

مراجعات وتمتات

القسم الثالث: التطبيقات (Maps)

نستعرض في هذا القسم المفاهيم والخصائص الأساسية المتعلقة بالتطبيقات، بدءاً من تعريفها مروراً بالعمليات التي يمكن إجراؤها عليها (القصر والتمديد والتركيب) وانتهاءً بأنواعها المختلفة. تشكل هذه المفاهيم الأساس الذي تُبنى عليه مفاهيم أكثر تقدماً في مجالات التحليل والجبر، مما يبرز الدور المحوري للتطبيقات كلغة أساسية في الرياضيات الحديثة.

1. المفاهيم الأولية (Preliminary Concepts)

تؤسس هذه الفقرة للمفاهيم الأولية للتطبيقات، حيث تقدم تعريفاً دقيقاً لماهية التطبيق ومكوناته الأساسية مثل مجموعة البدء، ومجموعة الوصول، وصورة العنصر، وسابقتها.

يُستخدم مفهوم التطبيق لربط كل عنصر من مجموعة ما بعنصر وحيد من مجموعة أخرى. هناك أمثلة عن تطبيقات من $\mathbb{R}$ في $\mathbb{R}$ ، ولكن لا ينبغي أن نقصر عليها؛ يمكن تعريف التطبيقات على جميع أنواع المجموعات.

تعريف 1 (تطبيق = map): لتكن E و F مجموعتين. نسمي تطبيقاً $f: E \rightarrow F$ (map) من E في F كل قانون (قاعدة) يرفق بكل عنصر x من E عنصراً وحيداً في F ، نرمز له بـ $f(x)$.
نكتب:

$$f: E \rightarrow F, x \mapsto f(x) \quad \text{أو} \quad f: \begin{matrix} E \rightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{matrix}$$

المصطلحات الأساسية:

- E تسمى مجموعة البدء (domain) و F مجموعة الوصول (codomain) للتطبيق f .
- $f(x)$ تسمى صورة العنصر x بالتطبيق f (Image of element x).
- إذا كان y عنصراً من F ، فإن أي عنصر x من E بحيث $y = f(x)$ (إذا وجد) يسمى سابقة لـ y بالتطبيق f (Preimage of y).

ملاحظة: (بيان التطبيق) يتم تعريف التطبيق في الواقع من خلال بيانه. البيان هو مجموعة جزئية من $E \times F$ معرفة بـ:

$$G = \{(x, y); x \in E \text{ and } y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in E\}.$$

أمثلة:

1. لتكن $E = \{1, 2, 3, 4\}$ و $F = \{a, b, c\}$. نعتبر البيانات التالية:

$$G_{f_1} = \{(1, a), (2, c), (3, a), (4, a)\},$$

$$G_{f_2} = \{(1, a), (2, c), (4, a)\},$$

$$G_{f_3} = \{(1, a), (2, c), (2, b), (3, a), (4, a)\}.$$

نلاحظ أن:

- f_1 تطبيق من E في F . صورة a لـ 1 و 3 و 4 بواسطة f_1 والعناصر 1 و 3 و 4 هي سوابق a بواسطة f_1 والعنصر b ليس له سوابق بواسطة f_1 .

- f_2 ليس تطبيقاً من E في F لأن العنصر 3 ليس له صورة.

- f_3 ليس تطبيقاً من E في F لأن للعنصر 2 صورتين.

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 2x - 5$ تطبيق.

3. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto |x|$ تطبيق.

