)-\sum_{k=3}^{n}\ln(k)\\ &= \ln 2-\ln(n-1)-\ln n=\ln 2-\ln\Big(\frac{n-1}{n}\Big),\end{aligned}$$

d'où,

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\ln 2,$$

ainsi la série $\sum_{n\geq 3}\ln\Big(1-\dfrac{2}{n}\Big)$ est divergente.

6 Sachant que pour tous $\alpha,\ \beta\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on a

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$$

posons

$$\alpha = \arctan a \quad \text{et} \quad \beta = \arctan b,$$

où $a,\ b \in \mathbb{R}$, donc, on obtient

$$\arctan a - \arctan b = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right).$$

Alors, pour $a = k+1$ et $b = k$ on déduit que

$$\arctan(k+1) - \arctan(k) = \arctan\left(\frac{1}{1+k(k+1)}\right) = v_{n+1} - v_n,$$

où $v_k = \arctan(k)$ le tèrme général de la suite $(v_k)_{k\geq 1}$. Par conséquent, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on trouve,

$$S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \arctan\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right) = \arctan(n+1) - \arctan(1) = \arctan(n+1) - \frac{1}{4}.$$

Par passage à la limite, on obtient,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

D'où la série $\sum_{n\geq 1} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ est convergente et sa somme vaut $\frac{\pi}{4}$.

Correction d'exercice 2

Il suffit de montrer que la suite de sommes partielles que lui associées $(S_n)_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy, c'est à dire,

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0,\ \exists p, q \in \mathbb{N} :\ p > q \geq n_0 \text{ on a } |S_p - S_q| > \varepsilon.$$

En effet, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, alors, pour $p = 2n$ et $q = n$, on aura

$$\begin{aligned} |S_p - S_q| &= |S_{2n} - S_n| \\ &= \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right| \\ &\geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots \frac{1}{2n} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Il suffit ainssi de choisir $\varepsilon = \frac{1}{2}$, pour que $(S_n)_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy.

Correction d'exercice 3

1. Il s'agit d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$

2. On a $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{3n+1} \sim \frac{1}{3n}$. Alors, il s'agit d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$.

3 Comme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+2}{n^2} = 1 \neq 0$. Alors, la condition nécessaire ne pas satisfaite, donc la série ne converge pas.

4 On a $\forall n \in \mathbb{N}^* : \dfrac{3}{\sqrt{n}} = \dfrac{3}{n^{\frac{1}{2}}}$. Il s'agit du terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$.

5 Pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\frac{(4n+1)^3}{(5n^2+1)^3} \sim \frac{4^3}{5^3} \times \frac{1}{n^3}.$$

Il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$.

6 Pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \sim e^{n\ln(1-\frac{1}{n})} = e^{n(-\frac{1}{n}+o(\frac{1}{n}))} = e^{-1+o(1)} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} e^{-1} \neq 0.$$

Donc, la série diverge.

7 Pour tout $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$ne^{\frac{1}{n}} - n = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) \sim n\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) \sim 1+o(1) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0.$$

Donc, condition nécessaire ne pas satisfaite et la série est divergente.

8

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \ln\left(1+e^{-n}\right) \sim e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n.$$

Donc, la série est géométriquement convergente, car de raison dans $]-1,1[$.

Correction d'exercice 4

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{n^2\ln(\frac{n}{n+1})} = e^{-n^2\ln(\frac{n+1}{n})} = e^{-n^2\ln(1+\frac{1}{n})} \\ &\sim e^{-n^2\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} \sim e^{-n+1+o(1)} \sim e^{-n}e^{1+o(1)} \sim e\left(\frac{1}{e}\right)^n. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison dans $]-1,1[$, et la série est convergente.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons:

$$u_n = \frac{1}{n\cos^2 n} > \frac{1}{n}$$

Il s'agit d'une série à termes positifs supérieurs à $\dfrac{1}{n}$, qui est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$. Donc la série diverge.

3 On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\ln(n)} > \frac{1}{n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 < 1.$$

D'après le test de Cauchy, $0 < 1$, alors, la série est convergente.

Correction d'exercice 5

1 La suite de somme partielle associées au série $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)}{3^n}$ est positive, croissante et bornée par 1, donc, convergente. Posons $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^n}$, alors, on a:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} \\ &= \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k}. \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} S_{n-1}.$$

Ainsi, on trouve,

$$S_n = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3} S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} A_n + \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{9}{4}.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)}{3^n}$ converge et a pour somme vaut $\frac{9}{4}$.

2 D'après la somme partielle de la série précédente on a:

$$\begin{aligned} S'_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k-(-1)^k)}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{3^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} - \frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right). \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{3^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{3^k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} S_{n-1}.$$

Alors, par passage à la limite et en utilisant le résulte précédent, on obtient,

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = -\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{4}\left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} S_{n-1} = -\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = 0.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} b_n$ est convergente et a pour somme vaut 0.

3 On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2.$$

Alpors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1+2+...+k}{1^3+2^3+...+k^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1+2+...+k}{(1+2+...+k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} \\ &= 2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 2 \,. \end{aligned}$$

Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 1} c_n$ converge et a pour somme la valeur 2.

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{-4k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{k+1}{3k!} = \frac{(n+1)^3}{n!} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 \,.$$

Par conséquent, la série $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ converge et a pour somme la valeur nulle.

5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k^2+k+1)(k^2-k+1)} = \frac{1}{2} \times \sum_{k=0}^{n} \Big(\underbrace{\frac{1}{k^2-k+1}}_{x_k} - \underbrace{\frac{1}{k^2+k+1}}_{x_{k+1}} \Big) \\ &= \frac{1}{2} \times \sum_{k=0}^{n} \Big(x_k - x_{k+1}\Big) = \frac{1}{2} \times (x_0 - x_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{n^2+n+1}\right) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \,. \end{aligned}$$

Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ converge et a pour somme la valeur $\frac{1}{2}$.

6 Pour tout $n \geq 2$, nous avons

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=2}^{n} w_k &= \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \Big(\ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k)\Big) \\ &= -\ln 2 + \ln(n+1) - \ln(n) = -\ln 2 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} -\ln 2 \,. \end{aligned}$$

Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 1} w_n$ converge et a pour somme la valeur $-\ln 2$.

Correction d'exercice 6

1 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par:

$$f(x) = \frac{1}{\ln(2+\sqrt{x})}.$$

Alors, on a

$$f'(x) = -\frac{(\ln(2+\sqrt{x}))'}{(\ln(2+\sqrt{x}))^2} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\ln(2+\sqrt{x}))^3} < 0.$$

Donc la suite de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln(2+\sqrt{n})}$ est décroissante, elle tend vers 0, d'après le test de série alternée (Théorème de Leibniz), la série converge.

2 D'autre par, on a

$$|u_n| = \frac{1}{\ln(2+\sqrt{n})},$$

et comme,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{2}}|u_n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\ln(2+\sqrt{n})} = +\infty.$$

D'après les règles de Riemann la série de terme général $|u_n| = \dfrac{1}{\ln(2+\sqrt{n})}$ diverge, car ($\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$), ce qui montre que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ ne converge pas absolument. Cette série est donc semi-convergente.

Correction d'exercice 7

1 Posons $v_n = |u_n| = \dfrac{n^3}{n!}$. Alors, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \frac{1}{n+1} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

D'après le critère de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.

2 On pose $v_n = |u_n| = \dfrac{|a|}{n!}$. Alors, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{n+1} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

D'après le critère de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.

3 $u_n = na^{n-1}$, $a \in \mathbb{C}$. On pose $v_n = |u_n| = n|a|^{n-1}$. Alors, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{n+1}|a| \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} |a| .$$

Si $|a| < 1$, d'après le critère de D'Alembert, la série de terme général v_n converge, donc la série de terme général u_n converge absolument, donc elle converge.
Si $|a| \geq 1$, $|u_n| \to +\infty$ alors, la série diverge grossièrement.

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Il s'agit d'une série alternée car $\forall n \in \mathbb{N}^* : \ u_n \geq 0$, il est à peu près évident que est décroissant et tend vers 0, d'après le théorème de séries alternée, la série $\sum_{\geq 1} \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$ converge.
On remarque que cette série est semi-convergente, car, pour tout $n \geq 1$, on a

$$|u_n| = \left|\sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)\right| = |(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)| \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{n}.$$

5 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons,

$$u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Comme la série $\sum_{n\geq 0} a_n$, avec $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ des tèrmes positives, décroissant et tend vers 0, d'après le théorème de séries alternée, la série $\sum_{\geq 1} u_n$ converge.

6 Pour tout $n \geq 1$, on a:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n},$$

donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Ainsi d'après le critère de D'Alembert la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Correction d'exercice 8

1 D'après le règle de Riemann, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2}{2^n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{e^{n\ln 2}} = 0,$$

or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge, donc, la série $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2}{2^n+1}$ est convergente.

2 Pour tout $n\in\mathbb{N}$, nous avons

$$\frac{2+\cos(n)}{n^3}\leq\frac{13}{n^3},$$

or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$ est convergente, ainsi d'aprés le Théorème de comparaison, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{2+\cos(n)}{n^3}$ est convergente.

3 En appliquant autre fois le règle de Riemann, on aura

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{ne^{-n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{e^n}=0,$$

or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente, ainsi d'aprés le règle de Riemenn, la série $\sum_{n\geq 0}ne^{-n}$ est convergente.

Correction d'exercice 9

1 La série $\sum_{n\geq 2}\frac{\cos(n)}{n(n-1)}$ dont le terme général ne garde pas un signe constant est convergente car elle est absolument convergente. En effet, on a bien pour tout $n\geq 2$ on a

$$\left|\frac{\cos(n)}{n(n-1)}\right|\leq\frac{1}{n(n-1)}.$$

Or, on a déjà établi la convergence de la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(n-1)}$. En vertu du critère de comparaison combiné avec celui de convergence absolue, on déduit la convergence absolue de $\sum_{n\geq 2}\frac{\cos(n)}{n(n-1)}$ qui implique immédiatement sa convergence.

2 Pour tout $n>0$, on a

$$\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^2},$$

or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2n^2}$ est convergente, ainsi d'aprés le théorème de comparaison, la série $\sum_{n\geq 1}\arctan\left(\frac{1}{2n^2}\right)$ est convergente.

3 Pour tout $n>0$, on a

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n},$$

or la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente, ainsi d'aprés le théorème de comparaison, la série $\sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente.

Correction d'exercice 10

On sait que pour tous $a,\ b\geq 0$, on a

$$ab\leq\frac{1}{2}(a^2+b^2).$$

Donc, on exploite les comparaisons suivantes

$$\max(u_n,v_n)\leq u_n+v_n,\ \ \sum\sqrt{u_nv_n}\leq\frac{1}{2}(u_n+v_n)\ \text{ et }\frac{u_nv_n}{u_n+v_n}=\frac{u_n}{u_n+v_n}v_n\leq v_n.$$

Par comparaison de série à termes positifs on peut alors conclure.

Correction d'exercice 11

1 Si $\alpha>1$, alors on utilise la règle de Riemann avec $\beta\in]1,\alpha[$,

$$n^{\beta}\frac{\ln(n)}{n^{\alpha}}=\frac{\ln(n)}{n^{\alpha-\beta}}\underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0<1.$$

Cela montre que la série de terme général u_n converge car $\beta>1$.

2 Si $\alpha<1$, alors on utilise la règle de Riemann avec $\beta\in]\alpha,1[$,

$$n^{\beta}\frac{\ln(n)}{n^{\alpha}}=n^{\beta-\alpha}\ln(n)\underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}+\infty\,.$$

Cela montre que la série de terme général u_n converge car $\beta<1$.

3 Lorsque $\alpha=1$, c'est plus compliqué, les règles de Riemann ne marche pas. Il s'agit d'une série à termes positifs, on peut appliquer la comparaison à une intégrale de la fonction

$$f:\ x\mapsto\frac{\ln x}{x}.$$

f est continue sur $]0,+\infty[$, donc intégrable et on a,

$$\int_2^A\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}\Big[(\ln^2(x))\Big]_2^A\underset{A\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}+\infty\,.$$

ce qui montre que l'intégrale est divergente, la fonction $x\mapsto\frac{\ln x}{x}$ est clairement décroissante et tend vers 0 en l'infini, donc la série de terme général $u_n=\frac{\ln(n)}{n^{\alpha}}$ diverge.

Correction d'exercice 12

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1.$$

Donc, d'après le critère de D'Alembert la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1.$$

Donc le critère de D'Alembert ne donne aucune information sur la nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$. Mais on peut donner un développement limité de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

d'où d'après le critère de Duhamel, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente.

3 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \Big(1 + \frac{a}{n}\Big)^{-n} = e^{-a}$.

- **a** Si $a > 1$ la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.
- **b** Si $a < 1$ la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge.
- **c** Si $a = 1$, $u_n = 1$ et la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

4 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{n}{2^n}\Big) = 0 < 1$. Donc, la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

5 La limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure sa nature, appliquons donc la règle de Raabe-Duhamel.

$$\lim_{n\to+\infty} n\Big(\frac{u_n}{u_{n+1}}\Big) = \lim_{n\to+\infty} n\Big(\frac{1+2n}{n^2}\Big) = 2 > 1,$$

ce qui prouve la convergence de la série.

6 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \Big(\frac{(3n+1)}{(3n+3)}\Big)^2 = 1.$$

Ce qui est un cas douteux, alors on calcule la limite,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\Big(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\Big) &= \lim_{n\to+\infty} n\left(\Big(\frac{(3n+3)}{(3n+1)}\Big)^2-1\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} n\Big(\frac{4}{3n+1}+\frac{4}{(3n+1)^2}\Big)=\frac{4}{3}>1.\end{aligned}$$

D'où d'après la règle de Raabe-Duhamel la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

7 $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^{2-\frac{1}{n}}}{(n^2+1)^{\frac{1}{n}}}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3^{2-\frac{1}{n}}}{e^{\frac{1}{n}\ln(n^2+1)}}\right) = 9 > 1$. Donc, la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Correction d'exercice 13

1 Pour $n \geq 2$, on a

$$|u_n| = \frac{1}{n^2+(-1)^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 2} |u_n|$ est converge, d'après ce que l'on sait des séries de Riemann, de sorte que la série alternée $\sum_{n\geq 2} u_n$ est absolument convergente.

2 Pour $n \geq 1$, on a

$$|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Donc la série $\sum_{n\geq 2} |u_n|$ est diverge (équivalente à la séries de Riemann avec $\alpha < 1$). Mais d'après le règle de Leibniz, la suite de terme général $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ est décroissante et tend vers 0. Alors la série alternée $\sum_{n\geq 21} u_n$ est semi- convergente.

3 Pour $n \geq 2$, on a $u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = (-1)^n v_n$, telle que $v_n = \frac{1}{n+(-1)^n}$. Comme la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ n'est pas décroissante, on ne peut pas appliquer le critère de Leibnitz. Mais en utilisant le dévellopement limité on trouve,

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n}\times\Big(1+\frac{(-1)^n}{n}\Big)^{-1}\\ &\simeq \frac{(-1)^n}{n}\times\Big(1-\frac{(-1)^n}{n}\Big) = \frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

Car $(1+t)^\alpha \simeq 1+\alpha t$ au voisinage de 0. Sachant que les deux séries de termes généraux $\frac{(-1)^n}{n}$ et $\frac{1}{n^2}$ convergent respectivement d'après Leibnitz et Riemann, alors la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

Pour $n \geq 2$, on a $|u_n| = \frac{1}{n+(-1)^n} = (-1)^n v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Donc, la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ semi-converge.

4 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|u_n| = \left|\frac{2+\sin(an)}{n^2}\right| \leq \frac{3}{n^2}.$$

D'où la série $\sum_{n\geq 2} |u_n|$ est converge (équivalente à la séries de Riemann avec $\alpha > 2$). Par conséquent la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ est converge.

Correction d'exercice supplémentaire 1

1 **a** On montre l'implication directe. Si la série de terme général u_n converge, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+u_n} = 1.$$

Donc, $u_n \sim v_n$, c'est à dire les deux séries sont de mêmes natures.

b Réciproquement, si la série de terme général v_n converge, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$, donc on a

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1-u_n}.$$

On a encore $v_n \sim u_n$, donc les séries sont de mêmes natures.

2 **a** Si $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et est de somme S alors $v_n \sim \frac{u_n}{S}$ et on peut conclure.

b Si $\sum_{n\geq 1} u_n$ diverge, alors,

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1-v_n) = \ln\left(\frac{u_1}{u_1+u_2+\ldots+u_n}\right) \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} -\infty\,.$$

Si $v_n \to 0$, $\ln(1-v_n) \sim -v_n$, donc $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge car les séries sont de signe constant.

Si $v_n \not\to 0$, la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ diverge grossièrement.

Correction d'exercice supplémentaire 2

Étude de la série de Bertrand

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}, \quad (\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}).$$

On pose $u_n = \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$. Premièrement nous donnons un tableau qui montre la limite du terme général u_n suivant les valeurs réels de $\alpha,\ \beta$.

	$\alpha > 1$	$\alpha = 0$	$\alpha < 1$
$\beta > 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
$\beta = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
$\beta < 1$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

D'après le tableau précédent, il est clair que pour $\alpha < 0$ ou $(\alpha = 0$ et $\beta \leq 0)$, la série de Bertrand $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ est divergente.

1 Pour $\alpha = 0,\ \beta > 0$, la série de Bertrand est divergente car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\ln^\beta n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^\beta n}{n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, ainsi d'aprés le règle de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\ln^\beta n}$ est divergente.
D'où la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\ln^\beta n}$ est divergente pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

2 Pour $\alpha = 0,\ \beta > 0$, la série de Bertrand est divergente car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\ln^\beta n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^\beta n}{n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, ainsi d'aprés le règle de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\ln^\beta n}$ est divergente.
D'où la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\ln^\beta n}$ est divergente pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

3 Pour $\alpha > 1,\ \beta > 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}}{\frac{1}{n^\alpha}} = 0,$$

or la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente, ainsi d'après le règle de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ est convergente.

4 Pour $0 < \alpha < 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^\beta n}{n^{1-\alpha}} = 0,$$

et comme la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est convergente, ainsi d'aprés le règlel de Riemann, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ est divergente.

5 **a** Pour $\alpha = 1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln^{\beta} x}$ positive, continue et décroissante sur $[2, +\infty[$, et donc l'intégrale $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{x \ln^{\beta} x} dx$ et la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n \ln^{\beta} n}$ sont de même nature. Or si $\beta \neq 1$ on a

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha} \ln^{\beta} x} dx &= \int_{\ln 2}^{+\infty} u^{\beta} du = \lim_{t\to+\infty} \int_{\ln 2}^{t} u^{\beta} du = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{1}{1-\beta} u^{1-\beta}\right]_{\ln 2}^{t} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{1-\beta}(\ln 2)^{1-\beta} & : Si \ \ \beta > 1 \\ +\infty & : Si \ \ \beta < 1. \end{cases}\end{aligned}$$

Alors, dans ce cas,

b Si $\beta > 1$ la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n \ln^{\beta} n}$ est convergente.

c Si $\beta < 1$ la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n \ln^{\beta} n}$ est divergente.

d Si $\beta = 1$ la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n \ln n}$ et l'intégrale définie sur $[2, +\infty[$, et la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x \ln^{\beta} x}$ sont même nature, donc est elle divergente. En effet

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t\to+\infty} \int_2^{t} \frac{1}{x \ln x} = \lim_{t\to+\infty} \int_{\ln 2}^{t} \frac{1}{u} du = \lim_{t\to+\infty} \left[\ln u\right]_{\ln 2}^{t} = +\infty.$$

Ainsi si $\alpha > 1$ ou bien $\alpha = 1$ et
$\beta > 1$, la série de Bertrand $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$ est convergente.

