01 تصحيح إمتحان في مادة المعادلات التفاضلية يوم:

حل التمرين 01: [5 نقاط]

1) البرهان أن $(y, J=]-\infty,1[)$ المعرف كما يلي $y(t)=\frac{1}{1-t}$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y'=y^2$ الذي يحقق: $y(0)=1$.

نضع: $f(t,y)=y^2$ (0,25)

$I\times\Omega=\mathbb{R}^2$. (0,25)

* لدينا: $(t,y(t))\in\mathbb{R}, \forall t\in J$ (0,1)

و $y(0)=1$ (0,5)

إذن يكفي أن نبرهن أن

* $y'(t)=f(t,y(t)), \forall t\in J$

لدينا: $t\in J$

$y'(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right)=\frac{1}{(1-t)^2}=y^2(t)$ (0,5)

ومنه (y,J) هو حل للمعادلة التفاضلية $y'=y^2$ الذي يحقق $y(0)=1$.

2) هل (y,J) حل أعظمي. (0,1)

لدينا $\lim_{t\to 1^-} y(t)=\lim_{t\to 1^-}\frac{1}{1-t}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

ومنه النهاية غير موجودة ومنه (0,1) (y,J) هو حل أعظمي للمعادلة $y'=y^2$ الذي يحقق: $y(0)=1$،

3) هل (y,J) حل كلي:

لدينا $J=]-\infty,1[\neq\mathbb{R}=I$ (0,25)

إذن (y,J) ليس حل كلي (0,1)

4) العنصر الذي يحدث الفرق بين الحل و الحل المحلي والحل الأعظمي والحل كلي هو مجموعة التعريف J للحل y. (0,1)

إذا كان J مجال كيفي فهو حل. (0,1)

إذا كان $J\subset \mathcal{V}(t_0)$، (y,J) حل محلي لمسألة كوشي. (0,1)

(0,1) إذا كان $J=J_{max}$، (y,J_{max}) حل أعظمي.

إذا كان $J=I$، (y,I) حل كلي. (0,1)

حل التمرين 02: 07 نقاط.

لنعتبر المعادلة التفاضلية (1) التالية

$$y'(t)=|y|\ln(1+t^2) \quad (1)$$

1) ليكن $(t_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ دراسة وجود ووحدانية الحل الأعظمي $(y,J=]\alpha,\beta[)$ للمعادلة (1) التي تحقق: $y(t_0)=y_0$.

نضع: $f(t,y)=|y|\ln(1+t^2)$ (0,25)

ولدينا $I\times\Omega=\mathbb{R}^2$ (0,25)

الدالة $t\mapsto 1+t^2$ مستمرة على $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}_+$ و $s\mapsto \ln s$ مستمرة على $\mathbb{R}_+$. إذن تركيب $t\mapsto\ln(1+t^2)$ مستمرة على $\mathbb{R}$. و $y\mapsto|y|$ مستمرة على $\mathbb{R}$

إذن $f(t,y)$ دالة مستمرة على $\mathbb{R}^2$ (0,1)

بنفس الطريقة يمكننا أن نبرهن أن $f(t,y)$ ليست من صنف C^1 على $\mathbb{R}^2$ (0,5)

ومنه $f(t,y)$ لبشيتزية محليا بالنسبة لـ y بانتظام بالنسبة لـ t على $\mathbb{R}$ (0,1)

حسب نظرية كوشي-ليبشيتز ومنه مسألة كوشي $(t_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ معادلة تفاضلية رقم (1) تقبل حل أعظمي وحيد يحقق $y(t_0)=y_0$. (0,1)

2) إثبات أن y متزايدة ~~تماما~~ على $J=]\alpha,\beta[$

لنبرهن؟ $\forall t\in J,\ y'(t)=|y|\ln(1+t^2)\geq 0$ ؟

$\forall t\in J,\ t^2\geq 0 \Rightarrow 1+t^2\geq 1$

$\ln(1+t^2)\geq \ln 1=0$.

0,5 $\boxed{\ln(1+t^2)\geq 0,\ \forall t\in J}$ (*)

ومن جهة أخرى لدينا

$\Rightarrow \boxed{|y(t)|\geq 0,\ \forall t\in J}$ (**) 0,5

إذن من (*)، (**) لدينا

$\boxed{y'(t)=|y(t)|\ln(1+t^2)\geq 0,\ \forall t\in J}$

ومنه y متزايدة على J.

