

مراجعات وتمتات

القسم الأول: مفاهيم أساسية في نظرية المجموعات

مقدمة: أهمية نظرية المجموعات

تُعَدُّ نظرية المجموعات (Set theory) حجر الزاوية الذي بُنيت عليه العديد من فروع الرياضيات الحديثة. فهي تقدم اللغة والمفاهيم الأساسية اللازمة لوصف البنى الرياضية المجردة بدقة ووضوح. تبرز أهمية هذه النظرية بشكل خاص في مجالات مثل الطوبولوجيا (Topology)، حيث تشكل المفاهيم الأساسية للمجموعات نقطة الانطلاق لدراسة الخواص الهيكلية للفضاءات. يهدف هذا القسم إلى استعراض المفاهيم الأساسية في نظرية المجموعات، ليكون بمثابة مدخل منظم وواضح لمقرر "مدخل إلى الطوبولوجيا". لنبدأ باللبنة الأساسية الأولى، وهي تعريف المجموعة نفسها.

1. تعريف المجموعة وعناصرها

إن المفهوم الأساسي لأي بنية رياضية يبدأ بتعريف وحداتها الأولية. في هذا السياق، تُمثِّل "المجموعة" هذه الوحدة الأساسية. التعريف الذي قدمه جورج كانتور، مؤسس نظرية المجموعات، لا يزال هو المرجع الأكثر شيوعاً وبساطة.

مفهوم كانتور للمجموعة: المجموعة (set) هي تجمع (collection) من الأشياء المعروفة تعريفاً تاماً. ونعني بعبارة "معرفة تعريفاً تاماً" أننا نستطيع أن نحدد من أجل كل شيء هل هو موجود في المجموعة أم لا.

الأشياء التي تتكوّن منها المجموعة تسمّى عناصر المجموعة (elements of the set).

لتنظيم التعامل مع المجموعات وعناصرها، نستخدم الترميزات التالية:

- المجموعات: يُرمز لها عادةً بحروف لاتينية كبيرة (capital letters) مثل: $A, B, C, \dots, X, Y$
- العناصر: يُرمز لها عادةً بحروف لاتينية صغيرة (small letters) مثل: $a, b, c, \dots, x, y$

على سبيل المثال، نكتب $X = \{a, b, c, d\}$ لنعني أنّ المجموعة X تتكون حصراً من أربعة عناصر هي: a, b, c, d .

للتعبير عن علاقة عنصر بمجموعة ما، نستخدم مفهوم الانتماء (membership).

- $x \in X$: يُقرأ " x ينتمي إلى X " (x belongs to X) ويعني أن x هو أحد عناصر المجموعة X .
- $y \notin X$: يُقرأ " y ليس عنصراً في المجموعة X " أو " y لا ينتمي إلى المجموعة X ".

بعد تعريف المجموعة بشكلها العام، من الضروري التطرق إلى حالة خاصة ومهمة جداً، وهي المجموعة التي لا تحتوي على أي عناصر.

2. المجموعة الخالية (The Empty Set)

في الرياضيات، يكتسب مفهوم "اللاشيء" أو الفراغ أهمية قصوى. فالمجموعة الخالية ليست مجرد فكرة نظرية، بل هي حالة أساسية ضرورية للعديد من البراهين والتعريفات، وتضمن اكتمال البنية الجبرية للمجموعات.

تعريف 1 (المجموعة الخالية): المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر، ويرمز لها بأحد الرمز $\emptyset$ أو $\{\}$.

تمرين 1:

- كم عنصراً تحوي هذه المجموعة: $\{\emptyset\}$ ؟
- أي العلاقات التالية صحيح؟

1. $\emptyset \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
2. $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
3. $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$

ننتقل إلى تصنيف المجموعات بناءً على عدد عناصرها.

3. المجموعات المنتهية وغير المنتهية (Finite and Infinite Sets)

يُعد تصنيف المجموعات إلى منتهية وغير منتهية أحد أهم التصنيفات الأولية، حيث يحدد طبيعة العمليات التي يمكن إجراؤها عليها والخصائص التي تتمتع بها.