6 Pour $\alpha > 0$ et $\beta = 0$, la série de Bertrand devient une série de Riemann $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$ qui est convergente si et seulement si $\beta > 1$.

7 **a** Pour $\alpha > 0$ et
$\beta < 0$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on trouve,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}}{\dfrac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{\varepsilon} \ln^{\beta} n} = 0.$$

Il est clair que pour $\alpha - \varepsilon > 1$, (i.e. $\alpha > 1 + \varepsilon$), la série de Riemann $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$ est convergente.

b Si $\alpha > 1$ alors il existe un $\varepsilon' > 0$ (par exemple $\varepsilon' = \dfrac{\alpha - 1}{2}$) tel que $\alpha > 1 + \varepsilon'$, donc la série $\sum_{n\geq 2} \dfrac{1}{n^{\alpha} \ln^{\beta} n}$ est convergente.

c $\alpha \leq 1$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^\beta n}{n} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente, car $\alpha \leq 1$, alors d'après le règle de Riemann, la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ est divergente.

Alors, d'après cette étude on conclut que:

(i) Si $\alpha > 1$ la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

(ii) Si $\alpha < 1$ la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.

(iii) Si $\alpha = 1$ la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ converge si et seulement $\beta > 1$.

Correction d'exercice supplémentaire 3

1 Pour tout $n \geq 1$, posons $u_n = a_n b_n$, où la suite $a_n = \frac{1}{n}$ qui est bien positive et décroissante vers zéro, et la suite des sommes partielles associée à la suite $b_n = \sin n$ est bornée. En effet, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} |S_n| &= \Big|\sum_{k=1}^{n} b_k\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} \sin k\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} Im(e^{ik})\Big| \\ &= \Big|Im \sum_{k=1}^{n} e^{ik}\Big| \leq \Big|\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\Big| = \Big|e^i \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik}\Big| = |e^i|\Big|\frac{1-e^{in}}{1-e^i}\Big| \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{2-2\cos 1}} = \frac{1}{\sin(\frac{1}{2})} = M. \end{aligned}$$

Alors, d'après le critère d'Abel la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$ est convergent.

2 Pour tout $n \geq 1$, posons $u_n = a_n b_n$, où la suite $a_n = \frac{1}{n}$ qui est bien positive et décroissante vers zéro, et la suite des sommes partielles associée à la suite $b_n = \cos n$ est bornée. En effet, pour tout

$n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} |S_n| &= \Big|\sum_{k=1}^{n} b_k\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} \cos k\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{n} Re(e^{ik})\Big| \\ &= \Big|Re\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\Big| \leq \Big|\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\Big| = \Big|e^{i}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik}\Big| = |e^{i}|\Big|\frac{1-e^{in}}{1-e^{i}}\Big| \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{2-2\cos 1}} = \frac{1}{\sin(\frac{1}{2})} = M. \end{aligned}$$

Alors, d'après le critère d'Abel la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos n}{n}$ est convergent.

Correction d'exercice supplémentaire 4

1 Pour tout $a \in]0,1[$, c'est à dire $|a| < 1$, donc la sérié géométrique $\sum_{n\geq 0} a^{2n}$ converge (absolument convergente). Alors, on a

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{n\geq 0} a^{2n}\Big)^2 &= \Big(\sum_{n\geq 0} a^{n}\Big)\Big(\sum_{n\geq 0} a^{n}\Big) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} a^k a^{n-k} \\ &= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} a^k a^{n-k} = \sum_{n\geq 0} x^n \sum_{k=0}^{n} 1 = \sum_{n\geq 0}(1+n)a^n. \end{aligned}$$

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_{nk}u_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

Comme es termes de la somme $A_n = \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$ sont tous supérieurs à $\dfrac{1}{2n}$. Donc, on a

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

En on déduit que la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0, et par conséquent $\lim_{n\to+\infty} w_n \neq 0$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ est grossièrement divergente.

On remarque que la série produit diverge malgré que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente, mais n'est pas absolument convergente.

Suites et séries de fonctions

Chapitre 2

Sommaire

2.1 Série d'exercices N 2 25
2.2 Correction de série N 2 29

1 Série d'exercices N 2

Exercice 1

Étudier la converge simple et uniforme des suites de fonctions sur le domaine indiqué

1. $f_n(x) = \dfrac{2n|x|}{1+n^2x^2}$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $I = [0,1]$.
3. $f_n(x) = n(e^{\frac{x}{n}} - 1)$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+ax^n}$, $I = \mathbb{R}$.
5. $f_n(x) = x^n(1-x)$, $I = [0,1]$.
6. $f_n(x) = 2n^2\dfrac{\sin(nx)}{n}$, $I = \mathbb{R}$.
7. $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$, $I = [0,+\infty[$.

Exercice 2

Soit la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}.$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur $[0,1]$.
2. Montrer qu'on a $f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f_n'(x)$ partout sauf en $x = 0$. Que peut on déduire

Exercice 3

Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^x + xe^{-x}}{x+n}.$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suites $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,1]$
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 (x^3+1)f_n(x)dx$.

Exercice 4

Soit la suite de fonctions définie sur $[0,+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & : Si \;\; x \in [0,n] \\ 0 & : Si \;\; x > n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f sur $[0,+\infty[$.
2. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_0^{+\infty} f_n(x)dx$ et $\int\limits_0^{+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx$. Que peut on déduire ?

Exercice 5

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n & : Si \;\; x \in [0,n] \\ 0 & : Si \;\; x > n. \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction $f(x) = e^{-x}$.
2. En déduire $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Exercice 6

Soit la série définie sur l'intervalle $I = [1,+\infty[$ par $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$.

1. Montrer que la série est converge vers une limite S continue sur I.
2. Montrer que S est dérivable sur I et calculer sa dérivée S' et on déduire que S est croissante sur I.
3. Puis, calculer $\lim\limits_{x\to -1} S(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)$.

Exercice 7

On considère la série de fonction $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ telle que, $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

1. Montrer que cette série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(x) = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ est une fonction continue.
3. Montrer que

$$\int\limits_0^{\pi} f(x)dx = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

4 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ f'(x) = 2\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

5

$$\int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 8

Soit la suite de fonctions (f_n) définie sur $\mathbb{R}_+$ par,

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

1 Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers une fonction sur $\mathbb{R}_+$.

2 Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$, $a > 0$. Ce résultat reste-t-il vrai sur $[0, +\infty[$ ou sur $]0, +\infty[$.

3 Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9

Soit la série de fonctions $\sum_{n=0} f_n$ définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ tel que,

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

1 Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement vers une fonction f.

2 Montrer que

$$\forall x \in]0, +\infty[: \ f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

Exercice supplémentaire 1

Soit la fonctions f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \ln(1+nx)}.$$

1 Justifier que f est définie et continue sur sur $\mathbb{R}_+^*$.

2 Déterminer la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3 Établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer f'.

Exercice supplémontaire 2

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$, définies par $f_n(x) = \sqrt{1-x^2} + e^{-nx^2}\sin(nx)$.

1 Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$, converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction que l'on déterminera.

2 Montrer que la suite $((f_n)_{n\geq 0}$, converge uniformément vers une fonction f sur tout intervalle $[a,1]$ où $a > 0$.

3 Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$, ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice supplémontaire 3

Pour $x \in \mathbb{R}$ on définie la fonction f pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(nx)}.$$

1 Déterminer l'ensemble D_f de définition de f.

2 Montrer que f est continue sur $]1,+\infty[$.

3 Calculer les limites de f en $+\infty$ et 1.

4 Montrer que f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et dresser son tableau de variation.

Exercice supplémontaire 4

Étudier les types de convergence pour les séries suivantes

1 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

2 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

3 $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n(1-x)$, $x \in [0,1]$.

4 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n(1-x)$, $x \in [0,1]$.

5 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx}{1+n^4x^2}$, $x \in \mathbb{R}_+$.

6 $\sum_{n=1}^{+\infty} xe^{\frac{x}{n}}$, $x \in [0,+\infty[$.

2 Correction de série N 2

Correction d'exercice 1

1 Étude de $f_n(x) = \dfrac{2n|x|}{1+n^2x^2}$.

a La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ définie sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, on étudant la convergence simple sur $\mathbb{R}$.
Pour $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$, donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.
Pour $x \neq 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2|x|}{nx^2} = 0$.
Donc la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction f nulle sur $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = 0$.

b Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
Pour $x = \dfrac{1}{n}$, nous avons, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n|x|}{1+n^2x^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{1+1} = 1 \neq 0$. Alors, la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.
On étude la convergence uniforme sur les intervalles de formes $I =]-\infty, a] \cup [a, +\infty[$ pour $a > \dfrac{1}{n}$. La fonction f_n est paire il suffit de l'étudier sur $[a, +\infty[$. On a pour tout $x > 0$,

$$f_n'(x) = 2n\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2},$$

et le tableau de variations est donné par

x	0		$\frac{1}{n}$		a		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$			
$f_n(x)$	0	↗	1	↘			0

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in I} |f_n(x)| = f_n(a) = \frac{2na}{1+n^2a^2},$$

Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_\infty = 0$, ce qui montre la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ sur I.

2 Étude de $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$.

a On étude la convergence simple de $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $[0,1]$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(0) = 01$, donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$.
Pour $x \in]0,1]$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+nx} = 0$.
Donc la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x = 0 \\ 0 & : \quad x \in]0,1]. \end{cases}$$

b Convergence uniforme sur $[0,1]$.
Puisque Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n(x)$ sont continues sur $[0,1]$ et la fonction limite f est discontinue sur $[0,1]$, alors la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

3 Étude de $f_n(x) = n(e^{\frac{x}{n}} - 1)$.

a La convergence simple de $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $I = \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n(e^{\frac{x}{n}} - 1) = \begin{cases} 0 & : \ x = 0 \\ x & : \ x \neq 0. \end{cases}$
Donc la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : Si \ \ x = 0 \\ x & : Si \ \ x \neq . \end{cases}$$

b Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
Pour $x = n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = \lim\limits_{n\to+\infty} n(e-1) = +\infty \neq 0$. Donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

4 Étude de $f_n(x) = n(e^{\frac{x}{n}} - 1)$.

a La convergence simple de $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $I = \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n(e^{\frac{x}{n}} - 1) = \begin{cases} 0 & : Si \ \ x = 0 \\ x & : Si \ \ x \neq 0. \end{cases}$
Donc la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : Si \ \ x = 0 \\ x & : Si \ \ x \neq . \end{cases}$$

b Convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
Pour $x = n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = \lim\limits_{n\to+\infty} n(e-1) = +\infty \neq 0$. Donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

5 Si $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+ax^n}$. Alors, on a

a Convergence simple de $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $I = \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & : Si \ \ |x| > 1 \\ 0 & : Si \ \ |x| < 1 \\ \dfrac{1}{1+a} & : Si \ \ x = 1 \\ \text{pas de limite} & : Si \ \ x = -1. \end{cases}$
Donc la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a} & : Si \ \ x > 1 \\ 0 & : Si \ \ -1 < x < 1 \\ \dfrac{1}{1+a} & : Si \ \ x = 1 \end{cases}$$

b Convergence uniforme sur $]1,+\infty[$. Comme les fonctions f_n, pour $n \geq 0$, sont continues sur $]1,+\infty[$ et la fonction limite simple est discontinue sur $]-1,+\infty[$ alors la convergence n'est pas uniforme sur $]1,+\infty[$.

6 Étude la convergence simple et uniforme de $f_n(x) = x^n(1-x)$ sur $I = [0,1]$.

a **La converge simple**
Pour $x = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(1) = 0$.
Pour $x \in [0,1[$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}(x^n - x^{n+1}) = 0$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

b **La converge uniforme**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable sur $]0,1[$ et on a

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x).$$

x	0		$\frac{1}{n+1}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	↗	$f\left(\frac{1}{n+1}\right)$	↘	0

On déduit du tableau de variations précédent que,

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \leq \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^n}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^n}\right)\right) = 0.$$

D'où la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

7 Soit $f_n(x) = nx^2e^{-nx}$, $I = [0,+\infty[$.

a **Converge simple sur** $[0,\infty[$.
Pour $x = 0$, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$.
Pour $x > 0$, et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} nx^2e^{-nx} = 0$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers la fonction nulle $f \equiv 0$.

b **Converge uniforme sur** $[0,+\infty[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et on a

$$f_n'(x) = (2-nx)ne^{-nx}.$$

x	0		$\frac{2}{n}$		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	↗	$\frac{4e^{-2}}{n}$	↘	0

On déduit du tableau de variations précédent que,

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\geq 0}|f_n(x)-f(x)|\leq \lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{4e^{-2}}{n}=0.$$

D'où la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ sur $[0,+\infty[$ vers la fonction nulle.

Correction d'exercice 2

1 Étude la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
Si $x=0$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $f_n(0)=0$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} f_n(0)=0$.
Si $x\in]0,1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{n^2x^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2x}=0.$$

Alors, $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ et on a

$$f_n'(x)=\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Donc, sa tableau de variations sur $[0,1]$ est donné par

x	0		$\frac{1}{n}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	↗	$\frac{1}{2n}$	↘	$\frac{1}{n^2+1}$

Par conséquent,

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n}\underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0$$

$(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f qui est dérivable avec $f'=0$.

2 Étudions la convergence uniforme de la suite de fonctions dérivées $f_n'(x)=\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$.
Si $x=0$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $f_n'(0)=1$. Donc, $\lim_{n\to+\infty} f_n'(0)=1$.
Si $x\in]0,1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n^2x^2}{n^4x^4}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{n^4x^4}=0.$$

Donc, la suite $(f_n')_{n\geq 0}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction h définie par.

$$h(x)=\begin{cases}1 & : \quad x=0\\ 0 & : \quad x\in]0,1].\end{cases}$$

Il est donc évidemment $f'\neq h$

Remarque

On en déduit à cet exercice est donc de mettre en valeur l'importance des hypothèses dans le théorème de dérivabilité d'une suite de fonctions, c'est à dire, on n'a pas généralement

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{d}{dx}\Big(f_n(x)\Big)\neq\frac{d}{dx}\Big(\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\Big).$$

Correction d'exercice 3

Étudie de la convergence simple et uniforme de la suites $(f_n)_{n\geq1}$ sur $[0,1]$, nous avons,

1 **a** Convergence simple sur $[0,1]$. Pour tout $x\in[0,1]$, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{ne^x+xe^{-x}}{x+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{ne^x}{n}=e^x.$$

Donc la suite $(f_n)_{n\geq1}$, converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f définie par

$$f(x)=e^x,\ x\in[0,1].$$

b La convergence uniforme de $(f_n)_{n\geq0}$ sur $[0,1]$. Alors, pour tout $x\in[0,1]$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{xe^{-x}-xe^x}{n+x}\right|\leq\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,1]}\frac{1+e}{n}=0.$$

Ceci montre que la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

2 Calculons la limite $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1(x^3+1)f_n(x)dx$. Comme la convergence est uniforme sur $[0,1]$, donc,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1(x^3+1)f_n(x)dx=\int_0^1(x^3+1)\lim_{n\to+\infty}f_n(x)dx=\int_0^1(x^3+1)e^xdx.$$

Par intégration par partie on obtient,

$$\int_0^1(x^3+1)\lim_{n\to+\infty}f_n(x)dx=\int_0^1(x^3+1)e^xdx=5-e.$$

Correction d'exercice 4

1 Montrons que $(f_n)_{n\geq0}$ converge uniformément vers f sur $[0,+\infty[$.

2 **a** **La convergence simple:** Soit $x\in[0,+\infty[$. Alors, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n>n_0>x$, on a $f_n(x)=\frac{1}{n}$, par suite, on trouve,

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.$$

b **Étude de convergence uniforme.** On a

$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,+\infty[}|f_n(x)-f(x)|=\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in[0,+\infty[}\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Donnc, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformémrnt sur $[0,+\infty[$.

3 On a

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n}\frac{1}{n}dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\Big[x\Big]_0^n=\lim_{n\to+\infty}1=1.$$

Mais, on a

$$\int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)dx=\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)dx=\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a}0dx=0.$$

On remarque que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}f_n(x)dx\neq\int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)dx.$$

Cela, ne peut pas nous permet, à appliquer le théorème d'intégration pour intervertir la limite et l'intégrale sur un intervalle non borné.

Correction d'exercice 5

1 Au début montrons que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge semplement sur $[0,+\infty[$ vers f.
Soit $x\in[0,+\infty[$. Alors, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n>n_0>x$, on a $f_n(x)=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$, par conséquent,

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=e^{-x}.$$

D'où, la convergence simple de $(f_n)_{n\geq 1}$ vers la fonction $x\mapsto e^{-x}$ sur $[0,+\infty[$.
Posons,

$$h_n(x)=f(x)-f_n(x)=\begin{cases}e^{-x}-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & :Si\ \ x\in[0,n]\\ e^{-x} & :Si\ \ x>n.\end{cases}$$

et déterminons la borne supérieure de la fonction $|h_n|$ sur $[0,+\infty[$. Pour tout $n\geq 1$, la fonction h_n est dérivable sur $[0,+\infty[$ et on a

$$h_n'(x)=f'(x)-f_n'(x)=\begin{cases}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}-e^{-x} & :Si\ \ x\in[0,n]\\ e^{-x} & :Si\ \ x>n.\end{cases}$$

La fonction h_n est définie et continue sur $[0,+\infty[$.
Pour $x\in[0,n]$, $h_n(x)=e^{-x}-e^{n\ln(1-\frac{x}{n})}$, et d'après le théorème des accroissements finis, il existe

c comprise enter $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$ et $-x$ telle que

$$\begin{aligned}\left|e^{n\ln(1-\frac{x}{n})}-e^{-x}\right| &= e^c\left(n\ln(1-\frac{x}{n})+x\right)\\ &= e^c\left(-x-\frac{x^2}{2n}+o\Big(-\frac{x^2}{2n}\Big)+x\right)\\ &= e^c\Big(-\frac{x^2}{2n}+o\Big(-\frac{x^2}{2n}\Big)\Big).\end{aligned}$$

On distingue deux

a Si $x\in[0,\sqrt[4]{n}]$,

$$|h_n|=e^c\left|\frac{-x^2}{2n}+o\Big(-\frac{x^2}{2n}\Big)\right|\leq e^c\Big(\frac{x^2}{2n}\Big)\leq\frac{e^{-x}}{\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0.$$

b Si $x\in[\sqrt[4]{n},n]$, on aura

$$|h_n|=e^c\left|\frac{-x^2}{2n}+o\Big(-\frac{x^2}{2n}\Big)\right|\leq e^{-\sqrt[4]{n}}\Big(\frac{x^2}{2n}\Big)\leq ne^{-\sqrt[4]{n}}\underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Alors, on en déduit,

$$\sup_{x\leq 0}|f_n(x)-f(x)|\underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0.$$

D'où la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq1}$ vers la fonction $x\mapsto e^{-x}$ sur $[0,+\infty[$.