4. نرمز بـ $\mathcal{M}_n$ إلى مجموعة المصفوفات المربعة ذات الرتبة n . يمكن أن نعتبر التطبيق الذي يرفق بكل مصفوفة محدّدها:

$$f: \mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R} \\ M \mapsto \det M$$

5. نرمز بـ $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ إلى مجموعة المتتاليات الحقيقية. يمكن أن نعتبر التطبيق الذي يرفق بكل متتالية حقيقية $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حدّها الأول u_0 :

$$f: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto u_0$$

ملاحظة: في بعض الأحيان، نرغب في النظر إلى تطبيقات غير معرفة في "كل مكان" (أي على كامل المجموعة)، على سبيل المثال التطبيق $x \mapsto \frac{1}{x}$ غير معرف على $\mathbb{R}$ كله ولكن فقط على $\mathbb{R}^*$ (لأنّ العنصر 0 ليس له

صورة). نتحدّث حينئذ عن دالة: الدالة على E هي تطبيق معرف على مجموعة جزئية من E . هذه المجموعة الجزئية تسمى ميدان تعريف الدالة.

بعد تحديد مفهوم التطبيق، من المهم تحديد متى يمكن اعتبار تطبيقين متطابقين.

تعريف 2 (تساوي تطبيقين، Equality): نقول عن تطبيقين $f: E \rightarrow F$ و $g: E' \rightarrow F'$ إنهما متساويان ونكتب $f = g$ إذا كان $E = E'$ و $F = F'$ و $\forall x \in E: f(x) = g(x)$.

أمثلة :

1. التطبيقان $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$ و $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$ غير متساويين (لأنه ليس لـ g نفس مجموعة البدء).

والتطبيقان $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin x$ و $g: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1], x \mapsto \sin x$ غير متساويين لأنه ليس لهما نفس مجموعة الوصول.

2. التطبيقان $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin^2 x + \cos^2 x$ و $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1$ متساويان لأنّ لهما نفس مجموعة البدء ونفس مجموعة الوصول و $\forall x \in \mathbb{R}: \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

3. التطبيقان $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto 2n + 3$ و $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ غير متساويين لأن $f(1) = 5 \neq 2 = g(1)$.

2. عمليات على التطبيقات

تستكشف هذه الفقرة كيفية تعديل مجموعة بدء تطبيق ما، إما عن طريق تقليصها (المقصور) أو توسيعها (التمديد)، مما يسمح بمرونة أكبر في التعامل مع التطبيقات.

تعريف 3 (مقصور تطبيق = Restriction): ليكن $f: E \rightarrow F$ تطبيقاً ولتكن E' مجموعة جزئية من E . التطبيق $g: E' \rightarrow F$ حيث: $\forall x \in E': g(x) = f(x)$ ، يسمى مقصور (أو اقتصار) التطبيق f على المجموعة E' ويرمز إليه بالرمز $f|_{E'}$.

أمثلة:

1. $f|_{\mathbb{R}^+}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto |x|$ هو التطبيق $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto |x|$ مقصوره على $\mathbb{R}^+$.

2. $f|_{\mathbb{N}}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$ هو $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$ مقصوره على $\mathbb{N}$.

تعريف 4 (تمديد تطبيق = Extension): ليكن $f: E \rightarrow F$ تطبيقاً ولتكن X مجموعة تحوي E . كل تطبيق $h: X \rightarrow F$ حيث: $\forall x \in E: h(x) = f(x)$ ، يسمى تمديداً (امتداداً) للتطبيق f إلى المجموعة X .

مثال: لنعتبر التطبيق $h: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3x^2 + 5x - 1$.

التطبيق $h_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3x^2 + 5x - 1$ تمديد للتطبيق h إلى المجموعة $\mathbb{R}$.

والتطبيق $h_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرف كالتالي:

$$h_2(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5x - 1, & \text{if } x \geq 0 \\ x^2, & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

هو أيضاً تمديد للتطبيق h إلى المجموعة $\mathbb{R}$.

ننتقل إلى عملية التركيب التي تسمح بإنشاء تطبيقات جديدة من خلال دمج عدة تطبيقات موجودة بشكل متسلسل.