تعريف 2: نقول إن المجموعة A مجموعة منتهية إذا كانت خالية أو كانت تحتوي على عدد منتهٍ من العناصر. وعلى النقيض، تكون المجموعة غير منتهية إذا كانت تشتمل على عددٍ لا نهائي من العناصر.

ضمن هذا التصنيف، توجد حالة خاصة بسيطة ومهمة: المجموعة الأحادية (Singleton) هي المجموعة التي تشتمل على عنصر واحد فقط.

تمرين 2: كم عنصراً تحوي المجموعات التالية؟

- $\{\{\emptyset\}\}$
- $\{1, 2, \{1, 2\}\}$
- $\{\{2\}\}$
- $\{1, \{1\}\}$
- $\{1, \emptyset\}$
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\{a, 3a - 1\}$ حيث $a \in \mathbb{R}$.

لفهم المجموعات غير المنتهية بشكل أفضل، نستعرض بعض الأمثلة الشائعة التي تشكل أساس العديد من فروع الرياضيات.

4. مجموعات الأعداد الشائعة

هناك مجموعات عددية أساسية تظهر بشكل متكرر في جميع فروع الرياضيات. فهم هذه المجموعات ورموزها ضروري لأي دراسة رياضية متقدمة. فيما يلي أهمها:

1. مجموعة الأعداد الطبيعية (Natural Numbers) :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \quad \circ$$

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \circ \text{ (مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة)}$$

2. مجموعة الأعداد الصحيحة (Integer Numbers) :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \circ$$

3. مجموعة الأعداد الناطقة (Rational Numbers) :

$$\mathbb{Q} = \{a/b; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\} \quad \circ$$

4. مجموعة الأعداد الحقيقية (Real Numbers) :

$$\circ \text{ تتكوّن من الأعداد الناطقة والأعداد الصّماء، ويُرمز لها بالرمز } \mathbb{R}.$$

5. مجموعة الأعداد المركّبة (Complex Numbers) :

$$\mathbb{C} = \{a + ib; a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\} \quad \circ$$

بعد تعريف المجموعات وتصنيفها، تصبح الخطوة المنطقية التالية هي فهم العلاقات التي يمكن أن تربط بينها.

5. المجموعة الشاملة (Universal Set)

في العديد من السياقات الرياضية، يتم تحديد "مجموعة مرجعية" تحتوي على جميع المجموعات قيد الدراسة. هذه المجموعة تسمى المجموعة الشاملة.

إن اختيار المجموعة الشاملة يعتمد على سياق المسألة، وهو يخدم غرض تحديد حدود الدراسة ومنع المفارقات المنطقية، بالإضافة إلى ضمان أن تكون بعض العمليات، مثل المتممة، معرفة تعريفاً جيداً.

فمثلاً عند دراسة مجموعات من الأعداد الصحيحة، فإنه من المناسب اعتبار المجموعة $\mathbb{Z}$ هي المجموعة الشاملة في هذه الحالة.

6. العلاقات بين المجموعات: الاحتواء والتساوي

إن فهم العلاقات الهيكلية بين المجموعات، مثل احتواء مجموعة داخل أخرى أو تساوي مجموعتين، يمثل لبنة أساسية لدراسة العمليات الأكثر تعقيداً وبناء البراهين الرياضية.

1.6. المجموعات الجزئية (Subsets)

تعريف 3 (المجموعات الجزئية): نقول إن المجموعة A مجموعة جزئية (subset of) أو جزء من (part of) المجموعة B إذا كان كل عنصر من عناصر A ينتمي إلى المجموعة B .

يُرمز لهذه العلاقة بـ $A \subset B$ وتُقرأ: " A مجموعة جزئية من B " (A is a subset of B) أو " A محتواة في B " (A is contained in B) أو " B تحتوي A " (A contains B).