2 Soit l'integrale $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$. Alors, pour calculer I on a besoin à l'intégrale de Wallis qui est donné pour tout $n\in\mathbb{N}$, par,

$$W_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx\underset{+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons $I_n=\int_0^{+\infty}f_n(x^2)dx$, donc, $I_n=\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx$ Montrons que I_n tend vers I quand n tend vers $+1\infty$,

$$\begin{aligned}\left|I_n-I\right| &= \left|\int_0^{+\infty}f_n(x^2)dx-\int_0^{\sqrt{n}}f_n(x^2)dx\right|\\ &\leq \int_0^{\sqrt{n}}\left|f_n(x^2)-f_n(x^2)dx\right|dx+\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}f_n(x^2)dx\\ &= \sqrt{n}\times\frac{1}{ne}+\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}f_n(x^2)dx=\frac{1}{e\sqrt{n}}+\int_{\sqrt{n}}^{+\infty}f_n(x^2)dx.\end{aligned}$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty} I_n = I$. Calculons maintenant la limite de I_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en effectuant les changements de variables $x = u\sqrt{n}$ puis $u = \cos v$, on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n} \int_0^1 \left(1 - u^2\right)^n du \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} v dv \\ &= \sqrt{n} W_{2n+1}, \end{aligned}$$

où W_n est la $n-$ème intégrale de Wallis. On sait que

$$W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}},$$

et donc $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. D'où le résultat, I_n tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ quand n tend vers $+\infty$ c'est à dire,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Correctiob d'exercice 6

1 Il est clair que la suite $\left(\frac{1}{n+x}\right)_{n\geq 0}$, pour $x > 1$ fixé, est positive, décroissante et tend vers 0. Par application du critère des séries alternées, la série est convergente pour tout $x > 1$.
Posons $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$. Nous avons d'après ce qui précéde que, pour $x > 1$ fixé la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ vérifie le critère des séries alternées. Par conséquent, on sait que son reste $R_n(x)$ vérifie

$$\|R_n(x)\|_\infty \leq |u_{n+1}| \leq \frac{1}{x+n+1}.$$

Puisque $x > 1$, on a en particulier,

$$\|R_n(x)\|_\infty \leq \frac{1}{n}.$$

Ceci tend vers 0 (indépendamment de x), de sorte qu'on a prouvé la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ sur I. Puisque chaque fonction u_n est continue, la fonction S est continue sur I.

2 Chaque fonction u_n est dérivable sur I avec $u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. De même qu'à la question précédente, pour $x > 1$ fixé, la série $\sum_{n\geq 1} u_n(x)$ est convergente car elle vérifie les conditions du critère des séries alternées. De plus, si on note $\overline{R}_n(x) = \sum_{k=n+1} u_k'(x)$ son reste, on a $\overline{R}_n(x) \leq \frac{1}{(x+n+1)^2} \leq$

$\frac{1}{n^2}$, inégalité valable pour tout $x > 1$. On peut donc majorer le reste par une quantité qui tend vers 0. Donc, la série dérivée est uniformément convergente. On en déduit que la fonction S est dérivable, et que sa dérivée est donnée par $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. De plus, on sait qu'on peut encadrer la somme d'une série alternée par deux sommes partielles consécutives, par exemple ici

$$\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+2)^2} \leq u'(x) \leq \frac{1}{(x+1)^2}.$$

En particulier, la dérivée est positive et la fonction est croissante.

3 De même qu'à la question précédente, par le critère des séries alternées, on peut encadrer S par deux sommes partielles consécutives

$$-\frac{1}{x+1} \leq S(x) \leq -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}.$$

Il suffit alors d'appliquer le théorème d'encadrement des limites pour prouver que

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ >}} S(x) = +\infty, \text{ et } \lim_{x\to+\infty} S(x) = 0.$$

Correction d'exercice 7

1 $\forall x \in \mathbb{R} : \left|\frac{\sin(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$. Comme $\frac{1}{n^3}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 3 > 1$, on vient de montrer que la série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$ et par conséquent simplement sur $\mathbb{R}$.

2 Les fonctions f_n sont continues, elles convergent uniformément sur $\mathbb{R}$ donc est une fonctions continue.

3 La convergence étant uniforme sur $[0, \pi] \subset \mathbb{R}$ et les fonctions f_n étant continues donc intégrables on a

$$\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^\pi \sum_{n\geq 1} f_n(x)dx = \sum_{n\geq 1} \int_0^\pi f_n(x)dx = \sum_{n\geq 1} \int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx.$$

Par intégration, on trouvre

$$\int_0^\pi \frac{\sin(nx)}{n^3}dx = \frac{1}{n^3}\int_0^\pi \sin(nx)dx = \frac{1}{n^3}\Big[-\frac{\cos(nx)}{n}\Big]_0^\pi = \frac{1}{n^4}\Big(1-(-1)^n\Big).$$

Selon que n est pair ou impair $\left(1-(-1)^n\right)$ est nul ou vaut 2, on va couper la somme en deux

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n^3}dx &= \sum_{n\geq 1}\frac{1-(-1)^n}{n^4}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{2k}}{(2k)^4}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{2k+1}}{(2k+1)^4}\\ &= 0+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2}{(2k+1)^4}.\end{aligned}$$

Puis, on fait le changement $n=2k+1$, alors, $\begin{cases} k=0\\ n=1,\end{cases}$ on trouve donc,

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n^3}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(2n-1)^4}.$$

C'est bien l'égalité demandé.

4 Les fonctions f_n sont dérivables, et $f_n'(x)=\dfrac{\cos(nx)}{n^2}$, la série de fonctions de terme général f_n converge simplement il reste à montrer que la série de fonction de terme général f_n' converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Comme, on a

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ \left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right|\leq\frac{1}{n^2}.$$

D'où,

$$\|f_n'\|_\infty=\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n'(x)|\leq\frac{1}{n^2}\underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow}0.$$

La série de fonction de terme général f_n' converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc converge uniformément sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le théorème de dérivation des séries

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}f_n'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

On remarque que, il n'était pas nécessaire de montrer la convergence uniforme de la série de fonction de terme général f_n' sur $\mathbb{R}$, sur un intervalle $[a,b]$ cela suffit.

5 D'après la question précédente, nous avons

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Par intégration, on trouve,

$$\int_{n=0}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)dx=\int_{n=0}^{\pi}f'(x)dx=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(n\frac{\pi}{2})}{n^3}.$$

Pour les valeurs paires $\sin n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc on va distinguer les valeurs paires de valeurs impaires

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{n^3} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{(2k)^3} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(\frac{(2k+1)\pi}{2})}{(2k+1)^3} \\ &= 0 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \sin(\frac{\pi}{2})}{(2k+1)^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.\end{aligned}$$

Par changement de variable $k = n$, on obtient le resultat

$$\int_{n=0}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \right) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}.$$

Correction d'exercice 8

1 Si $x = 0$, $f_n(0) = \frac{(-1)^n}{n+1}$. Il s'agit d'une série alternée, la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ tend vers 0 en décroissant donc la série numérique de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1}$ converge.
Si $x > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 |f_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 e^{-nx}}{n+1} = 0.$$

La série numérique de terme général $f_n(x)$ converge absolument donc elle converge, autrement dit la série de fonctions de terme général converge simplement.
Conclusion: la série de fonctions de terme général converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2 Si $x > a > 0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n+1} \leq \frac{e^{-na}}{n+1} = \alpha_n.$$

Par suite, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 e^{-na}}{n+1} = 0.$$

Avec les règles de Riemann avec $\alpha > 1$, cela montre que la série numérique de terme général α_n converge donc la série de fonction de terme général f_n converge normalement sur $[a, +\infty[$.

3 **a** Pour $x \in [a, +\infty[$, on trouve,

$$\sup_{x\geq 0} |f_n(x)| = \sup_{x\geq 0} \frac{e^{-nx}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Or $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente avec $\alpha = 1 \leq 1$, donc la série de fonctions de terme général f_n ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

b Si $x > 0$, on aura

$$\sup_{x>0} |f_n(x)| = \sup_{x>0} \frac{e^{-nx}}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Cela ne change rien si on ouvre l'intervalle.

4 On va utiliser la majoration du reste du théorème des suites alternées

$$|R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+2} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Donc,

$$\sup_{x\geq 0} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) - \sum_{n=0}^{N} f_n(x) \right| = \sup_{x\geq 0} \left| R_N(x) \right| \leq \frac{1}{N+1} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La série de fonctions de terme général converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Correction d'exercice 9

1 Il s'agit d'une série alternée, pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| = \frac{1}{n+x}$ tend vers 0 en décroissant, d'après le théorème de suites alternées, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge, autrement dit la série de fonction de terme général $f_n(x)$ converge simplement.

2 Pour tout $x > 0$, on a $f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$, donc,

$$|f_n'(x)| = \frac{1}{(n+x)^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

$\frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente avec $\alpha = 2 > 1$ donc la série de fonctions de terme général f_n' converge normalement sur $]0, +\infty[$, donc uniformément sur $]0, +\infty[$, comme les fonctions f_n sont dérivable, le théorème de dérivation des série entraine que la somme est dérivable et que

$$f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

Correction d'exercice supplémontaire 1

1 Posons $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + \ln(1+nx)} = a_n(x)b_n(x)$, telles que $a_n = (-1)^n$ et $b_n = \frac{1}{n+\ln(1+nx)}$.

Pour x fixé, $(b_n(x))_{n\geq 0}$ est positive, décroissante et $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 0} |b_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

De plus la somme partielle de $(a_n)_{n\geq 0}$ et bornée. En effet

$$|S_n| = \left| \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^n \right| \leq 1.$$

Par conséquent, d'après le théorème de Leibniz (théorème des séries altèrnées), la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln(1+nx)}$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$ et comme la fonction f_n est continue sur $]0,+\infty[$ pour tout $n \geq 0$. Alors, le théorème de continuité est garantir la continuité la fonction f sur $]0,+\infty[$.

2 Calculons la limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Puisque la série $\sum_{0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$ et f est continue, alors,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \sum_{0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) \\ &= \sum_{0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln(1+nx)} = 0.\end{aligned}$$

3 Montrons que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.
On a $f_n \in C^1(]0,+\infty[)$ pour tout $n \geq 1$. Posons $f_n'(x) = \alpha_n(x)\beta_n(x)$ avec $\alpha_n(x) = (-1)^{n+1}$ et $\beta_n(x) = \frac{n}{(1+nx)(n+\ln(1+nx))^2}$. Pour x fixé, $(b_n(x))_{n\geq 0}$ est positive, décroissante et

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 0} |\beta_n(x)| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+nx)(n+\ln(1+nx))^2} = 0.$$

De plus la somme partielle de $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ et bornée. Car,

$$|S_n| = \left| \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{n+1} \right| \leq 1.$$

Par conséquent, d'après le théorème de Leibniz (théorème des séries altèrnées), la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$ et comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$ pour tout $n \geq 1$. Alors, le théorème de dérivation est donné le résultat $f \in C^1(]0,+\infty[)$, et on obtient,

$$\forall x \in]0,+\infty[: \quad f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(1+nx)(n+\ln(1+nx))^2}.$$

Correction d'exercice supplémontaire 2

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ définies par $f_n(x) = \sqrt{1-x^2} + e^{-nx^2}\sin(nx)$.

1 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est définie pour $x \in [-1,1]$, donc le domaine définition de f_n est $D_{f_n} = [-1,1]$. Pour tout $x \in [-1,1]$, comme $\lim_{n\to+\infty} e^{-nx^2} = 0$ et la fonction $n \mapsto \sin(nx)$ bornée, alors, on a

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{1-x^2} + e^{-nx^2}\sin(nx)\right) = \sqrt{1-x^2}.$$

Par conséquent la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $[-1,1]$ vers une fonction f définie par,

$$\forall x \in [-1,1] : \ f(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

2 Montrons que, pour tout $a > 0$, la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[a,1]$.
Alors, pour tout $x \in [a,1]$, et comme $|\sin(nx)| \leq 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[a,1]} |e^{-nx^2}\sin(nx)| \leq \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0a,1]} e^{-ax^2} = 0.$$

Ceci montre que la convergence est uniforme sur $[a,1]$.

3 Montrons que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0,1]$.
Pour $x_n = \dfrac{1}{n}$, alors,

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = \lim_{n\to+\infty} |e^{-\frac{1}{n}}\sin(1)| = \sin(1) \neq 0.$$

Donc, la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1]$.

Correction d'exercice supplémontaire 3

1 Détermination l'ensemble D_f de définition de f.
Soit la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{\ln(nx)}$. Alors, on f_n existe si et seulement si $x > 0,\ n \neq 0$, et la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge.
Donc, soit $x \in D_f =]0,+\infty[\setminus\{\dfrac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}^*\}$. Pour $n > \dfrac{1}{n}$, on a $\ln(nx) > 0$. On en déduit que la suite $\left(\dfrac{(-1)^n}{\ln(nx)}\right)_{n>0}$ est positive et décroissante à partir d'un certain rang et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Ainsi, la série numérique de terme général $f_n(x)$ converge en vertu du critère spécial aux séries alternées et donc $f(x)$ existe.
Le domaine de définition de f est $D_f =]0,+\infty[\setminus\{\dfrac{1}{n} : \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

2 Continuité de f sur $]1,+\infty[$.
La série est altérnée et convergente le reste $R_n(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{\ln(kx)}$ est donc majorée par la valeur absolue du premier terme de ce reste.
Ainsi, $\forall x > 1 : \ |R_n(x)| = |\dfrac{(-1)^{n+1}}{\ln((n+1)x)}| \leq \dfrac{1}{n+1}$.
Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x>1} |R_n(x)| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, d'où la convergece uniforme de la série sur $]1,+\infty[$ et donc la continuité de f sur $]1,+\infty[$.
$(\star)$ **Calcul de la limite de f en $+\infty$.**
Soit $x > 1$. Donc $f(x)$ existe. Pour tout entier naturel non nul n, $\ln(nx) > 0$. On en déduit que la

suite $\left(\frac{(-1)^n}{\ln(nx)}\right)_{n>0}$ est décroissante.

Cette série est altérnée et convergente le reste $R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{\ln((n+1)x)}$ est donc majorée par la valeur absolue du premier terme de ce reste.
D'après la majoration du reste d'une série altérnée convergente

$$\forall x > 1 : \ |f(x)| = |R_1(x)| \leq \frac{|(-1)^1|}{\ln(x)} \leq \frac{(-1)^1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(x)},$$

et en particulier $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On peut noter de plus que pour $x > 1$, $f(x)$ est du signe du premier terme de la série à savoir $\frac{1}{\ln(x)}$, donc $\forall x > 1 : \ f(x) > 0$.
$(\star\star)$ **Calcul de la limite de f en 1.**
Quand x tend vers 1 par valeurs supérieures, $f_n(x)$ tend vers $\alpha_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$. Puisque la séerie de fonctions de terme général $f_n n > 1$. converge uniformément vers sa somme sur $]1,+\infty[$, le théorème d'interversion des limites permet d'affirmer que la séerie numérique de terme général α_n, $n > 2$ converge et que la fonction $x \mapsto f(x) + \frac{1}{\ln x} = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x)$, tend vers le réel $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.
Donc, $\lim_{\substack{x>1\\ \to}} f(x) = \lim_{\substack{x>1\\ \to}} \Big(-\frac{1}{\ln(x)+} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \Big) = -\infty$ puisque la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ converge.

3 Montrons que f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et dresser son tableau de variation.
La série de fonctions de terme général $f_n, n > 1$, converge simplement vers la fonction f sur $]1,+\infty[$.
De plus chaque fonction f_n est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et pour $n \geq 1$ et $x > 1$, $f_n'(x) = \frac{(-1)^n}{x\ln^2(nx)}$.
Le reste de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} f_n'(x)$ est $|R_n'(x)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x\ln^2(kx)}| \leq \frac{1}{\ln^2(n+1)}$ et il vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\geq 1} |R_n'(x)| \leq \frac{1}{\ln^2(n+1)} = 0.$$

Ainsi, la série de fonctions de terme général f_n', $n > 1$, converge uniformément sur $]1,+\infty[$.

Résumé

(i) La série de fonctions de terme général $f_n, n > 1$, converge simplement vers f sur $]1,+\infty[$.

(ii) Chaque fonction $f_n, n > 1$,, est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$.

(iii) La série de fonctions de terme général f_n' converge uniformément sur $]1,+\infty[$.

D'après un corollaire du théorème de dérivation terme à terme, f est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et sa dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. On a

$$\forall x > 1 : \ f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x\ln^2(nx)}.$$

Pour $x > 1$, puisque la série de somme $f'(x)$ est alternée, $f'(x)$ est du signe du premier terme de la somme à savoir $-\dfrac{1}{x\ln^2(x)}$. Par suite,

$$\forall x > 1 : \ f'(x) < 0.$$

et f est donc strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

Correction d'exercice supplémontaire 4

1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

Or de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente, ainsi d'aprés le Théorème de Weierstrass, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^2+x^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc elle converge simplement, absolument et uniformément sur $\mathbb{R}$.

2 Soit la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}, \quad x \in \mathbb{R}$.

a C'est une série de Riemann, elle converge si et seulement si $x > 1$.
Pour $x > 1$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ est absolument convergente car est une série à termes positifs.

b Étude de la convergence normale sur $]1, +\infty[$. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a par définition $\dfrac{1}{n^x} = \dfrac{1}{e^{x\ln n}}$, et comme,

$$\forall x > 1 : \ \left(\frac{1}{n^x}\right)' = -\ln n e^{x\ln n} \leq 0.$$

D'où $\sup\limits_{x\in]1,+\infty[} \dfrac{1}{n^x} = \dfrac{1}{n}$, or la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ est divergente, ainssi la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ n'est pas normalemment convergente sur $]1, +\infty[$.
Nous remarquons que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[, \ (a > 1)$ et donc uniformément convergente, car,

$$\sup_{a>1}\left|\frac{1}{n^x}\right| = \sup_{a>1}\frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^a}.$$

Comme la série de Riemann $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^a}$ est converge pour $a > 1$.

c Étude de la convergence uniforme sur $]1, +\infty[$.
En utilisant le Critère de Cauchy, on a pour $p > q \geq 1$, on a

$$\sup_{x\in]1,+\infty[}\sum_{k=q+1}^{p}\frac{1}{k^x} = \sum_{k=q+1}^{p}\frac{1}{k},$$

car la fonction $x \mapsto \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{k}$ est décroissante sur $]1,+\infty[$.
Pour $p = 2n,\ q = n$, on trouve,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent,

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2} > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists p = 2n,\ q = n :\ p > q \geq n;\ \text{et} \sup_{x \in]1,+\infty[} \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{k^x} \geq \frac{1}{2}.$$

C'esst-à-dire la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ ne vérifie pas le critère de Cauchy sur $]1,+\infty[$ et donc ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.

3 Soit $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n(1-x), \quad x \in [0,1]$.

a **La convergence simple.** Si $x = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N},\ f_n(1) = 0$. Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n(1-x)$, et sa somme est nulle.
Si $x \in [0,1[$ la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ est une série géométrique qui converge pour $x \in [0,1[$ et nous avons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = (1-x) \times \frac{1}{1-x} = 1.$$

Ainsi la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n(1-x)$ converge simplement sur $[0,1]$ vers S telle que,

$$S(x) = \begin{cases} 1 & : Si\ \ x \in [0,1[\\ 0 & : Si\ \ x = 1. \end{cases}$$

b **La convergence uniforme.**
Comme les fonctions $f_n(x) = x^n(1-x)$ sont continues sur $[0,1]$ et $S(x)$ n'est pas continue sur $[0,1]$, alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n(1-x)$ ne converge pas uniformément vers $S(x)$ sur $[0,1]$.

c **La convergence absolue.**
La série $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n(1-x)$ est à termes positifs convergente sur $[0,1]$ donc elle est absolument convergente sur $[0,1]$.

4 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^n(1-x), \quad x \in [0,1]$.

a **La convergence simple.** Si $x = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(1) = 0$. Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-x)^n(1-x)$, et sa somme est nulle.