تعريف 5 (تركيب التطبيقات = Composition of maps): لتكن E, F, G مجموعات. إذا كان $f: E \rightarrow F$ و $g: F \rightarrow G$ تطبيقين، فإن التطبيق $h: E \rightarrow G$ المعرف كما يلي:

$$\forall x \in E: h(x) = g[f(x)]$$

يسمى مُركَّب التطبيقات g و f ويرمز إليه بالرمز $g \circ f$.

أمثلة:

1. لتكن $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $F = \{a, b, c, d, e\}$ و $G = \{1, 2, 3, 4\}$. نعرف التطبيقين

$f: E \rightarrow F$ و $g: F \rightarrow G$ كما يلي:

$$\begin{aligned} f: E &\rightarrow F \\ \alpha &\mapsto b \\ \beta &\mapsto a \\ \gamma &\mapsto d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g: F &\rightarrow G \\ a &\mapsto 2 \\ b &\mapsto 1 \\ c &\mapsto 4 \\ d &\mapsto 3 \\ e &\mapsto 1 \end{aligned}$$

التطبيق $g \circ f: E \rightarrow G$ يعطي الارتباطات التالية:

$$\begin{aligned} \alpha &\mapsto g(f(\alpha)) = g(b) = 1 \\ \beta &\mapsto g(f(\beta)) = g(a) = 2 \\ \gamma &\mapsto g(f(\gamma)) = g(d) = 3 \end{aligned}$$

2. ليكن التطبيقين $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2 + 1$ و $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^-, x \mapsto -x^2$.
مركب g و f هو التطبيق:

$$g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^-$$

$$x \mapsto -(x^2 + 1)^2 = -x^4 - 2x^2 - 1$$

ملاحظات:

- التركيب $g \circ f$ لا يكون مُمكنًا إلا إذا كانت مجموعة وصول f جزءًا من مجموعة بدء g .
- حتى حينما يكون $f \circ g$ و $g \circ f$ معرفين جيدًا، فإنَّ $f \circ g \neq g \circ f$ عموماً، ما يعني أن التركيب عملية غير تبديلية.
- قضية 1 (تجميعية التركيب): لتكن $f: E \rightarrow F$ ، $g: F \rightarrow G$ و $h: G \rightarrow H$ ثلاثة تطبيقات. عندئذ لدينا:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

وهذا التطبيق يرمز له بـ $h \circ g \circ f$.

إثبات: لدينا بمقتضى تعريف مركب تطبيقين:

$$h \circ (g \circ f)(x) = h(g \circ f(x)) = h(g(f(x)))$$

$$(h \circ g) \circ f(x) = h \circ g(f(x)) = h(g(f(x)))$$

من أجل كل $x \in E$ ، ومنه المساواة المطلوبة.

3. الصورة المباشرة والصورة العكسية

تعرف هذه الفقرة مفهومي الصورة المباشرة والصورة العكسية، وتذكر خصائصهما تجاه العمليات على المجموعات.

تعريف 6: ليكن $f: E \rightarrow F$ تطبيقاً و $A \subset E$ و $B \subset F$.

- الصورة المباشرة (Direct Image): صورة A بواسطة f هي المجموعة المرموز لها بالرمز $f(A)$ والمعروفة بـ:

$$f(A) = \{f(x); x \in A\} = \{y \in F; \exists x \in A: f(x) = y\}.$$

- الصورة العكسية (Inverse Image): الصورة العكسية لـ B بواسطة f هي المجموعة المرموز لها بالرمز $f^{-1}(B)$ والمعرفة بـ:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E; f(x) \in B\}$$

أمثلة:

1. ليكن $E = \{1, 2, 3, 4\}$ و $F = \{a, b, c\}$. نعتبر التطبيق f المعرف بالبيان:

$$G_f = \{(1, a), (2, c), (3, a), (4, a)\}.$$

لدينا:

- $f(\{1, 2, 3\}) = \{a, c\}$ ، $f(\{1, 4\}) = \{a\}$ ، $f(\{1\}) = \{a\}$
 - $f^{-1}(\{a, c\}) = \{1, 2, 3, 4\} = E$ ، $f^{-1}(\{a\}) = \{1, 3, 4\}$
 - $f^{-1}(\{b, c\}) = \{2\} = f^{-1}(\{c\})$ ، $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ، $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$
2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$.