3) إيجاد الحل الأعظمي للمعادلة (1) الذي يحقق: $\exists \tau\in\mathbb{R};\ \varphi(\tau)=0$ (1)

نلاحظ أن الدالة المعدومة على $\mathbb{R}$ هي حل للمعادلة (1) التي ينعدم من أجل 0,1 $\tau\in\mathbb{R}$ إذن حسب وحدانية الحل 0,25 الأعظمي! إذن φ هي دالة معدومة على $\mathbb{R}$. 0,25

4) البرهان أن الحل الأعظمي (ϕ, J) للمعادلة (1) الذي يحقق $\phi(0)=1$ هي دالة موجبة تماما على J؟ (1)

بما أن $0\neq\phi(0)=1$ إذن حسب نظرية وحدانية الحل الأعظمي نمنحنى 0,5 الدالة ϕ لا ينعدم (لا يتقاطع مع منحنى الدالة معدومة)

ومنه فهو لا يغير إشارته على J.

وبما أن $\phi(0)=1>0$ إذن ϕ هي دالة موجبة تماما على J. 0,5

5) البرهان أن الحل الأعظمي (ϕ, J) للمعادلة (1) دالة فردية على J مع إيجاد J؟.. (1)

$z: -J\longrightarrow\mathbb{R}$

$t\longmapsto z(t)=-y(-t)$ 0,25

لنبرهن أن $(z,-J)$ حل للمعادلة (1) الذي يحقق $y(0)=0$:

(1) $(t,z(t))\in\mathbb{R}^2,\ \forall t\in -J$. 0,25

(2) $0\in J\Rightarrow 0\in -J$

$z(0)=-y(-0)=-y(0)=0,\ z(0)=0$. 0,25

(3) $z'(t)=f(t,z(t)),\ \forall t\in -J$ ؟

$z'(t)=\frac{d}{dt}[-y(-t)]=(-1)(-1)y'(-t)=y'(-t)$.

$=f(-t,y(-t))=f(-t,-z(t))$

$=|-z(t)|\ln(1+(-t)^2)$ 0,25

$=|z(t)|\ln(1+t^2)=f(t,z(t))$

ومنه $(z,-J)$ حل للمعادلة (1) الذي يحقق $z(0)=0$ ولكن (y,J) حل أعظمي ومنه فهو تمديد لـ 0,25 $(z,-J)$ أي:

$-J\subset J \Leftrightarrow]-\beta,-\alpha[\subset]\alpha,\beta[$

ومنه:

$\begin{cases}\alpha\leq-\beta\\ -\alpha\leq\beta\Rightarrow\alpha\geq-\beta\end{cases}\Rightarrow \boxed{\alpha=-\beta}$

إذن: $\boxed{J=]-\beta,\beta[}$ 0,25

$y/_{-J}=z,\ z(t)=y(t),\ \forall t\in -J=J$

ومنه $y(t)=-y(-t),\ \forall t\in J$ 0,25

إذن: y دالة فردية على J.

6) البرهان أن f ليبشيتزية كليا بالنسبة لـ y. (1)

من أجل: $\forall y_1,y_2\in\mathbb{R},\ \forall t\in\mathbb{R}$..

$|f(t,y_1)-f(t,y_2)|=\left||y_1|\ln(1+t^2)-|y_2|\ln(1+t^2)\right|$

$$|f(t,y_1)-f(t,y_2)| = \ln(1+t^2)\,\big||y_1|-|y_2|\big|$$

$$\leq \ln(1+t^2)\,|y_1-y_2|$$ (0,25)

يكفي أخذ $k(t)=\ln(1+t^2)>0$ (0,25)

ومنه f لبشيزية كليا بالنسبة لـ y.

7) البرهان (y,J) حل كلي وحيد لمسألة كوشي I وإيجاد J.

بما أن f مستمرة على $\mathbb{R}^2$ و f لبشيزية كليا بالنسبة لـ y إذن حسب نظرية كوشي مسألة كوشي تقبل حل كلي وحيد. (0,25)

ومنه $J=\mathbb{R}$. (0,25)

حل تمرين 03

حل المعادلة التفاضلية:

$$y^{(3)}-3y'-2y=0$$

لنستعمل تبديل المتغير التالي والذي يحول معادلة تفاضلية من الرتبة 3 إلى جملة تفاضلية خطية من الرتبة 1.