Si $x \in [0,1[$ la série $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ est une série géométrique qui converge pour $x \in [0,1[$ et nous avons

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-x)^n(1-x) = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty}(-x)^n = (1-x)\times\frac{1}{1+x} = \frac{1-x}{1+x}.$$

Ainsi la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ converge simplement sur $[0,1]$ vers S telle que,

$$S(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1+x} & : Si \;\; x \in [0,1[\\ 0 & : Si \;\; x = 1 \end{cases} = \frac{1-x}{1+x}.$$

b **La convergence absolue.** Nous avons, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $x \in \mathbb{N}$

$$|f_n(x)| = x^n(1-x) \geq 0$$

D'après ce qui est précède la série $\sum_{n\geq 0} x^n(1-x)$ est convergente sur $[0,1]$. Donc, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ converge absolument sur $[0,1]$.

c **La convergence uniforme.** Nous avons, pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout $x \in \mathbb{N}$

$$|S(x) - S_n(x)| = x^n \times \frac{1-x}{1+x} \leq x^n(1-x) = g_n(x).$$

Comme g_n dérivable sur $[0,1]$, et on

$$g_n'(x) = \Big((n+1) - (n+2)x\Big)x^n, \text{ et } g_n'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{n+1}{n+2}.$$

Donc, le tableau de variation est donné par,

x	0		$\frac{n+1}{n+2}$		1
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	↗	$g_n\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$	↘	0

Donc, d'après le tableau de variation, on obtient

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[0,1]} |S(x) - S_n(x)| &= \sup_{x\in[0,1]} g_n\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \leq \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1}\left(1 - \frac{n+1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{n+2}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{n+2} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Ainsi la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ convergence uniformément vers $S(x)$ sur $[0,1]$.

d **La convergence normale.** Étude convergence de la série $\sum \lim\limits_{n=1}^{+\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} f_n(x)$

Comme les fonctions $f_n(x)$ sont dérivables sur $[0,1]$, alors, on a

$$f_n'(x) = x^{n-1}(n-(n+1)x), \text{ et } f_n'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{n}{n+1}$$

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	↗	$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$	↘	0

Donc, on a

$$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

On sait que $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$. Donc, on a l'équivalence,

$$\sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f\left(\frac{n}{n+1}\right) = \underset{n\longrightarrow\infty}{\sim} \frac{1}{e(n+1)} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{en}.$$

La série $\frac{1}{e}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ est une série divergente donc la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^n(1-x)$ ne converge pas normalement vers $S(x)$ sur $[0,1]$.

Séries entières

Chapitre 3

Sommaire

3.1 Série d'exercices N 3 49
3.2 Correction de série N 3 53

1 Série d'exercices N 3

Exercice 1

Calculer le rayon de convergence des séries entières de termes généraux suivantes

1. $u_n(z) = \dfrac{n^2+1}{3^n} z^n$.
2. $u_n(z) = \dfrac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$.
3. $u_n(z) = \left((n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}}\right) z^n$.
4. $u_n(z) = \dfrac{n^n}{n!} z^{3n}$.
5. $u_n(z) = \dfrac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$.
6. $u_n(z) = e^{-n^2} z^n$.
7. $u_n(z) = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$.

Exercice 2

Déterminer R' le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{2n}$, sachant que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est vaut R.

Exercice 3

On considère les séries entières de termes généraux

1. a. $u_n(z) = z^n$.
   b. $u_n(z) = n z^n$.
   c. $u_n(z) = \dfrac{1}{n} z^n$, $z \in \mathbb{R}$.
   d. $u_n(z) = \dfrac{5n}{n+2} z^n$.
   e. $u_n(z) = \dfrac{n^2+n-1}{n!} z^n$.
   f. $u_n(z) = (-1)^n (4z+1)^n$.
   g. $u_n(z) = \dfrac{(z-1)^{2n}}{4^n}$, $z \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer le rayon et le domaine de convergence de chacune des séries entières et leurs convergences aux points de la frontière du domaine de convergence.
3. Calculer la somme de la série entière dans l'intervalle de convergence.

Exercice 4

Développer en séries entières au voisinage de 0 les fonctions suivantes puis en calculons le rayon de convergence.

1. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)(2+x)}$.
2. $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x-1}{1+x}\right)$.
3. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)$.
4. $f(x) = \dfrac{1}{6z^2-5z+1}$.
5. $f(x) = e^x \sin x$, et $g(x) = e^x \cos x$.

Exercice 5

1. Donner le rayon de convergence des séries entières et exprimer leurs sommes en termes de fonctions élémentaires
   - a $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n+2}{n+1}x^n,\ x \in \mathbb{R}$.
   - b $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n^3}{n!}x^n,\ x \in \mathbb{R}$.
2. Soit la série entière $\sum\limits_{n\geq 1}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)z^n$.
   - a Déterminer le rayon de convergence de cette série.
   - b Calculer la somme $\sum\limits_{n\geq 1}^{+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}\right)z^n$.

Exercice 6

Soit S la somme de la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. Démontrer que S est paire si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors, $a_{2k+1} = 0$.

Exercice 7

Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ telle que $f_n(x) = \dfrac{1}{(4n)!}x^{4n}$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
2. Développer la fonction $f(x) = \cos x + chx$ en série entière sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire la somme de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Exercice 8

Soit S la somme de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série.
2. Montrer que S est continue sur $[1,1]$.
3. Déterminer la fonction $S'(x)$ pour tout $x \in]1,1[$. En déduire $S(x)$.
4. Calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(2n+1)}.$$

Exercice 9

Soit l'équation differentielle

$$(E): \quad 3xy' + (2-5x)y = x \tag{3.1}$$

Déterminer la solution développable en série entière au voisinage de 0 de l'equation (3.1).

Exercice 10

On se propose de calculer la somme $S(x)$ de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n.$$

1. Déterminer l'intervalle ouvert de convergence de cette série.
2. On déduit le rayon de convergence des séries entières
   a. $\sum_{n\geq 0} x^n$ b. $\sum_{n\geq 0} nx^{n-1}$ c. $\sum_{n\geq 0} n(n-1)x^{n-2}$
3. En déduire $S(x)$.
4. Déduire la somme

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{2^n}.$$

Exercice 11

Développer en séries entières du réel x, les fonctions suivantes

1. $f_1(x) = (2+x)e^x$.
2. $f_2(x) = \ln(2+x)$.
3. $f_3(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$.

Exercice supplémentaire 1

Soit l'équation différentielle

$$(E): \quad x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0 \tag{3.2}$$

Déterminer la solution développable en série entière au voisinage de 0 de l'equation (3.2).

Exercice supplémentaire 2

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R

1. Quelle est le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$

2. On déduit le rayon de convergence des séries entières

   a. $\sum_{n\geq 0} \frac{\ln n}{n^2} x^{2n}$

   b. $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n}{3^n} x^{5n}$

   c. $\sum_{n\geq 0} ch(n) x^{3n}$

Exercice supplémentaire 3

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)} = 1 - 2\ln 2.$$

Indication: en utilisant la somme de série entière suivante $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$.

2 Correction de série N 3

Correction d'exercice 1

1 Soit $u_n(z) = \dfrac{n^2+1}{3^n} z^n$, $z \in \mathbb{C}$. Donc, $a_n = \dfrac{n^2+1}{3^n}$ et le rayon R est donné par

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+1}}{3^n} \times \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = 3.$$

2 Pour $u_n(z) = \dfrac{(3n)!}{(n!)^3} z^n$, $z \in \mathbb{C}$. On a, $a_n = \dfrac{(3n)!}{(n!)^3}$ et

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} \times \frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(3(n+1))!}{(3n)!}\right) \times \left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2} = 27. \end{aligned}$$

3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_n = (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(n+1)}{n+1}} - e^{\frac{\ln(n)}{n}}.$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$, donc, on obtient

$$\begin{aligned} a_n &= (n+1)^{\frac{1}{n+1}} - n^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln(n)}{n} \\ &= -\frac{\ln(n)}{n(n+1)} + \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n^2} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} \times \frac{(n+1)^2}{\ln(n+1)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \times \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1. \end{aligned}$$

4 Soit $u_n(z) = \dfrac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}$. Alors, si $|z| < 1$ la série est convergente et si $|z| > 1$ elle est divergente. Donc $R = 1$. Car,

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2} \times \frac{(n+1)^2}{\ln(n+1)} = 1.$$

5 Pour la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n^n}{n!} z^{3n}$, $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} \times \frac{n!}{n^n} |z|^3.$$

Donc, par suite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}=|z|^3\lim_{n\to+\infty}e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}=e|z|^3.$$

D'où, la série converge si $|z|^3<1$, c'est à dire $|z|<\sqrt[3]{\frac{1}{e}}$, et diverge si $|z|^3>1$. Donc, le rayon de convergence est donc $R=\sqrt[3]{\frac{1}{e}}$.

6 Pour $u_n(z)=e^{-n^2}z^n$, on a $a_n=e^{-n^2}$. D'après la règle de Cauchy nous avons

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=|z|^3\lim_{n\to+\infty}e^{-n}=0.$$

Donc, on trouvr $R=+\infty$.

7 Si $u_n(z)=\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n$, on a $a_n=\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Soit R le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq1}u_n(z)$, on distinger deux cas

a Pour $|z|<1$, on sait que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n|<|z|^n,$$

Comme la série $\sum_{n\geq1}|z|^n$ converge, alors la série $\sum_{n\geq1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n$ converge. Par conséquent le rayon de convergence $R=1$.

b Pour $|z|>1$, on sait que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)z^n|\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{n}}|z|^n=\frac{1}{\sqrt{n}}e^{n\ln|z|}\underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow}+\infty.$$

C'est à dire la série $\sum_{n\geq1}|z|^n$ divergente dans ce cas.

Correction d'exercice 2

D'après la règle de Cauchy on a

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n||z|^2}=|z|^{2n}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{|z|^2}{R}.$$

La série converge si $\frac{|z|^2}{R}<1$ et diverge si $\frac{|z|^2}{R}>1$, c'est à dire converge si $|z|<\sqrt{R}$ et diverge si $|z|>\sqrt{R}$. Donc le rayon de convergence est $R'=\sqrt{R}$.

Correction d'exercice 3

1 Rayon et le domaine de convergence et convergence aux points de la frontière

a Si $u_n(z) = z^n$, ici $a_n = 1$, donc, $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$. La série converge pour $|z| < 1$ et diverge sur la frontière (cercle de centre et de rayon 1) $|z| = 1$ car, $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ |z|=1}} |z|^n = 1 \neq 0$.

b $u_n(z) = nz^n$, $a_n = n$, donc, $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$. Par suite, la série converge pour $|z| < 1$ et diverge sur la frontière (cercle de centre et de rayon 1) $|z| = 1$ car, $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ |z|=1}} n|z|^n = +\infty \neq 0$.

c Pour la série de terme $u_n(z) = \dfrac{1}{n}z^n$, $a_n = \dfrac{1}{n}$, donc, $R = 1$. Alors, la série converge pour $|z| < 1$.

Pour $z = 1$, la série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ est diverge.

Si $z = -1$, la série alternée $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ est converge.

En résulte que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}z^n$ converge si $z \in [-1, 1[$.

d Soit $u_n(z) = \dfrac{5n}{n+2}z^n$, $a_n = \dfrac{5n}{n+2}$, donc, $R = 1$. Alors, la série converge pour $|z| < 1$, et diverge si $|z| = 1$ car, $\lim\limits_{\substack{n\to+\infty \\ |z|=1}} \dfrac{5n}{n+2}|z|^n = 5 \neq 0$.

e $u_n(z) = \dfrac{n^2+n-1}{n!}z^n$. Donc, $a_n = \dfrac{n^2+n-1}{n!}$, on trouve, donc,

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1} \times \frac{1}{n+1} = 0.$$

Par conséquent $R = +\infty$.

f $u_n(z) = (-1)^n(4z+1)^n$. On obtient, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|(4z+1)^n|} = |4z+1|.$$

La série converge pour $|4z+1| < 1$ et diverge pour $|4z+1| > 1$. C'est à dire, la série converge pour $|z+\dfrac{1}{4}| < \dfrac{1}{4}$ et diverge pour $|z+\dfrac{1}{4}| > \dfrac{1}{4}$. D'où Le domaine de convergence est le disque de centre $A\left(\dfrac{1}{4}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{4}$.

Pour la convergence sur la frontière $|z+\dfrac{1}{4}| = \dfrac{1}{4}$. On a

$$\lim_{\substack{n\to+\infty \\ |z+\frac{1}{4}|=\frac{1}{4}}} (-1)^n \neq 0.$$

Comme le terme général ne tend pas vers 0, alors, la série ne converge pas.

g $u_n(z) = \dfrac{(z-1)^{2n}}{4^n}$. La série converge pour

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|u_n(z)|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(z-1)^{2n}}{4^n}\right|} = \frac{|z-1|^2}{4} < 1,$$

et diverge pour $\dfrac{|z-1|^2}{4} > 1$, donc la série converge pour tout $z \in]-1,4[$ et diverge sinon.
Étude la convergence aux bords. Alors, si $z = -1$ le terme général est

$$u_n(-1) = \frac{(-2)^{2n}}{4^n} = 1,$$

qui ne tend pas vers 0, donc la série ne converge pas.
Pour $z = 4$ le terme général est

$$u_n(4) = \frac{(3)^{2n}}{4^n} = \left(\frac{9}{4}\right)^n,$$

qui diverge aussi, en tant que série géométrique et sa raison $q = \dfrac{9}{4} > 1$.

2 Calcul des sommes des séries entières dans l'intervalle de convergence.

a La somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$ sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1\}$ est $\sum\limits_{n\geq 0}^{+\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$.

b La somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} nz^n$ sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{R} : \ |z| < 1\}$.
Pour tout $|z| < 1$, on a,

$$\sum_{n\geq 0}^{+\infty} z^n = z\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = z\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\Big)' = z\Big(\frac{1}{1-z}\Big)' = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

c La somme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n} z^n$ sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{R} : \ |z| < 1\}$ est

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n=0}^{z} t^{n-1} dt \\
&= \int_{n=0}^{z} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} t^n\Big) dt = \int_{n=0}^{z} \frac{1}{1-z} dt \\
&= -\Big[\ln(1-t)\Big]_{n=0}^{z} = -\ln(1-z).
\end{aligned}$$

d Calcule la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{5n}{n+2} z^n$ sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{R} : \ |z| < 1\}$.
Nous avons pour tout $z \in]-1,1[$ et pour tout $n \geq 0$,

$$\frac{5n}{n+2} z^n = 5z^n - \frac{10}{n+2} z^n.$$

Par suite, on aura,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5n}{n+2}z^n &= 5\sum_{n=1}^{+\infty}z^n-\frac{10}{z^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+2}z^{n+2}=\frac{5z}{1-z}-\frac{10}{z^2}\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n}z^n\\ &= \frac{5z}{1-z}-\frac{10}{z^2}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}z^n-z-\frac{z^2}{2}\Big)=\frac{5z}{1-z}-\frac{10}{z^2}\Big(-\ln(1-z)-z-\frac{z^2}{2}\Big)\\ &= \frac{10\ln(1-z)}{z^2}-\frac{5(2-z)}{z(1-z)}.\end{aligned}$$

e Pour la série $\sum_{n\geq 1}\frac{n^2+n-1}{n!}z^n$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$.
Nous avons pour tout $z\in\mathbb{R}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+n-1}{n!}z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{n!}z^n-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n-1)!}z^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{}{(n-1)!}z^n-e^z\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{z^n}{(n-2)!}+z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+z\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}-e^z\\ &= z^2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{z^{n-2}}{(n-2)!}+z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^{n-1}}{(n-1)!}+z\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}-e^z\\ &= z^2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}+z\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}+z\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}-e^z=(z^2+2z-1)e^z.\end{aligned}$$

f Calcule la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(4z+1)^n$ sur l'ensemble $\Big\{z\in\mathbb{C}:\ \Big|z+\frac{1}{4}\Big|<\frac{1}{4}\Big\}$.
Pour $z\in\overset{\circ}{D}(A,\frac{1}{4})$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(4z+1)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}(-(4z+1))^n=\frac{1}{1+4z+1}=\frac{1}{2+4z}.$$

g Pour la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^{2n}}{4^n}$ où z dans l'ensemble $]-1,4[$, la somme est donné par,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-1)^{2n}}{4^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(z-1)^2}{4}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{(z-1)^2}{4}}=\frac{4}{(3-z)(z+1)}.$$

Correction d'exercice 4

1 Soit $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)(2+x)}$. Pour $|x|<1,\ |x|<2$, et voisin de 0 on trouve,

$$\begin{aligned} f(x)=\frac{1}{(1-x)(2+x)} &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{1-x}+\frac{1}{3}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-x}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{1+\frac{x}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{3}+\frac{(-1)^n}{6\times 2^n}\Big)x^n. \end{aligned}$$

D'où, pour tout $x\in]-1,1[$, nous avons $f()=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{1}{3}+\frac{(-1)^n}{6\times 2^n}\Big)x^n$.

2 Maintenant si $f(x)=\ln\Big(\dfrac{x-1}{x+2}\Big)$. Pour $|x|<1$, et voisin de 0 on aura,

$$\begin{aligned} f(x)=\ln\Big(\frac{x-1}{x+2}\Big) &= \ln(x-1)-\ln(2+x)=\ln(x-1)-\ln 2-\ln(1+\frac{x}{2}) \\ &= -\ln 2+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n2^n}. \end{aligned}$$

3 $f(x)=\arctan\Big(\dfrac{x-1}{1+x}\Big)$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x\neq -1$, on a $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, et comme x au voisinage de 0, on obtient,

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt=\int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}\Big)dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\int_0^x(-1)^n t^{2n}dt\Big)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+c. \end{aligned}$$

Comme, $f(0)=c=\arctan(-1)=-\dfrac{\pi}{4}$. Donc, le développement en série entière de f est donné par,

$$f(x)=-\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

4 Si $f(x)=\dfrac{1}{6z^2-5z+1}$. Alors, pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a

$$f(x)=\frac{1}{6z^2-5z+1}=\frac{1}{(3z-1)(2z-1)}=\frac{3}{1-3z}-\frac{2}{1-2z}.$$

Donc, pour $|z|<\dfrac{1}{3}$, on a $\dfrac{1}{1-3z}=\sum_{n=0}^{+\infty}3^n z^n$.

Pour $|z|<\dfrac{1}{2}$, on a $\dfrac{1}{1-2z}=\sum_{n=0}^{+\infty}2^n z^n$.

Par suite le rayon de convergence du développement en série entière de f est $R = \inf\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{3}$. (somme de deux séries de rayons de convergence différents).
Donc, pour $|z| < \frac{1}{3}$, on trouve le développement de f

$$f(x) = 3 \times \frac{1}{1-3z} - 2 \times \frac{1}{1-2z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(3^{n+1} - 2^{n+1}\right) z^n.$$

5 $f(x) = e^x \sin x$, et $g(x) = e^x \cos x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) + ig(x) = e^x(\cos x + i \sin x) = e^{(i+1)x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i+1)^n}{n!} x^n.$$

D'après, la formule de Moiver, on a

$$(i+1)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4})\right)^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

D'où, le développement de $f + ig$,

$$f(x) + ig(x) = e^{(i+1)x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i+1)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \frac{x^n}{n!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) \frac{x^n}{n!}.$$

C'est à dire,

$$\begin{cases} f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \frac{x^n}{n!} \\ g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{2})^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) \frac{x^n}{n!} \end{cases}$$

Correction d'exercice 5

On calcule le rayon de convergence des séries entières,

1 **a** Pour la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n$, $x \in \mathbb{R}$. On a $a_n = \frac{n+2}{n+1}$, donc, d'après le critère de d'Almbert, le rayon est,

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{n+2}{n+1} \times \frac{n+2}{n+3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1.$$

Pour tout $x \in]-1,1[$, et comme pour tout $n \geq 0$: $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}.$$

b Soit la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$, $x \in \mathbb{R}$. On a $a_n = \frac{n^3}{n!}$, donc, d'après le critère de d'Almbert, le rayon

est,

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^3} \times \frac{n^3}{n!} = \lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty.$$

On sait que, pour tout $n \geq 0$

$$\frac{n^3}{n!} = \frac{1}{(n-3)!} + \frac{3}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}.$$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}x^n &= \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!}x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{(n-2)!}x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^{n+3} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}x^{n+1} = (x^3+3x^2+x)e^x.\end{aligned}$$

2 Soit la série entière $\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) z^n$.

a On déterminent le rayon de convergence de cette série.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leq +\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} \leq n$, et Comme les rayons de convergence des séries $\sum_{n\geq 1} z^n$ et $\sum_{n\geq 1} nz^n$ sont égaux à 1 alors le rayon de convergence est de la série $\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) z^n$ est $R = 1$.

b On calcule la somme $\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) z^n$.