لدينا:

$$f(\mathbb{Z}) = \{f(x); x \in \mathbb{Z}\} = \{|x|; x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{N}.$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$$

لدينا:

$$g(\mathbb{Z}) = \{x + 1; x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$$

$$g^{-1}(\mathbb{N}^*) = \{x \in \mathbb{R}; x + 1 \in \mathbb{N}^*\} = \mathbb{N}.$$

4. ليكن التطبيق $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3x$

$$\begin{aligned} f^{-1}(\mathbb{Z}) &= \{x \in \mathbb{R}; 3x \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{Z}: y = 3x\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{Z}: x = \frac{y}{3}\right\} = \{y/3; y \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

5. ليكن التطبيق $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto 2|x| + 1$ وليكن $A = \{-1, -2, 2, 4, 5\}$ جزء من $\mathbb{Z}$ و $B = \{3, 4, 5, 7, 8\}$ جزء من $\mathbb{N}$. لدينا:

$$f(A) = \{f(x); x \in A\} = \{3, 5, 9, 11\}.$$

$$\begin{aligned}
f^{-1}(B) &= \{x \in \mathbb{Z}; f(x) \in B\} \\
&= \{x \in \mathbb{Z}; f(x) = 3 \text{ or } f(x) = 4 \text{ or } f(x) = 5 \text{ or } f(x) = 7 \text{ or } f(x) = 8\} \\
&= \{-1, 1, -2, 2, -3, 3\}.
\end{aligned}$$

6. ليكن التطبيق $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$

$f^{-1}([-1, 1]) = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \in [-1, 1]\} = \{x \in \mathbb{R}; -1 \leq x^2 \leq 1\} = [-1, 1]$
تنبيه: الرمز $f^{-1}(B)$ قد يكون مضللاً، إذ قد يوحي بأننا نفترض أن f تطبيق تقابلي وأننا نستخدم التطبيق العكسي لـ f . بالطبع، هذا ليس هو الحال، والصورة العكسية لمجموعة جزئية من F بواسطة f معرفة جيداً، سواء كان f تقابلياً أم لا. وبالطبع إذا كان $f: E \rightarrow F$ تطبيقاً تقابلياً فإن:

$$\forall B \subset F: f^{-1}(B) = (f^{-1})(B)$$

أي الصورة العكسية لـ B بواسطة f هي الصورة المباشرة لـ B بواسطة التطبيق العكسي f^{-1} .

قضية 2 (خواص الصور): ليكن $f: E \rightarrow F$ تطبيقاً و A_1, A_2 مجموعتين جزئيتين من E و B_1, B_2 مجموعتين جزئيتين من F . لدينا الخواص التالية:

- (i) $A_1 \subset A_2 \Rightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$
- (ii) $B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$
- (iii) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$
- (iv) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- (v) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
- (vi) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

ملاحظة: الاحتواء الوارد في البند (iii) ليس مساواة في الحالة العامة، كما يتبين من خلال المثال المضاد:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

لدينا: $f([0, 1]) = [0, 1]$ و $f([-1, 0]) = [0, 1]$ ، ومنه

$$f([0, 1]) \cap f([-1, 0]) = [0, 1]$$

في حين أن

$$f([0, 1] \cap [-1, 0]) = f(\{0\}) = \{0\}.$$

4. أنواع التطبيقات (Types of Maps)

تُصنّف التطبيقات إلى ثلاثة أنواع رئيسية: الغمر (surjection)، والتباين (injection)، والتقابل (bijection) بناءً على سلوكها في الربط بين العناصر. هذه التصنيفات أساسية لفهم بنية التطبيقات وخصائصها.