$y_1=y$, $y_2=y'$, $y_3=y''$ (0,25)

$$Y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} \Rightarrow Y'=\begin{pmatrix} y_2\\ y_3\\ 2y_1+3y_2\end{pmatrix}$$

$$Y'=AY \;:\; A=\begin{pmatrix} 0&1&0\\ 0&0&1\\ 2&3&0\end{pmatrix}$$ (0,25)

نجد أنفسنا أمام نفس الجملة الموجودة في التمرين 4.

حل التمرين 04

لنضع $R(t,t_0)$ النواة الحالة للجملة ومنه الحل يعطى بالعبارة:

$$Y=R(t,t_0)Y_0$$ (0,25)

وبما أن $A\in M_3(\mathbb{R})$ مصفوفة ثابتة، إذن:

$$R(t,t_0)=e^{(t-t_0)A}$$ (0,25)

لنحسب $e^{\alpha A}$ حيث $\alpha=t-t_0$:

$$P_A(\lambda)=-\lambda^3+3\lambda+2$$ (0,25)

$\lambda_1=2$، $n_1=1$ ولدينا

$$E_2=\left\langle\left\{e_1=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$$

$\lambda_2=-1$، $n_2=2$ ولدينا

$$E_{-1}=\left\langle\left\{e_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$$

1b) فضاء الأشعة الذاتية المعممة:

$$(A+I)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\2&3&0\end{pmatrix},\quad (A+I)^2=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&2\\4&8&4\end{pmatrix}$$

$$E^2_{-1}=\left\langle\left\{u_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, u_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right\}\right\rangle$$

$$Q=(e_1\,e_2\,u_1)\Rightarrow Q=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&-1&-1\\4&1&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Q^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&1\\-4&-8&5\\6&3&-3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$Au_1=\alpha e_2-u_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha-2\\-\alpha+1\\\alpha\end{pmatrix}\Leftrightarrow \alpha=1$$

2b) اختزال جوردان:

نبحث عن مصفوفة جوردان $J(-1,m)$ المرفقة بشعاع الذاتي e_2:

1) نقوم بحل المعادلة التالية

$$(A+I)u=e_2 \Rightarrow u=\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-s_2\\s_2\\-1-s_2\end{pmatrix},\ s_2\in\mathbb{R}$$

نختار $s_2=0$ نجد $u=u_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

إذا نختار $s_2=-1$: $u=u_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$

$$D=J=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$Q,\ Q^{-1}$ (0,25)

$A = QDQ^{-1}$ $\quad e^{\alpha A} = Q \begin{pmatrix} e^{2\alpha} & 0 \\ 0 & e^{\alpha D_1} \end{pmatrix} Q^{-1}$ 0,25

$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 + N, \; N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$N^2 = 0 \Rightarrow N^k = 0, \; \forall k \geq 2.$

$e^{\alpha D_1} = e^{-\alpha} e^{\alpha N} = e^{-\alpha}(I_2 + \alpha N)$ 0,25

$e^{\alpha D_1} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha} & \alpha e^{-\alpha} \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}$ 0,25

$e^{\alpha A} = Q \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} Q^{-1}$ 0,25 $\quad \left| \begin{array}{l} a = e^{2\alpha} \\ b = e^{-\alpha} \\ c = \alpha e^{-\alpha}. \end{array} \right.$

$e^{\alpha A} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} a+8b+6c & 2(a-b)+3c & a-b-3c \\ 2(a-b)-6c & 4a+5b-3c & 2(a-b)+3c \\ 4(a-b)+6c & 8(a-b)+c & 4a+5b-c \end{pmatrix}$ 0,5

$$\begin{cases} y_1(t) = \frac{1}{9}\left[(a+8b+c)y_1^0 + [2(a-b)+3c]y_2^0 + (a-b-3c)y_3^0\right]. \\ y_2(t) = \frac{1}{9}\left[[2(a-b)-6c]y_1^0 + (4a+5b-3c)y_2^0 + [2(a-b)+3c]y_3^0\right] \\ y_3(t) = \frac{1}{9}\left[[4(a-b)+6c]y_1^0 + [8(a-b)+c]y_2^0 + [4a+5b-c]y_3^0\right]. \end{cases}$$

0,5

حل المعادلة هو y إذن

$$y(t) = y_1(t) = \frac{1}{9}\left[\left[e^{2(t-t_0)} + [8+6(t-t_0)]e^{(t_0-t)}\right]y_1^0 + \left[2e^{2(t-t_0)} + [-2+3(t-t_0)]e^{(t_0-t)}\right]y_2^0 + \left[e^{2(t-t_0)} + [1+3(t-t_0)]e^{(t_0-t)}\right]y_3^0\right]$$

0,5