On remarque pour tout $n \geq 1$ que

$$\sum_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) z^n = \sum_{n\geq 1} a_n z^n \sum_{n\geq 1} b_n z^n = \sum_{n\geq 1} c_n z^n,$$

où $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 1$ et $c_n = \sum_{n=1}^{n} a_k b_{n-k} z^n$. Alors, on obtient la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n \sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \sum_{n\geq 1} c_n z^n = \ln(1-z) \times \frac{z}{1-z}.$$

Correction d'exercice 6

Supposons d'abord que $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, S est paire comme somme d'une série de fonctions paires. Réciproquement, supposons que S est paire, et posons $T(x) = S(-x)$.
Alors, pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$T(x) = \sum_{n=0} (-1)^n a_n x^n.$$

De plus, puisque S est paire, T et S coïncident sur $]-R, R[$. Donc pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $(-1)^n a_n = a_n$, ainsi $a_n = 0$ si n est impaire.

Correction d'exercice 7

Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ telle que $f_n(x) = \dfrac{1}{(4n)!}x^{4n}$

1 Au début, on déterminent le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{(4n)!}x^n$.

Posons donc, $\dfrac{1}{(4n)!}$, alors, on a

$$R = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(4(n+1))!}{(4n)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)(4n)!}{(4n)!} = +\infty.$$

D'où le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{(4n)!}x^n$ est $R = +\infty$.

Ainsi d'après un résultat précédent, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{(4n)!}x^{4n}$ est $\sqrt[4]{R} = +\infty$.

2 On a le développement pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} \quad \text{et} \quad chx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n}.$$

Alors, le développement de la fonction f est,

$$f(x) = \cos x + chx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 1}{(2n)!}x^{2n}$$

3 Selon le valeur de nembre n (pair ou impair), on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 1}{(2n)!}x^{2n} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k} + 1}{(4k)!}x^{4k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1} + 1}{(2(2k+1))!}x^{4k+1} \\ &= 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(4k)!}x^{4k}. \end{aligned}$$

D'où le résultat,

$$\frac{1}{2}\frac{\cos x + chx}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k} + 1}{(4k)!}x^{4k} = \sum_{n\geq 0} f_n(x).$$

Correction d'exercice 8

Soit S la somme de série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$.

1 Posons, $f_n(x) = \dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$, alors, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{|x|^{2n+4}}{(n+2)(2n+3)}\times\frac{(n+1)(2n+1)}{|x|^{2n+2}} = |x|^2.$$

2 **a** Si $|x|^2 < 1$ c'est à dire $|x| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge absolument,

b Si $|x|^2 > 1$ c'est à dire $|x| > 1$, elle diverge.

c Pour $|x| = 1$ la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+1)(2n+1)} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$, converge, car $\sum_{n=0}\dfrac{1}{n^2}$ est une série de Reimann converge pour $\alpha = 2 > 1$.

On en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ est $R = 1$. Donc, $D = [-1,1]$. Alors, pour tout $x \in D$, on a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}.$$

3 Étude la continuité de S.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $f_n(x) = \dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ sont continues sur le domaine $[-1,1]$.

Alors, La série $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ est normalement (donc uniformément) convergente sur $[1,1]$, car

$$\sup_{x\in[-1,1]}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \underset{n\longrightarrow+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

Donc, d'après le théorème de continuité S est continue sur $[1,1]$.

4 Pour tout $x \in]1,1[$, on a

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+2)x^{2n+1}}{(n+1)(2n+1)} = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = 2\arctan(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Donc en intégrant par parties, on obtient,

$$S(x) = \int \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)dx = x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2) + c.$$

Ainssi que $S(0) = 0$, donc, $c = 0$. D'où,

$$S(x) = x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \ln(1-x^2).$$

Correction d'exercice 9

Soit l'équation differentielle (E) : $\quad 3xy' + (2-5x)y = x$.

Posons, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors, on a $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$. Donc, l'équation (3.1) est équivalente à

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} 5a_n x^{n+1} &= x \\
\sum_{n=0}^{+\infty} 3n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 5a_{n-1} x^n &= x \\
2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (3na_n + 2na_n - 5a_n) x^n &= \\
5a_1 - 3a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (3na_n + 2na_n - 5a_n) x^n &= x
\end{aligned}$$

Donc, $a_0 = 0$, $a_1 = \dfrac{1}{5}$ et $a_n = \dfrac{5}{3n+2} a_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_n = \frac{5^{n-2}}{\prod_{nk=2}^{k=n} (3k+2)} \text{ et } f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(5^{n-2} / \prod_{nk=2}^{k=n} (3k+2) \right) x^n.$$

Correction d'exercice 10

On se propose de calculer la somme $S(x)$ de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$.

1 Pour $x \neq 0$, posons $f_n(x) = n^2 x^n$, alors, pour tout $n > 1$, on trouve,

$$\left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \left| \frac{(n+1)^2 x^{n+1}}{n^2 x^n} \right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 |x| \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} |x|.$$

Si $|x| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ converge absolument, et si $|x| > 1$ elle diverge grossièrement.

On en déduit que le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ est $R = 1$.

Donc, le domaine de convergence $D =]-1, 1[$, car pour $|x| = 1$, le terme général de la série ne tend pas vers 0.

2 Par le théorème de dérivation des séries, les trois séries entières

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

Ont le même rayon de convergence $R = 1$.

En plus on connait la somme de la série géométrique

$$\forall x \in]-1,1[: \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Par le théorème de dérivation, on trouve les sommes des deux autres séries (qui sont les dérivées première et seconde).

$$\forall x \in]-1,1[: \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \text{ et } \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

On déduit immédiatement les relations

$$\forall x \in]-1,1[: \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n} = \frac{x}{(1-x)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n} = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

3 Pour tout $x \in]-1,1[$ et pour tout natural $n \geq 0$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(n(n-1)+n\Big)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n.$$

Donc, d'après question au dessous, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

D'où, le résultat,

$$S(x) = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

4 On remarque que $S\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$. En on déduit,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 6.$$

Correction d'exercice 11

Développer en séries entières du réel x, les fonctions suivantes

1 Soit la fonction $f_1(x) = (2+x)e^x$. Alors, comme f_1 est développable en série entière au voisinage de 0, car elle est de classe C^∞ donc son développement en série entière au voisinage 0 correspond à son développement de Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

Il faut donc commencer par calculer $f_1^{(n)}$ pour tout n. Ensuite, on étudiera sur quel intervalle f_1 est égale à son développement de Taylor. Donc, on a

$$f_1'(x) = (2+x)e^x + e^x = f_1(x) + e^x, \text{et } f_1''(x) = f_1(x) + 2e^x.$$

Par récurrence on obtient pour tout $n \geq 0$,

$$f_1^{(n)}(x) = f_1(x) + ne^x.$$

Ainssi $f_1^{(n)}(0) = f_1(0) + ne^0 = 2 + n$. Donc le développement de Taylor de f_1 est

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n!} x^n.$$

La règle de D'Alembert nous indique que le rayon de convergence de cette série est $R = +\infty$ Il reste à trouver sur quel intervalle de $\mathbb{R}$, f_1 est égale à son développement en série entière au voisinage de 0. Pour cela, on peut utiliser la formule de Taylor-Cauchy. On a

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} x^n + \frac{f_1^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \text{ où c comprise entre, 0 et x.}$$

Posons,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{n} \frac{n+2}{n!} x^n.$$

On se rend compte que

$$\left| s(x) - f_1(x) \right| = \left| \frac{2+c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \text{ où c comprise entre, 0 et x}$$

Suivant le signe de x, on a

$$\left| \frac{2+c}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \left| \frac{2+|x|}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+2}{n!} x^n.$$

2 Soit la fonction $f_2(x) = \ln(2+x)$.
Alors, on sait que

$$\forall x \in]-1,1[: \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} x^n.$$

Donc, pour tout $|x| < 2$, on a

$$\ln(2+x) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^n n!} x^n.$$

3 Pour la fonction $f_3(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)}$. On a pour tout $x \neq 1$ et $x \neq 2$,

$$f_3(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = x\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}\right).$$

Comme la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ ademet un développement en série entière pour tout $|x| < 1$ et

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Ainssi que, d'après ce qui est précède, pour tout $|x| < 2$, on a

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}.$$

En fin, pour tout $x \in]-1,1[\cap]-2,2[=]-1,1[$, on a le développement,

$$\begin{aligned} f_3(x) &= x\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}\right) = x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)x^n. \end{aligned}$$

Correction d'exercice supplémentaire 1

Posons $y = f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ le développement en série entière d'une fonction f solution de l'équation (3.2), on a donc,

$$y' = \sum_{n\geq 1} a_n n x^{n-1}, \text{ et } y'' = \sum_{n\geq 2} a_n n(n-1)x^{n-2}.$$

Substituons y' et y'' dans l'équation (3.2), on obtient

$$\begin{aligned} x^2(1-x)\sum_{n\geq 2} a_n n(n-1)x^{n-2} - x(1-x)\sum_{n\geq 1} a_n n x^{n-1} + \sum_{n\geq 0} a_n x^n &= 0 \\ 2a_2x^2 + \sum_{n\geq 3}(n-1)[na_n - (n-2)a_{n-1}]x^n - a_1x - \sum_{n\geq 2}[na_n + (n+1)a_{n-1}]x^n + \sum_{n\geq 0} a_n x^n &= 0 \\ a_0 + (a_2 - a_1)x^2 + \sum_{n\geq 3}(n-1)^2[a_n - a_{n-1}]x^n &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve,

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 - a_1 = 0 \\ (n-1)^2[a_n - a_{n-1}] = 0 \quad \forall n \geq 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_2 = a_1 \\ (a_n = a_{n-1} \quad \forall n \geq 3. \end{cases}$$

D'autre part, en faisant x nul dans l'expression de f, on a $f(0) = a_0 = 0$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. Par conséquent, toute solution de (3.2), développable en série entière, donc,

la solution f est

$$f(x)=\sum_{n\geq 1}x^n=-1+\sum_{n\geq 0}x^n=-1+\frac{1}{1-x}=\frac{x}{1-x}.$$

Correction d'exercice supplémentaire 2

Supposons que la série entière $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ a un rayon de convergence vaut R.

Alors, pour tout $|x|<R$ la série est converge, et elle diverge si $|x|>R$.

1 D'après l'hypothèse, la série $\sum_{n\geq 0}a_nx^{2n}$ coverge si et seulement si $|x^2|<R$, i.e, $|x|<\sqrt{R}$.

Donc, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0}a_nx^{2n}$ est $\sqrt{R}$.

2 **a** On sait que la rayon de covergence de la série $\sum_{n\geq 0}\frac{\ln n}{n^2}x^n$ est $R=1$, alors d'après le résultat précédent, le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0}\frac{\ln n}{n^2}x^{2n}$ est vaut $\sqrt{R}=1$.

b Par le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de série $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+n}{3^n}x^n$ est $R=3$. En on déduit le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+n}{3^n}x^{5n}$ est $\sqrt[5]{R}=\sqrt[5]{3}$.

c On peut calculer le rayon de la série $\sum_{n\geq 0}ch(n)x^n$, on trouve donc, $R=\frac{1}{e}$. Par suite, le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0}ch(n)x^{3n}$ est vaut $\sqrt[3]{R}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$.

Correction d'exercice supplémentaire 3

On a pour tout $|x|<1$, $\sum_{n=1}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$. Donc, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x\frac{dt}{t}=-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)} &= -\int_0^x\ln(1-t)dt=\Big[(1-t)\ln(1-t)-t\Big]_0^x\\ &= x-(1-x)\ln(1-x).\end{aligned}$$

Si $x=-1$, on aura, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}=-1+2\ln 2$, donc, en on déduit que,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}=1-2\ln 2.$$

Séries de Fourier

Chapitre 4

Sommaire

4.1 Série d'exercices N 4 69
4.2 Correction de série N 4 72

1 Série d'exercices N 4

Exercice 1

Soit f la fonction $2\pi-$ périodique définie pour sur l'intervalle $[-\pi,\pi[$, par

$$f(x)=\begin{cases}0 & : si\ x\in[-\pi,0[,\\ x & si\ x\in[0,\pi[.\end{cases}$$

1. Déterminer les coefficients de Fourier a_n et b_n associé à f et donner la série de Fourier associée à f.
2. En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\ \text{et}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Exercice 2

Soit f la fonction $2\pi-$ périodique définie pour sur l'intervalle $[-\pi,\pi[$, par $f(x)=x$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier a_n et b_n associé à f et donner la série de Fourier associée à f.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$, déterminer $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.
3. En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\ \text{et}\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Exercice 3

Soit f la fonction $2\pi-$ périodique définie pour sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$, par $f(x)=|x|$.

1. Déterminer les coefficients de Fourier a_n et b_n associé à f et donner la série de Fourier associée à f.
2. Soit $n\in\mathbb{N}$, déterminer $\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.
3. En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^4}\ \text{et}\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^4}.$$

Exercice 4

Soit f une fonction périodique de période 2, définie sur l'intervalle $]-1,1]$, par $f(x)=x-x^3$

1. Déterminer les coefficients de Fourier a_n et b_n associé à f et donner la série de Fourier associée à f.
2. En déduire la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 5

Soit f la fonction $2\pi-$ périodique définie pour sur l'intervalle $[0,\pi]$, par

$$f(x)=\begin{cases}1 & : si\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ \frac{(\pi-x)}{2} & si\ x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right].\end{cases}$$

1. Donner la série de Fourier associée à f.
2. En déduire la somme $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.
3. En déduire la série de Fourier de la fonction paire, $2\pi-$ périodique g définie sur $[0,\pi]$, par

$$g(x)=\begin{cases}1-\frac{2x}{\pi} & : si\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],\\ 0 & si\ x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right].\end{cases}$$

Exercice 6

Soit f la fonction $2\pi-$ périodique, impaire définie pour sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x)=\begin{cases}1 & : si\ x\in\left]0,\pi\right],\\ 0 & si\ x=\pi.\end{cases}$$

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
2. Étudier la convergence (simple, uniforme) de la série de Fourier de f.
3. En déduire les valeurs des sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\ \text{et}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

Exercice 7

Soit f une fonction $2\pi-$ périodiques définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x) = (x-\pi)^2, \quad x \in [0, 2\pi[$$

1. Calculer les coefficients de Fourier trigonométriques de f.
2. Étudier la convergence de la série de Fourier de f.
3. En déduire les sommes des séries

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 8

1. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction $2\pi-$périodique continûment différentiable, et soit λ un réel non nul. On considère l'équation différentielle,

$$y'(x) + \lambda y(x) = f(x) \tag{4.1}$$

2. Trouver une solution $2\pi-$périodique de cette équation en écrivant $y(x)$ et $f(x)$ sous la forme de séries de Fourier trigonométrique.
3. Appliquer ce résultat au cas où $\lambda = 1$ et

$$f(x) = \begin{cases} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 & : si \ \ x \in [0, \pi[\\ -\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2} & : si \ \ x \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

Exercice supplémontaire 1

Soient f et g deux fonctions $2\pi-$ périodiques définie sur l'intervalle $]-\pi, \pi]$, par $f(x) = e^{ax}$ et $g(x) = chax$, où $a \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$.

1. Donner la série de Fourier associée à f et g.
2. En déduire les sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}, \ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^2}{(n^2+a^2)^2}.$$

2 Correction de série N 4

Correction d'exercice 1

1 La fonction f n'est ni paire, ni impaire, alors les coefficients de Fourier sont

a

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{\pi}{4}.$$

b Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{n}x\sin(nx)\Big]_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx = -\frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{n^2\pi}\Big[\cos(nx)\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{n^2\pi}\Big[(-1)^n - 1\Big]. \end{aligned}$$

Donc,

$$a_{2k} = 0, \text{ si } k \neq 0, \text{ et } a_{2k+1} = -\frac{2}{(2k+1)^2\pi}.$$

c

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{1}{n}x\cos(nx)\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(nx)dx = -\frac{1}{n\pi}\Big[x\cos(nx)\Big]_0^{\pi} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

D'où la série de Fourier associée à f est,

$$F(f)(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\right).$$

2 La fonction f étant de classe C^1 par morceaux et $2\pi-$périodique, alors d'aprés le Théorème de Dirichlet, on a en particulier en tout point x où f est continue

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\right).$$

La fonction f est continue en 0, alors

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{8}.$$

Comme,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \end{aligned}$$

Donc, on trouve,

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{8}.$$

D'où le résultat,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} == \frac{\pi}{8}.$$

Correction d'exercice 2

1 La fonction f est impaire, alors les coefficients de Fourier sont

a

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|dx = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} xdx = \frac{\pi}{2}.$$

b Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et comme la fonction $x \mapsto x\cos(nx)$ est impaire, alors, on a

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)dx = 0.$$

c

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{1}{n}x\cos(nx)\Big]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_{0}^{\pi} \cos(nx)dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

D'où la série de Fourier associée à f est,

$$F(f)(x) = 2\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & : si \;\; n = 2k, \;\; (K \in \mathbb{N}) \\ (-1)^k & si \;\; n = 2k+1. \end{cases}$$

3 La fonction f est de classe C^1 par morceaux et continue sur $[-\pi, \pi[$, donc d'après le Théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $[-\pi, \pi[$, d'où pour tout $x \in [-\pi, \pi[$, on a

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

Dans le cas particulier si $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

D'après question 2, on a

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}(-1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Par suite, on aura

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

En utilisant l'égalité de Parceval suivante,

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[|a_n|^2 + |b_n|^2\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(x)|^2dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2dx.$$

Alors, on obtient,

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx.$$

Donc, en on résulte que,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}.$$

Correction d'exercice 3

1 La fonction f est paire, alors les coefficients de Fourier sont

a Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} |x|\sin(nx)dx = 0.$$

b

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xdx = \frac{\pi}{2}.$$

c Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et comme la fonction $x \mapsto |c|\cos(nx)$ est paire, et par intégration par parties, on trouve,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}x\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx = \frac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi}. \end{aligned}$$

Ainssi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_n = \begin{cases} 0 & : si \;\; n = 2k, \;\; (K \in \mathbb{N}) \\ -\dfrac{4}{(2k+1)^2\pi} & si \;\; n = 2k+1. \end{cases}$$

Par suite la série de Fourier associée à f est,

$$F(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2n+1}\cos\big((2n+1)x\big).$$

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & : si \;\; n = 2k, \;\; (K \in \mathbb{N}) \\ (-1)^k & si \;\; n = 2k+1. \end{cases}$$

3 La fonction f est de classe C^1 par morceaux et continue sur $[-\pi,\pi[$, donc d'après le Théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $[-\pi,\pi[$, d'où pour tout $x \in [-\pi,\pi[$, on a

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

Dans le cas particulier si $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

D'après question 2, on a

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}(-1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Par suite, on aura

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

En utilisant l'égalité de Parceval suivante,

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[|a_n|^2 + |b_n|^2\right] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Alors, on obtient,

$$\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx.$$

Donc, en on résulte que,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}.$$