التعبير الرياضي المنطقي المكافئ لهذه العلاقة هو:

$$(\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B) \Leftrightarrow A \subset B.$$

يمثل هذا التكافؤ المنطقي الأساس المنهجي لإثبات أن مجموعة ما هي مجموعة جزئية من أخرى؛ حيث نفترض أن عنصراً اختيارياً x ينتمي إلى A ، ثم نبهرن بالخطوات المنطقية أنه ينتمي بالضرورة إلى B .

خواص الاحتواء:

(i) الانعكاس: كل مجموعة A هي مجموعة جزئية من نفسها: $A \subset A$.

(ii) التعدي: إذا كانت A, B, C مجموعات حيث $A \subset B$ و $B \subset C$ ، فإن $A \subset C$.

(iii) المجموعة الخالية $\emptyset$ هي مجموعة جزئية من أي مجموعة.

ملاحظة:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

2.6. مجموعة الأجزاء (Power Set)

تعريف 4 (مجموعة أجزاء مجموعة): لتكن X مجموعة. نسمي مجموعة أجزاء المجموعة X ، ونرمز لها بالرمز $\mathcal{P}(X)$ ، المجموعة التي عناصرها هي جميع المجموعات الجزئية من X .

بالترميز الرياضي: $\mathcal{P}(X) = \{A; A \subset X\}$.

3.6. تساوي المجموعات (Equality of Sets)

تعريف 5 (تساوي المجموعات): نقول إن المجموعتين A و B متساويتان ($A = B$) إذا كانتا تحتويان على نفس العناصر تماماً.

هذا الشرط يكافئ أن يكون كل عنصر من A ينتمي إلى B ، وفي نفس الوقت كل عنصر من B ينتمي إلى A .

التعبير المنطقي المكافئ للتساوي هو:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ and } B \subset A).$$

تُعرف هذه الطريقة بالبرهان بالاحتواء المزدوج (proof by double inclusion) وهي التقنية القياسية لإثبات تساوي مجموعتين.

بعد استعراض العلاقات بين المجموعات، ننتقل الآن إلى العمليات التي يمكن إجراؤها عليها لتكوين مجموعات جديدة.

7. العمليات على المجموعات

تماماً كما يمكننا إجراء عمليات الجمع والضرب على الأعداد، يمكننا إجراء عمليات مثل الاتحاد والتقاطع على المجموعات. هذه العمليات لها خصائص جبرية محددة تشكل أساس "جبر المجموعات".

1.7. الاتحاد (Union)

تعريف 6 (الاتحاد): يُعرّف اتحاد المجموعتين A و B على أنه المجموعة المكونة من جميع العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A أو تنتمي إلى المجموعة B .

يُرمز للاتحاد بالرمز $A \cup B$ ويُعرّف رياضياً كالتالي:

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ or } x \in B\}$$

إذاً

$$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ and } x \notin B.$$

2.7. التقاطع (Intersection)

تعريف 7 (التقاطع): تقاطع المجموعتين A و B هو المجموعة المكونة من العناصر المشتركة بين A و B ، أي العناصر التي تنتمي إلى A و B في نفس الوقت.

يُرمز للتقاطع بالرمز $A \cap B$ ويُعرّف رياضياً كالتالي:

$$A \cap B = \{x; x \in A \text{ and } x \in B\}$$

إذاً

$$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \text{ or } x \notin B.$$

تعميم: يمكن تعميم تعريف التقاطع والاتحاد لجماعة كيفية $(A_i)_{i \in I}$ من المجموعات A_i على النحو الآتي:

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x; x \in A_i \text{ for every } i \in I\}$$
$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x; x \in A_i \text{ for some } i \in I\}$$

3.7. المجموعات المنفصلة (Disjoint Sets)

تعريف 8 (المجموعتان المنفصلتان): نقول إن المجموعتين A و B منفصلتان إذا لم يكن بينهما أي عناصر مشتركة، أي أن تقاطعهما هو المجموعة الخالية: $A \cap B = \emptyset$.