تعريف 7 (الغمر = Surjection): نقول إنَّ التطبيق $f: E \rightarrow F$ غامر إذا كان لكل عنصر من مجموعة الوصول F سابقة على الأقل في E ، أي:

$$\forall y \in F, \exists x \in E: y = f(x)$$

بعبارة أخرى، f غامر إذا كان $f(E) = F$.

تعريف 8 (التباين = Injection): نقول إنَّ التطبيق $f: E \rightarrow F$ متباين إذا كان لكل عنصر من مجموعة الوصول F سابقة على الأكثر في E ، أي:

$$\forall x, x' \in E: x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

أو بصيغة مكافئة:

$$\forall x, x' \in E: f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

تعريف 9 (التقابل = Bijection): نقول إنَّ التطبيق $f: E \rightarrow F$ تقابل إذا كان متبايناً وغامراً في آن واحد، أي إذا كان لكل عنصر من F سابقة وحيدة في E :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E: y = f(x).$$

التطبيق العكسي (Application réciproque - Reciprocal map)

نختم هذا القسم بمفهوم **التطبيق العكسي**، الذي يعكس عملية الربط التي يقوم بها تطبيق تقابلي، حيث يعيد كل عنصر في مجموعة الوصول إلى سابقته الوحيدة في مجموعة البدء.

تعريف 10 (التطبيق العكسي = Reciprocal map): ليكن $f: E \rightarrow F$ تطبيقاً تقابلياً. يضمن f أن لكل عنصر y في F سابقة وحيدة x في E ، مما يسمح بتعريف تطبيق يربط كل y بسابقته الوحيدة. نسمي هذا التطبيق: التطبيق العكسي للتقابل f ونرمز له بالرمز $f^{-1}: F \rightarrow E$. لدينا:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

أمثلة:

1. لتكن E مجموعة و A جزء من E .

• التطبيق $f: E \rightarrow E$ المعروف بـ $f(x) = x$ تقابلي، يسمى التطبيق المطابق على المجموعة E (The identity map on E) ويرمز له بالرمز id_E وتطبيقه العكسي هو نفسه.

• التطبيق $i: A \rightarrow E$ المعروف بـ $i(x) = x$ متباين، ويسمى التباين القانوني (Canonical injection) أو الانغماس القانوني لـ A في E (Canonical inclusion of A into E).

2. التطبيق $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n + 1$ تقابلي وتطبيقه العكسي هو التطبيق:

$$f^{-1}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n - 1.$$

3. التطبيق $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1$ متباين ولكنه غير غامر.

بالفعل، إذا كان $f(n) = f(m)$ فإن $n + 1 = m + 1$ ومنه $n = m$. بالمقابل، 0 ليس له سابقة بواسطة f لأن: $\forall n \in \mathbb{N}: f(n) \geq 1$.

4. التطبيق $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*, n \mapsto n + 1$ تقابلي وتطبيقه العكسي هو التطبيق:

$$f^{-1}: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n - 1.$$

ملاحظة: يتبين من الأمثلة أعلاه، أن كون التطبيق متبايناً أو غامراً من عدمه يرتبط ارتباطاً وثيقاً باختيار مجموعتي البدء والوصول.

كما يمكن دائماً "جعل" التطبيق غامراً بتقليص مجموعة الوصول.

مثال مفصل: التطبيق $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow]0, 1], x \mapsto \frac{1}{1+x}$ تقابلي.

بالفعل، من جهة من أجل كل $x \in \mathbb{R}^+$ لدينا: $0 < 1/(1+x) \leq 1$ ، ما يبين أن f تطبيق من $\mathbb{R}^+$ في $]0, 1]$.

من جهة أخرى، ليكن $y \in]0, 1]$ لدينا:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow y(1+x) = 1 \Leftrightarrow y + yx = 1$$

$$\Leftrightarrow yx = 1 - y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{y}$$

مع ملاحظة أن $\frac{1-y}{y} \in \mathbb{R}^+$ إذا كان $y \in]0, 1]$.