Correction d'exercice 4

1 La fonction f est impaire, alors les coefficients de Fourier sont

a Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et comme la fonction $x \mapsto x - x^3$ est impaire, alors, on a

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos(n\pi x)dx = \int_{-1}^{1} (x - x^3)\cos(n\pi x)dx = 0.$$

b

$$\begin{aligned} b_n &= \int_{-1}^{1} f(x)\sin(n\pi x)dx = 2\int_{0}^{1}(x-x^3)\sin(n\pi x)dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\Big[(x-x^3)\cos(n\pi x)\Big]_0^1 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 (3x^2-1)\cos(n\pi x)dx \\ &= \frac{12}{n^2\pi^2}\int_0^1 x\sin(n\pi x)dx + \frac{12}{n^2\pi^2}\left[-\frac{x\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^1 + \frac{12}{n^2\pi^3}\int_0^1 \cos(n\pi x)dx \\ &= \frac{(-1)^{n+1}12}{n^3\pi^3}. \end{aligned}$$

D'où la série de Fourier associée à f est,

$$F(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}12}{n^3\pi^3}\sin(n\pi x).$$

2 La fonction f est de classe C^1 par morceaux et continue sur $[-1,1[$, donc d'après le Théorème de Dirichlet, la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $[-1,1[$, d'où pour tout $x \in [-1,1[$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}12}{n^3\pi^3}\sin(n\pi x).$$

Dans le cas particulier si $x = \frac{1}{2}$, on obtient,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

D'après ce qui est précède, on a

$$\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & : si \;\; n = 2k, \;\; (K \in \mathbb{N}) \\ (-1)^k & si \;\; n = 2k+1. \end{cases}$$

D'où,

$$\frac{3}{8} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}(-1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\pi^3(2k+1)^3}.$$

Par suite, on aura

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Correction d'exercice 5

1 En efiet, pour $n \neq 0$, on les coefficients de la sérier de Fourier sont

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)e^{-inx}dx + \frac{1}{2i}\int_{0}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(-x)e^{inx}dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \ \text{(car f est paire)} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos nxdx + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2(\pi-x)}{\pi}\cos nxdx \\
&= \left[\frac{\sin(nx)}{n\pi}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{2(\pi-x)\sin(nx)}{n\pi^2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{2}{n\pi^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{2(\pi-x)}{\pi}\sin nxdx \\
&= -\left[\frac{2\cos(nx)}{n^2\pi^2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{2\Big(\cos(\frac{n\pi}{2} - \cos(n\pi))\Big)}{n^2\pi^2}.
\end{aligned}$$

D'autre part, un calcul immédiat montre que $c_0 = \frac{3}{4}$.
On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $c_n = c_{-n}$, alors, on trouve,

$$F(f)(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2c_n \cos(nx).$$

C'est à dire,

$$F(f)(x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(4n+2)x}{(2n+1)^2}.$$

2 Notons que la série de Fourier de f est normalement convergente, la continuité de f montre alors que pour tout $x \in]-\pi, \pi]$,

$$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(4n+2)x}{(2n+1)^2}.$$

Dans le cas particulier en prenant $x = 0$, nous obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{8}.$$

3 Remarquons d'autre part que $g(x) = 1 - f(x-\pi)$ pour tout $x \in]-\pi, \pi]$. Alors,

$$\forall x \in]-\pi, \pi] : \ g(x) =$$

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 1-\left(\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)(\pi-x)}{(2n+1)^2}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(4n+2)(\pi-x)}{(2n+1)^2}\right)\\
&= \frac{1}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}-\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos(4n+2)x}{(2n+1)^2}.
\end{aligned}
$$

Correction d'exercice 6

1 La fonction f étant impaire, donc, $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx = \Big[-\frac{\cos(nx)}{n}\Big]_0^{\pi} = \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\\
&= \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & : si \;\; n \text{ est impair} \\ 0 & : si \;\; n \text{ est pair} \end{cases}
\end{aligned}
$$

La série de Fourier trigonométrique de f est donc donnée par

$$
F(f)(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4}{(2n+1)\pi}\sin(2k+1)x.
$$

2 La fonction f satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet, et la série $F(f)$ converge en tout x vers,

$$
\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = f(x).
$$

La convergence ne peut être uniforme car la limite f n'est pas continue.

3 Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$, on a

$$
\sin(2k+1)\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right) = (-1)^k,
$$

On en déduit

$$
\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{4(-1)^k}{(2n+1)\pi} = f\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 1 \Rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2n+1)} = \frac{\pi}{4}.
$$

Puisque f est impaire, l'égalité de Parseval donne,

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big|f(x)\big|^2dx = \frac{1}{2}\sum_{K=0}^{+\infty}\big|b_k\big|^2 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{8}.
$$

Ensuite, on a

$$
\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.
$$

Donc, on trouve,

$$
\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\times\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{6}.
$$

Finalement, d'après (c), nous avons,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi}{8},\ \text{et}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}.$$

Correction d'exercice 7

1 On remarque que f est paire, de sorte que $b_n=0$ pour tout n. Par ailleurs,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2dx=\frac{2\pi^2}{3}.$$

Pour tout $n\geq 1$, et intégrations par parties, on a

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\cos(nx)dx\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2\cos(nt+n\pi)dt=\frac{(-1)^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^2\cos(nt)dt\\ &= \frac{(-1)^n}{\pi}\times\frac{4}{n^2}(-1)^n=\frac{4}{n^2}.\end{aligned}$$

D'où la série de Fourier de f s'écrit donc,

$$F(f)(x)=\frac{\pi}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos(nx).$$

2 La fonction f est de classe $C^1(\mathbb{R})$. Le théorème de Dirichlet permet donc de conclure que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, nous avons

$$F(f)(x)=f(x)=\frac{\pi}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos(nx).$$

3 D'après la question précédente,

$$\pi^2=f(0)=\frac{\pi}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\ \text{ et }\ 0=f(\pi)=\frac{\pi}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

On en déduit que,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\ \text{et}\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Correction d'exercice 8

1 Posons,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)),\ \text{et}\ y(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n\cos(nx)+\beta_n\sin(nx)),$$

et, en dérivant terme à terme,

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(n\beta_n\cos(nx)-n\alpha_n\sin(nx)).$$

Nous avons, donc,

$$y'(x)+\lambda y(x)=\frac{\lambda\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\Big([n\beta_n+\lambda\alpha_n]\cos(nx)+[\lambda\beta_n-n\alpha_n]\sin(nx)\Big).$$

En identifiant les coefficients, on obtient

$$\begin{cases} a_0=\lambda\alpha_0,\\ a_n=[n\beta_n+\lambda\alpha_n],\\ b_n=[\lambda\beta_n-n\alpha_n], \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \alpha_0=\dfrac{a_0}{\lambda},\\ \alpha_n=\dfrac{\lambda a_n-nb_n}{n^2+\lambda^2},\\ \beta_n=\dfrac{na_n+\lambda b_n}{n^2+\lambda^2}. \end{cases}$$

2 La fonction f proposée est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons ses coefficients de Fourier. On a

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})^2dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\left[(x-\frac{\pi}{2})^2+\frac{\pi^2}{2}\right]dx=\frac{\pi^2}{2}.$$

Par ailleurs, on remarque que la fonction $f-\dfrac{a_0}{2}$ est impaire, de sorte que $a_n=0$ pour $n\geq 1$. Enfin,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})^2\cos(nx)dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\left[(x-\frac{\pi}{2})^2+\frac{\pi^2}{2}\right]\sin(nx)dx\\ &= \frac{1-(-1)^n}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})^2\cos(nx)dx+\frac{\pi}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\sin(nx)dx\\ &= \frac{1-(-1)^n}{\pi}I_1+\frac{\pi}{2}I_2. \end{aligned}$$

Par intégration par parties deux fois, on calule l'integrale I_1, on trouve, donc,

$$I_1=\int_0^{\pi}(x-\frac{\pi}{2})^2\cos(nx)dx=(1-(-1)^n)\Big[\frac{\pi^2}{4n}-\frac{2}{n^3}\Big].$$

Ainssi

$$I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \sin(nx)dx = \frac{(-1)^n - 1}{n}.$$

D'où

$$b_n = \frac{4((-1)^n - 1)}{\pi n^3}.$$

On obtient $a_0 = \frac{\pi^2}{2}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_{2k} = \beta_{2k} = 0$,

$$a_{2k-1} = \frac{8}{\pi(2k-1)^2[(2k-1)^2+1]},$$

$$\text{et } \beta_{2k-1} = \frac{-8}{\pi(2k-1)^3[(2k-1)^2+1]}.$$

Finalement, il est facile de voir que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n\beta_n \cos(nx) - n a_n \sin(nx)).$$

est uniformément convergente, et que par conséquent la série,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)),$$

qui est aussi uniformément convergente, a pour somme une fonction $y(x)$ continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, qui est solution de l'équation différentielle (4.1) donnée.

Remarque

Soient f et g deux fonctions $2\pi-$ périodiques définies sur $\mathbb{R}$. Alors, le produit de convolution de f et g est donné par

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ (f * g)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f).c_n(g)e^{-inx}.$$

Correction d'exercice supplémentaire 1

1 **a** Nous supposons que $a \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$, et nous écrivons f_a pour désigner la fonction $2\pi-$périodique qui vérifie $f_a(x) = e^{ax}$ sur $]-\pi, \pi]$. Remarquons que

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(a-in)x}dx \\ &= \left[\frac{e^{(a-in)x}}{2\pi(a-in)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n}{a-in} \times \frac{sh(a\pi)}{\pi} \\ &= \frac{(-1)^n(a+in)}{a^2+n^2} \times \frac{sh(a\pi)}{\pi}. \end{aligned}$$

Alors, la série de Fourier de f_a est

$$F(f_a)(x) = \frac{sh(a\pi)}{a\pi} + 2\frac{sh(a\pi)}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n a}{n^2+a^2}\cos(nx) - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n a}{n^2+a^2}\sin(nx)\right).$$

D'après le théorème de Dirichlet, la série $F(f_a)$ converge pour tout x et en particulier nous avons,

$$\forall x \in]-\pi,\pi[:\ e^{ax} = \frac{sh(a\pi)}{a\pi} + 2\frac{sh(a\pi)}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n a}{n^2+a^2}\cos(nx) - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n a}{n^2+a^2}\sin(nx)\right).$$

b D'autre part, la fonction $2\pi-$périodique g_a qui coïncide avec $x \mapsto chax$ sur $]-\pi,\pi]$ vérifie, $g_a(x) = \dfrac{f_a(x^+)+f_a(x^-)}{2}$. Alors, on a

$$c_n = \frac{(-1)^n a}{a^2+n^2} \times \frac{sh(a\pi)}{\pi},$$

et la série de Fourier de g_a est

$$F(g_a)(x) = \frac{sh(a\pi)}{a\pi} + \frac{sh(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2a}{n^2+a^2}\cos(nx).$$

La série de Fourier de g_a est normalement convergente et g_a est continue sur $\mathbb{R}$, alors,

$$\forall x \in [-\pi,\pi]:\ g_a(x) = ch(ax) = \frac{sh(a\pi)}{a\pi}\left(1 - \frac{sh(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2a}{n^2+a^2}\cos(nx)\right).$$

Dans le cas particulier, on obtient pour tout $x \in [-\pi,\pi]$,

$$\begin{aligned} ch(ax) &= \frac{sh(a\pi)}{a\pi} + \frac{sh(a\pi)}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2a}{n^2+a^2}\cos(nx) \\ &= \frac{sh(a\pi)}{a\pi} - 2\frac{sh(a\pi)}{a\pi} + \frac{sh(a\pi)}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2a}{n^2+a^2}\cos(nx) \\ &= \frac{sh(a\pi)}{a\pi}\left(-1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n 2a^2}{n^2+a^2}\cos(nx)\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

2 En remplaçant x par 0 dans l'équation (4.2) nous obtenons,

$$\frac{\pi}{2sh(a\pi)} + \frac{1}{2a} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n a}{n^2+a^2}.$$

En particulier si $a = 1$, nous avons

$$\frac{\pi}{2sh(\pi)} + \frac{1}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}.$$

D'autre par en remplaçant x par π dans l'équation (4.2) on aura,

$$\frac{\pi}{2th(a\pi)} + \frac{1}{2a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

Comme La série de Fourier de $g_a * g_a$ est normalement convergente et son coefficients $c_{g_a * g_a}$ définisant par

$$c_{g_a * g_a} = (c_{g_a})^2 = \frac{a^2}{n^2 + a^2} \times \frac{sh^2 a\pi}{\pi^2}.$$

Alors, la somme de $g_a * g_a$ est donné par,

$$g_a * g_a(x) = \frac{sh^2(a\pi)}{a^2\pi^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^4}{(n^2 + a^2)^2} \cos(nx) \right).$$

On en déduit en prenant $x = 0$,

$$g_a * g_a(0) = \frac{sh^2(a\pi)}{a^2\pi^2} \left(-1 + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^4}{(n^2 + a^2)^2} \right).$$

Ainssi que, $g_a * g_a(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ch^2(ax)dx = \frac{1}{2} + \frac{sh(2a\pi)}{4a\pi}$, ce qui donne,

$$\frac{\pi^2}{4sh^2(a\pi)} + \frac{\pi}{4ath(a\pi)} + \frac{1}{2a^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^2}{(n^2 + a^2)^2}$$

Intégrales impropres

Chapitre 5

Sommaire

5.1 Série d'exercices N 5 85
5.2 Correction de série N 5 90

1 Série d'exercices N 5

Exercice 1

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et le cas échéant, calculer leur valeur

1. $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx.$
2. $\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx.$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx.$
4. $\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx.$
5. $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx.$
6. $\int_0^{\infty} xe^{-x}dx.$
7. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx.$

Exercice 2

Calculer les intégrales généralisées suivantes

1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})}dx.$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx.$
3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sqrt{\sin 2x}}}dx.$
4. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(x+b)}dx,\ a>0,\ b>0.$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx.$
6. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx.$

Exercice 3

Étudier la nature des intégrales suivantes

1. $\int_0^{+\infty} \sin x dx.$
2. $\int_1^{+\infty} \sin(x^2) dx.$
3. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$
4. $\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx.$
5. $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5+x+1}} dx.$
6. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{1+x^2} dx.$
7. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+2} dx.$
8. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$
9. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^x} dx.$
10. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx.$

Exercice 4

1. Étudier pour $\alpha > 0$, la convergence et la convergence absolue de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx.$
2. Étudier suivant les valeurs des paramètres réels α et β la nature de l'intégrale,
$$\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\ln^\beta(x+1)} dx.$$

Exercice 5

Étudier suivantes les valeurs réels de α et β la nature de l'intégrale de Bertrand $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} dx.$

Exercice 6

1. Étudier pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n} dx$ converge.
2. En déduit la valeur de I_n.

Exercice 7

Soit F la fonction définie par
$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt.$$

1. Calculer $F(x)$.

2 En déduit la convergence de l'intégrale suivante, puis déterminer sa valeur,

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt.$$

Exercice 8

Soit F la fonction définie par

$$F(x) = \int_1^{x} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt.$$

1 A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t^2+1}$, calculer $F(x)$.

2 En utilisant les règles de Riemann, montrer la convergence de l'intégrale suivante,

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt.$$

3 Calculer I.

Exercice 9

Montrer que les intégrales suivantes sont semi-convergentes.

1 $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$

2 $\int_{-1}^{+\infty} \cos(x^2) dx,$ (poser $u = x^2$).

3 $\int_{\pi}^{+\infty} x^2 \sin(x^4) dx.$

4 $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{i\sqrt{x}}}{x} dx.$

Exercice 10

Montrer que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$ diverge,

1 en utilisant un calcul de primitive.

2 par le critère de Riemann.

Exercice 11

Étudier la nature des intégrales

1 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(5x) - \sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}.$

2 $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}.$

Exercice 12

Pour $x \geq 0$, on pose

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que f et g sont de classe C^1. Calculer la dérivée de $f+g$.
2. Vérifier que $0 \leq g(x) \leq \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$. Déduire $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.
3. En déduire que $\int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice supplémontaire 1

1. Étudier pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^3+1)^n} dx$ converge
2. Calculer I_1.
3. Montrer pour tout $n \geq 2$, on a
$$I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n} I_n.$$
4. En on déduit I_n si $n \geq 1$.

Exercice supplémontaire 2

Soit f une fonction définie et décroissante sur l'intervalle $[a, +\infty[$, $(a > 0)$ à valeur dans $\mathbb{R}^+$

1. Montrer que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge, alors, $\lim_{x \to +\infty} x f(x) = 0$.

   Indication: en utilisant l'inégalité : $x f(2x) \leq \int_x^{2x} f(t) dt$, si $x \geq a$.

2. Montrer par un contre-exemple que la réciproque est fausse.

Exercice supplémontaire 3

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$$

1. Justifier que F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2 Justifier que F est C^1 et donner une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3 Calculer $F'(x)$.

4 En déduire une expression simplifiée de $F(x)$.

Exercice supplémontaire 4

Soit l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(t+1)} dt$.

1 Étudier la définition de F.

2 Donner un équivalent de F en 0.

3 Montrer que F admet une symétrie.

4 Montrer que F est continue sur son ensemble de défiition.

5 Calculer la borne inférieure de F.

Exercice supplémontaire 5

1 Étudier l'existence et la dérivabilité de la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2} dt$

2 Trouver une expression simple de $F(x)$.

2 Correction de série N 5

Correction d'exercice 1

1 Étude la convergence de $\int_0^{+\infty} {}^{-x}dx$.

La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $[0,+\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$. Soit $x > 0$. Alors

$$\int_0^x e^{-t}dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^x = 1 - e^{-x} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Donc, l'intégrale $\int_0^{+\infty} {}^{-x}dx$ est converge et $\int_0^{+\infty} {}^{-x}dx = 1$.

2 Convergence de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ est continue sur $[0,1[$, on a donc a priori uniquement un problème en 1. Soit $x \in [0,1[$. Alors

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}dt = \Big[-\sqrt{1-t}\Big]_0^x = 2 - \sqrt{1-x} \underset{x\longrightarrow1}{\longrightarrow} 2.$$

D'où la convergence de $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = 2$.

3 Convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$.

La fonction $x \mapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$, on a donc a priori uniquement un problème en $+\infty$. Soit $x > 0$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2}dt &= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^2}dt = \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{1+t^2}\Big]_0^x \\ &= -\frac{1}{2(1+t^2)} + \frac{1}{4} \underset{x\longrightarrow+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Par suite l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$ est converge et $\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{4}$.

4 Pour l'intégrale $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx$. On a la fonction $x \mapsto xe^{-x^2}$ est continue sur $]-\infty,0]$, nous avons donc a priori uniquement un problème en $-\infty$.

Soit $x \in]-\infty, 0]$. Alors

$$\begin{aligned}\int_x^0 te^{-t^2}dt &= -\frac{1}{2}\int_x^0 (-2t)e^{-t^2}dt = -\frac{1}{2}\Big[e^{-t^2}\Big]_x^0 \\ &= \frac{1}{2}e^{-t^2} - \frac{1}{2} \underset{x\longrightarrow -\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

C'est à dire $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx$ converge vers $-\frac{1}{2}$.

5 Étude convergence de $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$. On a la fonction $x \mapsto xe^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$, nous avons donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.
Soit $x \in [0, +\infty[$. Par intégration par parties, on trouve,

$$\begin{cases} u(t) = t \\ v'(t) = e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = 1 \\ v(t) = -e^{-t} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_0^x te^{-t}dt &= \Big[-te^{-t}\Big]_0^x + \int_0^x e^{-t}dt \\ &= -xe^{-x} + \Big[-e^{-t}\Big]_0^x \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + 1 \underset{x\longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1.\end{aligned}$$

C'est à dire $\int_0^{+\infty} xe^{-xdx}$ converge vers 1.