4.7. مبرهنة 1 (خصائص الاتحاد والتقاطع): تتمتع عمليتا الاتحاد والتقاطع بالخصائص الأساسية التالية:

- | | | | |
|--------|--|--|---------|
| (i) | $A \cup \emptyset = A$ | $A \cap \emptyset = \emptyset$ | |
| (ii) | $A \subset A \cup B$ | $B \subset A \cup B$ | |
| (iii) | $A \cap B \subset A$ | $A \cap B \subset B$ | |
| (iv) | $A \cup A = A$ | $A \cap A = A$ | |
| (v) | $A \cup B = B \cup A$ | $A \cap B = B \cap A$ | التبديل |
| (vi) | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ | التجميع |
| (vii) | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | التوزيع |
| (viii) | $A \cup \left(\bigcap_{i \in I} B_i \right) = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i)$ | $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$ | التوزيع |

5.7. الفرق والمتممة (Difference and Complement)

تعريف 9 (الفرق بين مجموعتين): الفرق (difference) بين المجموعتين A و B ، ويرمز له بالرمز $A \setminus B$ ، هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B .

$$A \setminus B = \{x; x \in A \text{ and } x \notin B\} \quad \text{بالترميز الرياضي:}$$

ملاحظة: بشكل عام، $A \setminus B \neq B \setminus A$ وهو ما يعني أن عملية الفرق ليست تبديلية، على عكس عمليتي الاتحاد والتقاطع. فمثلاً، مجموعة الأعداد الصحيحة بعد استثناء الأعداد الزوجية منها تختلف كلياً عن مجموعة الأعداد الزوجية بعد استثناء الأعداد الصحيحة منها.

تعريف 10 (متممة مجموعة): لتكن E المجموعة الشاملة. متممة المجموعة A (complement of the set) ويرمز لها A^c أو CA بالنسبة للمجموعة الشاملة E هي مجموعة كل العناصر الموجودة في E والتي لا تنتمي إلى A .

$$A^c = \{x; x \in E; x \notin A\} = E \setminus A \quad \text{بالترميز الرياضي:}$$

مبرهنة 2 (خصائص المتممة): من أجل كل مجموعتين A و B من المجموعة الشاملة E ، الآتي صحيح:

- | | | |
|------|-------------------|-------------------|
| (i) | $\emptyset^c = E$ | $E^c = \emptyset$ |
| (ii) | $(A^c)^c = A$ | |

- (iii) $A \cap A^c = \emptyset$ $A \cup A^c = E$
 (iv) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ De Morgan's laws
 (v) $A \setminus B = A \cap B^c$

6.7. الجداء الديكارتي (Cartesian Product)

تعريف 11: الجداء الديكارتي للمجموعتين A و B ، ويرمز له بالرمز $A \times B$ ، هو مجموعة كل الأزواج المرتبة (ordered pairs) (a, b) حيث $a \in A$ و $b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b); a \in A \text{ and } b \in B\} \quad \text{بالترميز الرياضي:}$$

في الحالة الخاصة التي يكون فيها $A = B$ ، فإننا نعرف الجداء الديكارتي للمجموعة A في نفسها كما يلي:

$$A^2 = A \times A = \{(a, b); a, b \in A\}.$$

يمكن تعميم تعريف الجداء الديكارتي للمجموعات $A_1, A_2, \dots, A_n$ على النحو الآتي:

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n); a_i \in A_i\}$$

ويمكن تعميمه أيضاً لمتتالية غير منتهية من المجموعات:

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \{(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots); a_i \in A_i\}$$

مبرهنة 3 (خصائص الجداء الديكارتي):

إذا كانت $A, B, C, A_1, A_2, B_1, B_2$ مجموعات، فإن:

- (i) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
 (ii) $A \times B \neq B \times A$ (إذا كانت $A \neq B$ و $B \neq \emptyset$)
 (iii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
 (iv) $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$

إن هذه المفاهيم والتعاريف والعمليات الأساسية تشكل الإطار البديهي الذي تُبنى عليه الهياكل والنظريات الأكثر تقدماً في نظرية المجموعات وفروع الرياضيات الأخرى.