Série d'Exercices 1

Chapitre 1 : Rappels d'Algèbre Linéaire et Matricielle

Master 1 – Analyse Numérique Matricielle

Dr. Bousafsaf

October 12, 2026

Exercice 1. Soient les matrices $A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ décomposées par blocs comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

avec :

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = (0)$$

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B_{21} = (4), \quad B_{22} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier la compatibilité des dimensions des blocs pour effectuer le produit $C = AB$ par blocs.
2. Calculer explicitement les blocs $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$ du produit $C = AB$.
3. Donner la matrice globale $C \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$.

Exercice 2.

1. Énumérer les $3! = 6$ permutations du groupe symétrique $\mathfrak{S}_3$ en précisant la signature ϵ_σ de chacune.
2. Calculer le déterminant de la matrice A suivante en utilisant la formule de Leibniz :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 7 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Considérons les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$$

1. Pour la matrice A : déterminer $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{rg}(A)$ et vérifier le Théorème du Rang.

2. Pour la matrice B : déterminer $\mathrm{Im}(B)$, $\mathrm{Ker}(B)$, $\mathrm{rg}(B)$ et vérifier le Théorème du Rang.

3. Confirmer le rang de B par extraction d'une sous-matrice carrée inversible d'ordre maximal.

Exercice 4.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Démontrer que A et B sont semblables en trouvant la matrice de passage inversible $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer ses valeurs propres, ses sous-espaces propres, la matrice de passage P et sa forme diagonale D.

Exercice 5.

1. Soit la matrice non diagonalisable $A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Calculer son unique valeur propre λ.
   (b) Trouver un vecteur propre normé u_1 et le compléter en une base orthonormée $\{u_1, u_2\}$.
   (c) Construire la matrice orthogonale U et calculer la forme triangulaire supérieure de Schur $T = U^* A_1 U$.

2. Soit la matrice $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Vérifier que A_2 est une matrice normale.
   (b) Calculer ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$ et déterminer ses vecteurs propres orthonormés.
   (c) Construire la matrice unitaire U et vérifier que $U^* A_2 U$ est une matrice diagonale.

3. Soit la matrice $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Vérifier que A_3 est réelle et symétrique.
   (b) Déterminer ses valeurs propres et une base orthonormée de vecteurs propres.
   (c) Construire la matrice orthogonale Q et vérifier que $D = Q^T A_3 Q$ est une matrice diagonale.

Exercice 6. Soit la matrice réelle $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Calculer les valeurs singulières σ_1, σ_2 de la matrice A.

2. Construire les matrices orthogonales V et U.

3. Vérifier explicitement la relation de décomposition $U^*AV = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$.

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne ($A^* = A$). Pour tout vecteur $v \neq 0$, le quotient de Rayleigh est $R_A(v) = \frac{v^*Av}{v^*v}$.

1. Démontrer les propriétés suivantes du quotient de Rayleigh :
   (a) Réalité : $R_A(v) \in \mathbb{R}$.
   (b) Homothétie : $R_A(\alpha v) = R_A(v)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}^*$.
   (c) Valeur sur vecteur propre : $R_A(v) = \lambda$ si $Av = \lambda v$.
   (d) Encadrement de Rayleigh-Ritz : $\lambda_{\min} \leq R_A(v) \leq \lambda_{\max}$.
2. Application numérique : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calculer $R_A(v)$ et vérifier l'encadrement de Rayleigh-Ritz.