6 Convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$. Il est clair que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, nous avons donc a priori uniquement un problème en $+\infty$.
Soit $x \in [0, +\infty[$. Par conséquent,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \Big[\arctan(x)\Big]_0^x = \arctan(x) \underset{x\longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} = \frac{\pi}{2}.$$

D'où la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ converge vers $\frac{\pi}{2}$.

Correction d'exercice 2

1 On a pour tout $x \geq 0$,

$$\frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \Big[-\frac{1}{1+e^x}\Big]'.$$

Donc, on obtient,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})}dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{1}{(1+e^t)(1+e^{-t})}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{e^t}{(1+e^t)^2}dt \\ &= \lim_{x\to+\infty}\Big[-\frac{1}{1+e^x}\Big]_0^x = \frac{1}{2} - \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2 Comme la primitive des fonctions $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ est la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$, telle que u une fonction dérivable, alors, nous avons,

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}dt = \lim_{x\to+\infty}\Big[-2e^{-\sqrt{t}}\Big]_1^x \\ &= \frac{2}{e} - \lim_{x\to+\infty} 2e^{-\sqrt{x}} = \frac{2}{e}.\end{aligned}$$

3 On a pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$\Big(\sqrt{\sin(2x)}\Big)' = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}.$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}dx &= \lim_{x\to 0}\int_x^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2t}{\sqrt{\sin 2t}}dt + \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\int_{\frac{\pi}{4}}^x \frac{\cos 2t}{\sqrt{\sin 2t}}dt \\ &= \lim_{x\to 0}\Big[\sqrt{\sin 2t}\Big]_x^{\frac{\pi}{4}} + \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\Big[\sqrt{\sin 2t}\Big]_{\frac{\pi}{4}}^x \\ &= \lim_{x\to 0}\Big[1-\sqrt{\sin 2x}\Big] + \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\Big[\sqrt{\sin 2x}-1\Big] = 0.\end{aligned}$$

4 Pour l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(x+b)}dx$, $a > 0$, $b > 0$. en décomposant la fraction $\frac{1}{x(x+b)}$, on obtient

$$\frac{1}{x(x+b)} = \frac{1}{b} \times \Big[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b}\Big].$$

Donc, on trouve,

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} \frac{1}{x(x+b)}dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_a^x \frac{1}{b}\times\Big[\frac{1}{t}-\frac{1}{t+b}\Big]dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{b}\times\Big[\ln\Big(\frac{t}{t+b}\Big)\Big]_a^x \\ &= -\ln\Big(\frac{a}{a+b}\Big) + \frac{1}{b}\lim_{x\to+\infty}\times\ln\Big(\frac{x}{x+b}\Big) = -\ln\Big(\frac{a}{a+b}\Big).\end{aligned}$$

5 Comme la fonction $x \mapsto \arctan x$ a pour dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, et la primitive des fonctions de la forme $f.f'$ est $\dfrac{1}{2}f^2$. Alors, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{\arctan t}{1+t^2}dt = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(\arctan t)^2}{2}\right]_0^x \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{(\arctan x)^2}{2} = \frac{\pi^2}{8}.\end{aligned}$$

6 En intégrant par parties, on trouve

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt = -\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\ln t}{t} + \frac{1}{t}\right]_0^x \\ &= 1 - \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x}\right) = 1.\end{aligned}$$

Correction d'exercice 3

On étudiant la nature des intégrales suivantes

1 Pour l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin x dx$. On a

$$\int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x \sin x dx = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\cos x\right) \text{ n'existe pas.}$$

Car, $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ prend plusieurs des valeurs, donc l'intégrale généralisée n'existe pas.

2 Étude convergence de $\int_1^{+\infty} \sin(x^2)dx$.

En faisant le changement du variable, posons $u = x^2$, donc, $u' = 2xdx$, alors

$$\int_1^{+\infty} \sin(x^2)dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2u}du.$$

En appliquant le Théorème d'Abel à l'intègrale impropre $\int_1^{+\infty} \dfrac{\sin(u)}{2u}du$.

D'une part la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{2u}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2u} = 0$.

D'autre part pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a $\left| \int_1^x \sin(t^2)dt \right| = \left| \sin(2x) - \sin(1) \right| \leq 2$.

D'où l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{2u} du$ converge, par suite l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \sin(x^2)dx$ converge.

3 Pour l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$. Nous avons pour $x \geq 1$ on a $x^2 \geq x \geq 1$. D'après la croissance de la fonction exponentielle on trouve,

$$e^{-x^2} \leq e^{-x}.$$

Comme l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ converge, car

$$\int_1^x e^{-t}dt = \Big[-e^{-t} \Big]_1^x = e^{-1} - e^{-x} \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^{-1}.$$

D'où, d'après le Théorème de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx$ est converge.

On sait que l'intégrale $\int_0^e e^{-x^2}dx$ est aussi converge, car la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur l'intervalle fermé $[0, 1]$.

4 On a la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est paire, donc,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}dx.$$

D'après question précédente l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ converge, d'où la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^{-x^2}dx$.

5 Étude l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5 + x + 1}} dx$.

On sait que $\frac{2x}{\sqrt{x^5 + x + 1}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}}$. Comme l'intégrale impropre de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ converge $(\alpha = \frac{3}{2} > 1)$, alors d'après le Théorème de l'équivalence du fonctions, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5 + x + 1}} dx$ converge. Sachant que $\int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^5 + x + 1}} dx$ est finie, car la fonction $x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x^5 + x + 1}}$ est continue sur $[0, 1]$. Par conséquent l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^5 + x + 1}} dx$ converge.

6 On a

$$\left|\frac{\cos(x^2)}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge, alors d'après le Théorème de comparaison, l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{1+x^2}dx$ converge. D'où l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{1+x^2}dx$ converge, car la fonction $x \mapsto \frac{\cos(x^2)}{1+x^2}$ continue sur $[0,1]$, c'est à dire intégrable sur $[0,1]$.

7 On a pour tout $x \geq e$,

$$\frac{\ln x}{x+2} \geq \frac{1}{x+2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

Comme l'intégrale impropre de Riemann $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x}dx$. diverge, alors d'après les théorèmes du comparison et d'équivalence l'intégrale impropre $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x+2}dx$ diverge. Sachant que l'intégrale $\int_1^{e} \frac{\ln x}{x+2}dx$ est finie. D'où la divergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x+2}dx$.

8 On étudiant la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$. Alors, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx = \int_0^{1} \frac{\cos x}{x^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

a Pour l'intégrale $I_1 = \int_0^{1} \frac{\cos x}{x^2}dx$, on sait que que $x \mapsto \cos x$ est une fonction positive au voisinage de 0, de plus,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

par suite, on a

$$\lim_{n\to 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{\cos x}{x^2}} = \lim_{n\to 0} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2}} = \lim_{n\to 0} \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = 1.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_0^{1} \frac{1}{x^2}dx$. converge, alors, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ est aussi converge. D'où l'intégrale impropre $\int_0^{1} \frac{\cos x}{x^2}dx$ converge.

b Pour l'intégrale $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$. Nous avons

$$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ converge, alors d'après le Théorème de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge.

D'où l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ converge.

9 Pour l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^x} dx$. Alors, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^x} dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{x + e^x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^x} dx = -\int_0^1 \frac{-\ln x}{x + e^x} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^x} dx.$$

a Posons $I_1 = \int_0^1 \frac{-\ln x}{x + e^x} dx$, alors, on a

$$\lim_{n \to 0} \frac{\frac{-\ln x}{x + e^x}}{-\ln x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x + e^x} = 1.$$

Comme l'intégrale $-\int_0^1 \ln x dx$. converge, car

$$-\int_0^1 \ln x dx = -\lim_{x \to 0} \int_x^1 \ln t dt = \lim_{x \to 0} \left(1 - t \ln t\right) = 1.$$

Alors, d'près le théorème d'équivalence l'intégrale $I_1 = \int_0^1 \frac{-\ln x}{x + e^x} dx$ est converge.

b Pour l'intégrale $I_2 = \int_{01}^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^x} dx$, il est clair que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x + e^x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln 2 + \ln(\frac{x}{2})}{e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{e^{\frac{x}{2}}} + 1\right)} \times \frac{x^2}{e^{\frac{x}{2}}} = 0.$$

Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge, alors d'après le Théorème de comparaison, l'intégrale $I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^x} dx$ converge.

Par conséquent, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^x}dx$ est converge.

10 On a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx + \int_1^2 \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx + \int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Comme,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ (converge)}.$$

Alors, $I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$ converge.
Pour les intégrales, I_2 et I_3, on a

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{\ln(x)}{x^2-1}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1.$$

Puisque les deux intégrales $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln x}{x+1}$ et $\int_1^2 \frac{\ln x}{x+1}$ existent (finies), alors d'après le Théorème d'équivalence, les deux intégrales impropres I_2 et I_3 sont convergentes.
Pour l'intégrale $I_4 = \int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$. On remarque que,

$$\int_2^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \text{ (intégrale de Riemann, donc converg)}.$$

Par conséquent l'intégrale I_4 converge. On en résulte que I la somme de I_1, I_2, I_3 et I_4 est converge.

Correction d'exercice 4

Étude de la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$.

1 Convergence simple.

En utilisant le Théorème d'Abel, il est facile de voir que pour tout $\alpha > 0$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ est convergente. En effet, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ décroissante sur $[1, +\infty[$ et $\lim_{x \to 1=\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$.

D'autre part pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a $\left| \int_1^x \sin(t) dt \right| = \left| \sin x - \sin(1) \right| \leq 2$.

D'où l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ est converge.

2 Étude la convergence absolue. On a pour tout $\alpha > 0$

$$\left| \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

Alors, on distinger deux cas

a Si $\alpha > 1$, l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge, par conséquent l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha} dx$ est converge.

b Si $0 < \alpha \leq 1$. Il faut étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} dx$.

On sait que pour $x \in [0, 1]$ on a $x \geq x^2$ et donc, pour tout $t \in [1, +\infty[$

$$|\sin(x)| \geq \sin^2(x).$$

D'où, pour tout $t \geq 1$, on trouve,

$$0 \leq \frac{\sin^2 t}{t^\alpha} \leq \frac{|\sin t|}{t^\alpha}.$$

Comme

$$\frac{\sin^2 t}{t^\alpha} = \frac{1}{2t^\alpha} - \frac{\cos(2t)}{2t^\alpha},$$

et l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ diverge, par suite l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^\alpha} dx$ est diverge.

3 $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\ln^\beta(x+1)} dx$ est une intégrale impropre en 0.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^\alpha}{\ln(x+1)^\beta}}{\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}} = 1, \quad \text{i.e,} \quad \frac{x^\alpha}{\ln^\beta(x+1)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{\beta-\alpha}}.$$

Alors, les deux intégrales de même nature.

Or l'intégrale de Riemann $\int_0^1 \frac{1}{x^{\beta-\alpha}} dx$ est convergente si et seulement si $\beta - \alpha < 1$.

Correction d'exercice 5

On étude la nature de l'intégrale de Bertrand $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} dx$, selon les valeurs des paramètres réels α et β. On distinger quatre cas.

1 Si $\alpha > 1$ on choisit un réel γ de sorte que $1 < \gamma < \alpha$, on trouve donc,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)}}{\frac{1}{x^\gamma}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\gamma-\alpha}\ln^\beta(x)} = 0,$$

quelque soit $\beta \in \mathbb{R}$, c'est à dire $\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} = o\left(\frac{1}{x^\gamma}\right)$. Et comme l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\gamma} dx$ est convergente car $\gamma > 1$ on déduit que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} dx$ est convergente.

2 Si $\alpha < 1$. Alors, si on prend un réel de sorte que $0 < \gamma < \alpha$, on trouve donc,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^\gamma}}{\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\gamma-\alpha}\ln^{-\beta}(x)} = 0,$$

quelque soit $\beta \in \mathbb{R}$, c'est à dire $\frac{1}{x^\gamma} = o\left(\frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)}\right)$. Et comme l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\gamma} dx$ est divergente car $\gamma < 1$, on déduit que l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)} dx$ est divergente.

3 Si $\alpha = 1$ et $\beta = 1$. On sait que pour tout $x > 2$, on a

$$\Big(\ln(\ln x)\Big)' = \frac{1}{x\ln(x)}.$$

Comme,

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln(x)} dx &= \lim_{x\to+\infty} \int_2^x \frac{1}{t\ln(t)} dt = \lim_{x\to+\infty} \Big[\ln(\ln t)\Big]_2^x \\ &= -\ln(\ln 2) + \lim_{x\to+\infty} \ln(\ln x) = +\infty.\end{aligned}$$

D'où la divergence de l'intégrale de Bertrand dans ce cas.

4 Si $\alpha = 1$ et $\beta \neq 1$. On a que pour tout $x > 2$,

$$\frac{1}{1-\beta}\Big(\ln^{1-\beta}(x)\Big)' = \frac{1}{x\ln^\beta(x)}.$$

Et comme,

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^{\beta}(x)}dx &= \frac{1}{1-\beta}\lim_{x\to+\infty}\int_2^{x}\ln^{1-\beta}(t)dt = \frac{1}{1-\beta}\lim_{x\to+\infty}\Big[\ln^{1-\beta}(t)\Big]_2^{x}\\ &= -\frac{\ln^{1-\beta}(2)}{1-\beta}+\frac{1}{1-\beta}\lim_{x\to+\infty}\ln^{1-\beta}(x) = \begin{cases}+\infty & : \text{si } \beta<1,\\ 0 & : \text{si } \beta>1.\end{cases}\end{aligned}$$

Alors, on en conclut à cette étude que,

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}\ln^{\beta}(x)}dx \text{ converge } \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha>1\\ ou\\ \alpha=1 \text{ et } \beta<1.\end{cases}$$

Correction d'exercice 5

1 L'intégrale I_n est une intégrale de Bertrand $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^n\ln^{-1}x}dx$ qui converge si et seulement si $n\geq 2$.

2 Pour la calculer dans ce cas, intégrons par parties $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^n}dx$. On trouve donc,

$$\int\frac{\ln x}{x^n}dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\ln x - \int\frac{x^{-n}}{-n+1}dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\ln x - \frac{x^{-n}}{(-n+1)^2}.$$

Alors, en résulte que,

$$I_n = \int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^n}dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\ln x - \frac{x^{-n}}{(-n+1)^2}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{(-n+1)^2}.$$

Correction d'exercice 6

Soit l'intégrale $F(x) = \int_1^{x}\frac{\ln(1+t^2)}{t^2}dt$.

1 Par intégration par parties, et posons donc,

$$\begin{cases}u'(t)=\frac{1}{t^2}\\ v(t)=\ln(1+t^2)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u(t)=-\frac{1}{t}\\ v(t)=\frac{2t}{1+t^2}.\end{cases}$$

On obtient, donc

$$\begin{aligned}F(x) &= \left[-\frac{1}{t}\ln(1+t^2)\right]_1^{x}+2\int_1^{x}\frac{1}{1+t^2}dt\\ &= -\frac{1}{x}\ln(1+x^2)+\ln 2+2\arctan x-\arctan 1 \;=\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{x}\ln(1+x^2)+2\arctan x+\ln 2-\frac{\pi}{2}.$$

2 Comme,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(1+x^2)=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}.$$

Donc, $F(x)$ admet une limite finie ce qui sinifie que l'intégrale I est converge et

$$I=\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}\Big[-\frac{1}{x}\ln(1+x^2)+2\arctan x+\ln 2-\frac{\pi}{2}\Big]=\ln 2+\frac{\pi}{2}.$$

Correction d'exercice 7

1 On fait le changement de variable, posons donc, $u=\sqrt{1+t^2}$ alors, $t=\sqrt{u^2-1}$ et

$$dt=\frac{2udu}{2\sqrt{u^2-1}}=\frac{udu}{\sqrt{u^2-1}},$$

Par suite,

$$\begin{cases} t=1\Rightarrow u=\sqrt{2}\\ t=x\Rightarrow u=\sqrt{x^2+1}.\end{cases}$$

Par conséquent, on aura,

$$F(x)=\int_1^x\frac{1}{t\sqrt{t^2+1}}dt=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\times\frac{udu}{\sqrt{u^2-1}}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}}\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}.$$

On sait que on peut développer la fraction $\dfrac{1}{\sqrt{u^2-1}}$ comme suit,

$$\frac{1}{\sqrt{u^2-1}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{u-1}-\frac{1}{2}\frac{1}{u+1}.$$

Donc, on a

.

2 .

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}}\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}}\frac{du}{\sqrt{u-1}}-\frac{1}{2}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}}\frac{du}{\sqrt{u+1}}\\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln|u-1|-\ln|u+1|\Big]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}}\\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln\Big|\frac{u-1}{u+1}\Big|\Big]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\Big|-\frac{1}{2}\ln\Big|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\Big|.\end{aligned}$$

3 a Pour $\alpha = \frac{3}{2} > 1$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} t^{\frac{3}{2}} \times \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} = 0.$$

Donc, l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt$ est converge.

b On remarque que $t = \sqrt{1+x^2}$ et tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, d'où

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right| + \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right|.$$

Correction d'exercice 8

Montrons la semi-convergence des intégrales suivantes.

1 Pour $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$. En appliquant le critère d'Abel. La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante et tend vers 0 à l'infini, par ailleurs pour tous $x,\ x' \geq \pi$, on a

$$\left|\int_x^{x'} \cos t dt\right| = \left|\sin x' - \sin x\right| \leq 2.$$

Donc l'intégrale converge.
Pour montrer qu'elle ne converge pas absolument, on peut utiliser l'inégalité

$$\forall x \in [\pi, +\infty[:\ |\cos x| \geq \cos^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Alors,

$$\int_\pi^x \frac{|\cos t|}{\sqrt{t}} \geq \int_\pi^x \frac{1-\cos 2t}{2\sqrt{t}} dt = \int_\pi^x \frac{1}{2\sqrt{t}} dt + \int_\pi^x \frac{\cos 2t}{2\sqrt{t}} dt. \tag{5.1}$$

Mais,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_\pi^x \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \lim_{x\to+\infty} [\sqrt{x} - \sqrt{\pi}] = +\infty.$$

Par contre, en posant $u = 2t$, on obtient

$$\int_\pi^x \frac{\cos 2t}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{2\pi}^{2x} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du$$

D'après ce qui précède cette expression possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, donc le membre de droite de l'inégalité (5.1) tend vers $+\infty$, et il en résulte que celui de gauche a la même limite. Par suite, l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$ diverge.

2 Comme la fonction qui à $x \mapsto \cos(x^2)$ est continue sur $[-1, +\infty[$, l'intégrale $\int_{-1}^{+\infty} \cos(x^2)dx$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} \cos(x^2)dx$ converge, et de même l'intégrale $\int_{-1}^{+\infty} |\cos(x^2)|dx$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} |\cos(x^2)|dx$ converge. En faisant le changement de variable $x^2 = u$, on obtient,

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} \cos(x^2)dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}du,$$

et également

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} |\cos(x^2)|dx = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{|\cos(u)|}{2\sqrt{u}}du.$$

D'après le résultat de question (a), l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}}du$ est semi-convergente, et donc que l'intégrale $\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} \cos(x^2)dx$ est aussi semi-convergente. Par conséquent $\int_{-1}^{+\infty} \cos(x^2)dx$ est semi-convergente.