إذاً من أجل كل $y \in]0, 1]$ ، المعادلة $y = f(x)$ تقبل حلاً وحيداً في $\mathbb{R}^+$ هو $x = \frac{1-y}{y}$ ، وعليه فإن f تطبيق تقابلي وتطبيقه العكسي هو:

$$f^{-1}:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto \frac{1-x}{x}.$$

أمثلة أخرى للتطبيقات العكسية :

$$\arcsin = (\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]})^{-1} \quad \bullet$$

$$\arccos = (\cos|_{[0, \pi]})^{-1} \quad \bullet$$

$$\arctan = (\tan|_{]-\pi/2, \pi/2[})^{-1} \quad \bullet$$

قضية 3: إذا كان $f: E \rightarrow F$ تطبيقاً تقابلياً، فإن $f^{-1}: F \rightarrow E$ تطبيق تقابلي.

قضية 4 (تميز التطبيقات التقابلية): يكون التطبيق $f: E \rightarrow F$ تقابلياً إذا وفقط إذا وجد تطبيق $g: F \rightarrow E$ بحيث

$$f \circ g = \text{id}_F \quad \text{و} \quad g \circ f = \text{id}_E$$

حيث يرمز id_F و id_E للتطبيق المطابق في المجموعة E و F على التوالي، وحينئذ $g = f^{-1}$.

قضية 5: ليكن $f: E \rightarrow F$ و $g: F \rightarrow G$ تطبيقين.

• إذا كان f و g متباينين فإن المركب $g \circ f$ تطبيق متباين.

• إذا كان f و g غامرين فإن المركب $g \circ f$ تطبيق غامر.

• إذا كان f و g تقابليين فإن المركب $g \circ f$ تطبيق تقابلي، ولدينا: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

إثبات (جزئي): لدينا:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_G$$

وبالمثل لدينا:

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \text{id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_E$$

وهو ما ينهي الإثبات بالاستناد إلى القضية 4.

5. المجموعات القابلة للعدّ (Countable sets / Ensembles dénombrables)

تعريف 11 (مجموعة قابلة للعدّ = Countable set): نقول عن مجموعة X إنها قابلة للعدّ إذا وُجد تطبيق

متباين $\varphi: X \rightarrow \mathbb{N}$ ، أي إذا أمكن "سرد" أو "ترقيم" جميع عناصر المجموعة X في قائمة متتابعة (منتهية

أو غير منتهية) دون تكرار ودون إغفال أي عنصر:

$$X = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$$

حيث $x_n \neq x_p$ إذا كان $n \neq p$.

وفقاً لهذا التعريف:

- المجموعة المنتهية قابلة للعدّ، لأنها في تقابل مع جزء منتهٍ $\{0, 1, \dots, n-1\}$ من $\mathbb{N}$.
- تكون المجموعة غير المنتهية قابلة للعدّ إذا وفقط إذا كانت في تقابل مع $\mathbb{N}$. بالفعل، عندما تكون لدينا مجموعة X لانهائية وقابلة للعد، فإن شرط القابلية للعد يسمح لنا بإرسال عناصرها إلى أرقام في $\mathbb{N}$ بواسطة التطبيق المتباين. وبما أن عناصر X غير منتهية، يمكننا ترتيب هذه العناصر حسب الترتيب الطبيعي لصورها من الأصغر إلى الأكبر ($a_0 < a_1 < a_2 \dots$). هذا الترتيب الطبيعي يتيح لنا إعادة تسمية العنصر الأول بـ 0، والثاني بـ 1، والثالث بـ 2، وهكذا إلى ما لا نهاية، مما يُنتج التقابل التام مع $\mathbb{N}$.