3 On effectue le changement de variable $u = x^4$. L'intégrale devient,

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} x^2 \sin(x^4)dx = \frac{1}{4}\int_{\pi^4}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^{\frac{1}{4}}}du.$$

La situation est identique à celle de question (a). La fonction qui à $u \mapsto \frac{1}{\sqrt[4]{u}}$ est décroissante et tend vers 0 à l'infini. par ailleurs pour tous $x,\ x' \geq \pi^4$, on a

$$\left|\int_{x}^{x'} \sin u du\right| = \left|\cos u' - \cos u\right| \leq 2.$$

Donc la critère d'Abel permet de conclure que l'intégrale $\int_{\pi^4}^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^{\frac{1}{4}}}du$ converge.
Pour montrer qu'elle ne converge pas absolument, on peut utiliser l'inégalité,

$$\forall x \in [\pi^4, +\infty[:\ |\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

et conclure comme dans le question (a).

4 On effectue le changement de variable $u = \sqrt{x}$. L'intégrale devient,

$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{i\sqrt{x}}}{x} dx = 2 \int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} \frac{e^{iu}}{u} du.$$

On applique alors la même méthode que dans le question (a) aux parties réelle et imaginaire

$$\int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} \frac{2\cos u}{u} du \text{ et } \int_{\sqrt{\pi}}^{+\infty} \frac{2\sin u}{u} du.$$

Ce qui montre que ces deux intégrales convergent, donc $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{e^{i\sqrt{x}}}{x} dx$ converge. Par contre, puisque $|e^{i\sqrt{x}}| = 1$, et que l'intégrale $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge, l'intégrale proposée n'est pas absolument convergente.

Correction d'exercice 9

1 On écrit $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, donc, on a immédiatement,

$$\int \tan x dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\ln(\cos x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \int_0^x \tan t dt = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \Big[-\ln(\cos t) \Big]_0^x \\ &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \Big[-\ln(\cos x) \Big] = +\infty. \end{aligned}$$

Donc, l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$ est diverge.

2 La fonction tangente possède une discontinuité en $\dfrac{\pi}{2}$. On se ramène en 0 en posant $u = \dfrac{\pi}{2} - x$. Alors,

$$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = cotanu = \frac{1}{\tan u}.$$

Mais au voisinage de 0, $\tan(u) \sim u$, donc,

$$\tan x \sim \frac{1}{u}.$$

Comme l'intégrale $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{u}$ diverge, il en résulte que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x dx$ diverge également.

Correction d'exercice 10

1 Pour tout $x \in]0,+\infty[$, s'elle l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}$ existe, on peut écrit comme suit

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}dx = \int_0^{1} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}dx.$$

On va utiliser le critère sur les équivalents. La fonction à intégrer est continue sur $]0,+\infty[$ donc localement intégrable sur cet intervalle. L'intégrale est automatiquement impropre en $+\infty$. Il faut faire l'étude en 0.

a En point 0. on a

$$\sin(3x) = 3x + o(x) \text{ et } \sin(5x) = 5x + o(x).$$

Donc,

$$\sin(5x) - \sin(3x) \underset{0}{\sim} 2x.$$

Alors, on trouve,

$$\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}} \underset{0}{\sim} \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

On a donc que les fonctions sont de signe constant au voisinage de 0. On peut donc utiliser le critère sur les équivalents,

$$\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}} \underset{0}{\sim} \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow \begin{cases} \int_0^1 \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}dx \\ \text{et} \\ \int_0^1 \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}dx \end{cases} \text{ sont de même nature}$$

Comme l'intégrale $\int_0^1 \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}dx$ converge, alors, l'intégrale impropre $\int_0^1 \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}dx$ converge.

b En $+\infty$. Pour tout $x \in [1,+\infty[$, nous avons,

$$\left|\frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}\right| \leq \frac{2}{x^{\frac{5}{3}}}.$$

Comme l'intégrale impropre de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^{\frac{5}{3}}}dx$ converge, donc l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}dx$ absolument convergente.

On conclut de (a) et (b) l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{\frac{5}{3}}}dx$ est converge.

2 La fonction à intégrer est continue sur $]0,+\infty[$ donc localement intégrable sur cet intervalle. On remarque aussi d'après relation de Chasle (s'elle l'intégrale existe)

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx = \int_0^1 \frac{x}{e^x-1}dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx.$$

a En point 0. On a

$$\frac{x}{e^x-1} \underset{0}{\sim} 1.$$

Donc, la fonction $x \mapsto \frac{x}{e^x-1}$ est prolongeable par continuité en 0. Donc l'intégrale en 0 est une intégrale de Riemann, c'est à dire $\int_0^1 \frac{x}{e^x-1}dx$ finie.

b En $+\infty$. Le critère de Riemann devrait bien fonctionner. On a donc,

$$x^2 \times \frac{x}{e^x-1} = \frac{x^3}{e^x} \times \frac{1}{1-e^{-x}} = x^3e^{-x}\frac{1}{1-e^{-x}}.$$

On sait que $\lim_{x\to 0} x^3e^{-x} = 0$, donc, $x^2 \times \frac{x}{e^x-1} = x^3e^{-x}\frac{1}{1-e^{-x}} \underset{+\infty}{\sim} 0$. Le critère de Riemann permet de conclure que $\int_1^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx$ converge.

D'où, d'après (a) et (b) l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x-1}dx$ est converge.

Correction d'exercice 11

1 f n'est autre que le carré d'une fonction primitive de $t \mapsto e^{-t^2}$ qui est contnue sur $\mathbb{R}$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de plus $f'(x) = 2\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)e^{-x^2}$. On a

a l'application $(x,t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$.

b

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} = -2xe^{-x^2(1+t^2)}.$$

existe et continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$, donc d'après le Théorème de Leibniz g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a

$$g'(x) = -2\int_0^1 xe^{-x^2(1+t^2)}dt.$$

c Le changement de variable $u = xt$ permet d'avoir

$$g'(x) = -2\int_0^1 e^{-x^2-u^2}du = -f'(x).$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$(f+g)'(x) = 0.$$

2 On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 \leq g(x) &\leq e^{-x^2}\int_0^1 \frac{e^{-x^2t^2}}{1+t^2}dt \leq e^{-x^2}\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt \\ &= e^{-x^2}\Big[\arctan t\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$0 \leq \lim_{x\to} g(x) \leq \frac{\pi}{4} \leq \lim_{x\to} e^{-x^2} = 0.$$

3 L'application $h(x) = f(x) + g(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$ et $h(0) = 0 + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve,

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Comme,

$$\Big|\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt\Big| = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{f(x)+g(x)} = \sqrt{\frac{\pi}{4}}.$$

Or $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \geq 0$. D'où $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Correction d'exercice supplémontaire 1

1 On a, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^3+1)^n}dx \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n}}$. Donc, l'intégrale I_n converge si et seulement si $3n > 1$, c'est à dire $n \geq 1$.

2 En utilisant la factorisation, on trouve donc,

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

Alors, la fraction rationnelle $\frac{1}{x^3+1}$ se décompose en éléments simples sous la forme

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\times\frac{-x+2}{x^2-x+1},$$

ce qui s'écrit encore

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3}\times\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\times\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{x^2-x+1}.$$

Pour $x \geq 0$, on obtient alors comme primitive,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3+1}dx &= \frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\\ &= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}dx &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\ln\left(\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^x\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.\end{aligned}$$

Car, $\lim\limits_{u\to+\infty}\arctan(u) = \frac{\pi}{2}$, et $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$. D'où la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^3+1}dx$.

3 Si $n \geq 1$, l'intégrale I_n est convergente, et on peut intégrer par parties. On trouve

$$I_n = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{t}{(t^3+1)^n}\right]_0^x + \int_0^{+\infty}\frac{3nx^3}{(x^3+1)^{n+1}}dx = \int_0^{+\infty}\frac{3nx^3}{(x^3+1)^{n+1}}dx.$$

Mais,

$$\int_0^{+\infty}\frac{3nx^3}{(x^3+1)^{n+1}}dx = \int_0^{+\infty}\frac{x^3+1}{(x^3+1)^{n+1}}dx - \int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^3+1)^{n+1}}dx = I_n - I_{n+1}.$$

Donc,

$$I_n = 3n(I_n - I_{n+1}),$$

d'où l'on déduit

$$I_{n+1} = \frac{3n-1}{3n}I_n.$$

Par conséquent, on obtient,

$$I_n = \frac{3n-4}{3n-3}\frac{3n-7}{3n-6}\cdots\frac{2}{3}I_1 = \frac{3n-4}{3n-3}\frac{3n-7}{3n-6}\cdots\frac{2}{3}\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Correction d'exercice supplémontaire 2

1 Comme f décroissante sur $[a,+\infty[$, alors pour tout $t \in [x,2x] \subset [a,+\infty[$, on a

$$f(t) \geq f(2x).$$

Donc,

$$\int_x^{2x} f(t)dt \geq \int_x^{2x} f(2x)dt = f(2x)\int_x^{2x} dt = xf(2x) \tag{5.2}$$

On remplaçer dans l'inégalité (5.2), x par $\frac{x}{2}$ si $x \geq 2a$, on a donc,

$$0 \leq xf(x) \leq 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt.$$

Comme l'intégrale converge, il existe, d'après le critère de Cauchy, un nombre A, tel que les inégalités $A \leq u \leq v$ impliquent

$$\left|\int_u^v f(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors si $x \geq 2A$, on a $A \leq \frac{x}{2} \leq x$, et

$$0 \leq xf(x) \leq 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)dt < \varepsilon.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$.

2 La fonction f définie sur l'intervalle $[2,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$. et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$. On vérifie facilement qu'elle est décroissante. Par contre l'intégrale de f diverge, puisque,

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx &= \lim_{x\to+\infty}\int_2^x \frac{1}{t\ln t}dt = \lim_{x\to+\infty}\Big[\ln(\ln t)\Big]_2^x \\ &= -\ln(\ln 2) + \lim_{x\to+\infty}\ln(\ln x) = +\infty.\end{aligned}$$

D'où la convergence de l'intégrale impropre $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx$, c'est à dire l'inverse de l'implication est fausse.

Correction d'exercice supplémontaire 3

1 Si x au voisinage de 0, on a

$$\sin(xt) \underset{0}{\sim} xt.$$

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\sin(xt)}{t}e^{-t} = 0$, et donc la fonction se prolonge par continuité en 0. Ainssi la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et on a pour $t \geq 1$,

$$\left|\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\right| \leq e^{-t},$$

$\int\limits_1^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente, alors d'après le critère de comparaison $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin(xt)}{t}e^{-t}dt$ est convergente.

2 Posons, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $f(x,t) = \dfrac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$. Alors, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}f(x,t) = \cos(xt)e^{-t}.$$

C'est donc une fonction continue sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in]0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}f(x,t)\right| \leq e^{-t}.$$

$\int\limits_1^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente. On en déduit, par le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = \int_1^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}dt.$$

3 On peut calculer cette dernière intégrale en écrivant $\cos(xt)$ comme $Re(e^{ixt})$, on a donc,

$$\begin{aligned} F'(x) &= Re\left[\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}dx\right] \\ &= Re\left[\frac{1}{1-ix}\right] = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

4 Par intégrant de F' entre 0 et x, on trouve que

$$\int_0^x F'(t)dt = \Big[F(t)\Big]_0^x = \arctan(x) - \arctan(0).$$

Donc,

$$F(x) = \arctan(x).$$

Correction d'exercice supplémontaire 4

1 Pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $f(t,x) = \dfrac{1}{t^x(t+1)}$. Il est immédiat que l'intégrale $\int_0^1 \dfrac{1}{t^x(t+1)}dt$ converge si $x < 1$ et $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^x(t+1)}dt$ converge si $x > 0$. Donc, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t,x)dt$ converge si et seulement si $x \in]0,1[$. Alors, l'insemble de définition de F est $]0,1[$.

2 Remarquons que $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^{x+1}}dt = \lim_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{1}{xt^{x+1}}\right]_1^{+\infty} = \dfrac{1}{x}$,

et par changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$, on trouve

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}(t+1)}dt = \int_0^1 \frac{u^x}{u+1}du = \int_0^1 \frac{t^x}{t+1}dt.$$

Donc, on obtient,

$$\begin{aligned} F(x) - \frac{1}{x} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^x(t+1)}dt - \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t^x(t+1)}dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^x(t+1)}dt - \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t^x(t+1)}dt - \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}(t+1)}dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t^x(t+1)}dt - \int_0^1 \frac{t^x}{t+1}dt \end{aligned}$$

On conclut que pour tout $x \in]0,1[$,

$$0 \le F(x) - \frac{1}{x} \le \int_0^1 \frac{1}{t^x(t+1)}dt \le \int_0^1 \frac{1}{t^x}dt = \frac{1}{1-x}.$$

Alors, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} xF(x) = 1$, c'est à dire $F(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

3 Le changement de variable $t = \dfrac{1}{u}$ nous montre que $F(x) = F(1-x)$ pour $x \in]0,1[$. Alors le graphe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

4 Posons $F_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \dfrac{1}{t^x(t+1)}dt$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$.

Il est immédiat que $(t,x) \mapsto \dfrac{1}{t^x(t+1)}$ est continue sur $]\dfrac{1}{n}, n[\times]0,1[$. Alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction

F_n est continue sur $]0,1[$. D'autre part, soit $\varepsilon \in]0,\frac{1}{2}[$. Pour tout $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$, nous avons

$$\begin{aligned} F(x) - F_n(x) &= \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^x(t+1)}dt + \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^x(t+1)}dt \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{t^x}dt + \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}}dt \\ &\leq \frac{1}{1-x}\frac{1}{n^{1-x}} + \frac{1}{x}\frac{1}{n^x} \leq \frac{2}{\varepsilon n^\varepsilon}. \end{aligned}$$

Il en résulte que la suite F_n converge uniformément vers F sur $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ la fonction F est alors continue sur $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ pour tout $\varepsilon \in]0,\frac{1}{2}[$. On conclut que F est continue sur $]0,1[$.

5 Remarquons que

$$F(x) = \int_0^1 \left(\frac{1}{t^x} + \frac{1}{t^{1-x}}\right)\frac{dt}{t+1} = \int_0^{+\infty} \left(e^{xu} + e^{(1-x)u}\right)\frac{du}{1+e^u}.$$

Par une étude simple montre que la fonction $x \mapsto e^{xu} + e^{(1-x)u}$ est décroissante sur $]0,\frac{1}{2}[$ pour tout $u > 0$. Alors F est décroissante sur $]0,\frac{1}{2}[$, et en utilisant la symérrie de F et ça d'après question (3). Danc, la fonction F est croissante sur $]\frac{1}{2},1[$. On conclut que

$$\inf_{x\in]0,1[} F(x) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \pi.$$

Correction d'exercice supplémontaire 5

1 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction

$$\begin{aligned} \varphi_x :]0,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \varphi_x(t) = \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}. \end{aligned}$$

Elle est continue, donc localement intégrable. Si $x \neq 0$, alors $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ >}} \varphi_x(t) = \ln(x^2)$, par contre si $x = 0$ alors au voisinage de 0 nous avons $\varphi_x(t) \underset{0}{\sim} 2\ln(t)$. D'autre part, au voisinage de $+\infty$ et $\varphi_x(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2\ln(t)}{t^2}$. Cette étude aux bornes donne l'existence de l'intégrale,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}dt.$$

F est évidemment paire.
Introduisons la suite de fonctions

$$\begin{array}{rcl} F_n :]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & F_n(x) = \displaystyle\int_0^n \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}dt, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} h_n : [0,n]\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x) & \mapsto & h_n(t,x) = \dfrac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}dt. \end{array}$$

Il est immédiat que

$$\frac{\partial h_n}{\partial x}(t,x) = \frac{2x}{(t^2+1)(x^2+t^2)},$$

donc, h_n et $\dfrac{\partial h_n}{\partial x}$ sont continue sur $[0,n]\times]0,+\infty[$, ce qui prouve que F_n est de classe C^1 sur $]0+\infty[$, avec

$$F_n'(x) = \int_0^n \frac{2x}{(t^2+1)(x^2+t^2)}dt.$$

Introduisons l'intégrale convergente $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2x}{(t^2+1)(x^2+t^2)}dt$. Il est immédiat que

$$g(x) - F_n'(x) = \int_n^{+\infty} \frac{2x}{(t^2+1)(x^2+t^2)}dt,$$

d'où, en utilisant $2xt \leq x^2+t^2$,

$$g(x) - F_n'(x) \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t(t^2+1)} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2n^2}.$$

Ceci démontre que la suite $(F_n')_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $]0+\infty[$ vers g et que F est de classe C^1 sur $]0+\infty[$ avec $F' = g$.

2 Pour $x \neq 1$, nous avons

$$\frac{2x}{(t^2+1)(x^2+t^2)} = \frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{x^2+t^2}\right),$$

d'où,

$$F'(x) = \frac{2x}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{t^2+1} - \frac{1}{x^2+t^2}\right)dt = \frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2x}\right) = \frac{\pi}{x+1}.$$

La continuité de F' en 1 nous permet d'écrire, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{\pi}{x+1} \text{ et } F(x) = \pi \ln(x+1) + c,$$

avec c une constante.
Nous avons vu l'existence de $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^2)}{1+t^2} dt$. Alors, pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 \leq F(x) - F(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2) - \ln(t^2)}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\ln(x^2+t^2) - \ln(t^2)}{1+t^2} dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{x^2}{t^2})}{1+t^2} dt \\ &\leq \int_0^1 \Big(\ln(x^2+t^2) - \ln(t^2) \Big) dt + x^2 \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2(1+t^2)} \\ &\leq \frac{x^2}{3} - 2 + \int_0^1 \ln(x^2+t^2) dt. \end{aligned}$$

Une intégration par parties démontre que

$$\int_0^1 \ln(x^2+t^2) dt = \ln(x^2+1) - 2 + 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right),$$

donc,

$$\forall x > 0 : \ 0 \leq F(x) - F(0) \leq \frac{x^2}{3} + \ln(x^2+1) + 2x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leq \pi x + \frac{4}{3} x^2.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} F(x) = F(0)$ et F est continue sur $\mathbb{R}$, (à cause de la parité de F). Enfin, le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ dans $F(0)$ nous montre que

$$F(0) = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = -F(0).$$

Par conséquent $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} F(x) = F(0) = 0$. Ceci démontre que $c = 0$ et que $F(x) = \pi \ln(x+1)$, pour tout $x \geq 0$, puis $F(x) = \pi \ln(|x|+1)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Références

[1] Ali HAMEIDA, *Résumés de Cours et Exercices Corrigés D'Analyse 3- Les Séries. Polycopié,* Université de Constantine, **(2017).**

[2] A. Monteillet, *Cours de mathématiques. PSI,* http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/fr/. **(2016).**

[3] HAMDAOUI Abdenour, *Séries et intégrales généralisées. Cours et exercices d'applications. Polycopié,* Algérie **(2016).**

[4] KREE. M, KREE. P, VAUTHIER. J, *Exercices de Mathématiques, Deuxiéme année du DEUG, Vol. 1, Analyse.* ESKA, Paris, **(1989).**

[5] J-M. Monier, *Analyse 2, Cours et 600 exercices corrigés,* DUNOD, Paris, **(1994).**

[6] M. Aassila, *400 Exercices corrigés d'analyse avec rappels de cours,* Ellipses, Paris, **(2014).**

[7] OMRAN KOUBA, *Cours de Mathématiques, Compléments, D'Analyse et D'Algèbre,* https://www.researchgate.net/publication/279712976, **(2005).**

[8] RAMIS. E, *Exercices d'analyse, avec solutions développées,* Masson et Cie, Paris, **(1968).**

[9] Sedogbo. G. A, *DEUG Sciences 2e année,* Editions BELIN, **(2000).**

[10] Sylvie Guerre-Delabrière, *Suites, Séries, Intégrales, Cours et exercices* Université Pierre et Marie Curie. **(2001).**