أمثلة: إليك بعض الأمثلة عن مجموعات قابلة للعدّ:

- $\mathbb{N}$ قابلة للعدّ بفضل التطبيق المطابق $\text{id}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n$.
- $\mathbb{N}^*$ قابلة للعدّ بفضل الانغماس القانوني $\varphi: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ المعرّف بـ $\varphi(n) = n$.
- المجموعة $-\mathbb{N}$ قابلة للعدّ بفضل التباين $\varphi: -\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ المعرّف بـ $\varphi(n) = -n$.
- مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية، ويُرمز لها بـ $2\mathbb{N}$ ، قابلة للعدّ بفضل الانغماس القانوني $\varphi: 2\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.
- مجموعة الأعداد الطبيعية الفردية، ويُرمز لها بـ $2\mathbb{N} + 1$ ، قابلة للعدّ بفضل الانغماس القانوني $\varphi: 2\mathbb{N} + 1 \rightarrow \mathbb{N}$.

ملاحظات:

1. كل جزء من مجموعة قابلة للعدّ هو قابل للعدّ.
2. اتحاد قابل للعدّ لمجموعات قابلة للعدّ هو قابل للعدّ.
3. المجموعة $\mathbb{Z}$ قابلة للعدّ باعتبارها اتحاداً لمجموعتين قابلتين للعدّ: $\mathbb{N}$ و $-\mathbb{N}$.
4. الجداء المنتهي لمجموعات قابلة للعدّ هو مجموعة قابلة للعدّ. على سبيل المثال، المجموعة $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ قابلة للعدّ.

قضية 6: تكون مجموعة X قابلة للعد إذا وُجد تطبيق غامر $\psi: \mathbb{N} \rightarrow X$.

البرهان: لنفرض أن X مجموعة لانهائية، وإلا فإن البرهان منتهٍ. حسب الفرض، يوجد تطبيق غامر $\psi: \mathbb{N} \rightarrow X$. من أجل كل $x \in X$ ، نعرّف

$$\varphi(x) = \min\{y \in \mathbb{N} : \psi(y) = x\}$$

نتحقق من أن $\varphi: X \rightarrow \mathbb{N}$ تطبيق متباين، ونستنتج أن X مجموعة قابلة للعد.

مثال: (قابلية المجموعة $\mathbb{Q}$ للعد)

المجموعة $\mathbb{Q}$ قابلة للعد. بالفعل، لنعتبر التطبيق :

$$f: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q} \\ (p, q) \mapsto \frac{p}{q+1}$$

هذا التطبيق غامر، وبتركيبه مع تقابل من $\mathbb{N}$ على المجموعة اللانهائية والقابلة للعد $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ نحصل على تطبيق غامر من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{Q}$.

توجد مجموعات غير قابلة للعد. أبسط مثال على ذلك هو مجموعة أجزاء $\mathbb{N}$ ، والتي يُرمز لها بـ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. ويمكن إثبات المبرهنة التالية:

مبرهنة 1: المجال $[0,1]$ غير قابل للعد.

ملاحظة: أي مجموعة تحوي مجموعة غير قابلة للعد هي بدورها غير قابلة للعد.

نستنتج مما سبق أن:

- $\mathbb{R}$ غير قابلة للعد (وإلا لكانت $[0,1]$ قابلة للعد). نقول إن $\mathbb{R}$ تملك قوة المستمر (Cardinality of the continuum).

- مجموعة الأعداد الحقيقية غير الناطقة (الصمّاء)، $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ، غير قابلة للعد. والدليل على ذلك: لو لم يكن الأمر كذلك، لكانت $\mathbb{R} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}$ قابلة للعد (باعتبارها اتحادًا لمجموعتين قابلتين للعد)، وهذا يناقض ما سبق.

- كل مجال من الشكل $[a, b]$ حيث $a < b$ هو مجموعة غير قابلة للعد، وذلك بفضل التقابل $\varphi: [0,1] \rightarrow [a, b]$ المعرّف بـ

$$\varphi(x) = (b - a)x + a$$