تمرين 1:

اليك المعطيات التالية

$f : R^2 \longrightarrow R^2$

$(x,y) \longrightarrow (3x+2y, x+4y)$

a. استخرج المصفوفة M من البيانات السابقة.
b. ماهي القاعدة المعيارية في هذه الحالة.
c. احسب متعدد الحدود المميز للمصفوفة M.
d. احسب القيم والاشعة الذاتية للمصفوفة M.
e. ماذا يساوي التقطيع القطري للمصفوفة M في هذه الحالة.

الحل:

$f: R^2 \longrightarrow R^2$

$(x,y) \longrightarrow (3x+2y, x+4y)$

a. المصفوفة M:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

b. القاعدة المعيارية: $B_e = \{(1,0),(0,1)\}$

c. متعدد الحدود المميز:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(4-\lambda) - (2*1) = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

d. القيم الذاتية:

$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 5, \lambda_2 = 2$

الاشعة الذاتية:

اذا كان $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ هو شعاع ذاتي مرافق ل $\lambda_1 = 5$

$$f(x) = 5x \leftrightarrow Mx = 5x$$
$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a \\ 5b \end{pmatrix}$$
$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a+2b \\ a+4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a \\ 5b \end{pmatrix}$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b = 5a \\ a+4b = 5b \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2b = 5a-3a \\ a = 5b-4b \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2b = 2a \\ a = b \end{cases}$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ a = b \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{U_1} = (1, 1)$$

اذا كان $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ هو شعاع ذاتي مرافق ل $\lambda_2 = 2$

$$f(x) = 2x \leftrightarrow Mx = 2x$$
$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}$$
$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a+2b \\ a+4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}$$
$$\leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b = 2a \\ a+4b = 2b \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2b = 2a-3a \\ a = 2b-4b \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2b = -a \\ a = -2b \end{cases}$$
$$\leftrightarrow \rightarrow \overrightarrow{U_2} = (2, -1)$$

e. التقطيع القطري:

$$M_{B_p}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

تمرين 2: تم اجراء التحليل بالمركبات الرئيسية (ACP) لمصفوفة الارتباط من 10 بيانات و3 متغيرات (var1, var2, var3). القيم والاشعة الذاتية المعيارية (normés) لمصفوفة الارتباط هي:

$$V1=\begin{pmatrix} -0.70 \\ -0.15 \\ x \end{pmatrix} \qquad V2=\begin{pmatrix} 0.05 \\ -0.98 \\ 0.17 \end{pmatrix} \qquad V3=\begin{pmatrix} -0.71 \\ 0.08 \\ 0.70 \end{pmatrix}$$

المركبات الرئيسية لبعض الافراد موضحة في الجدول التالي:

الجدول 1: المركبات الرئيسية

	$comp_1$	**$comp_2$**	**$comp_3$**
Obs_1	1.48	-1.92	-0.08
Obs_2	0.02	0.44	1.38
Obs_3	-0.04	-0.85	0.02
…….	……	……	…….
Obs_{10}	-0.14	0.73	-0.56

الأسئلة:

1. ما هو التباين الكلي لسحابة النقاط؟
2. احسب القيمة x.
3. اكمل الجدول التالي مع إعطاء العلاقات المستعملة:

الجدول 2: التباينات المفسرة

Valeur propre القيمة الذاتية (λ_i)	**Inertie expliquée التباين المفسر**	**Inertie expliquée cumulée التباين المفسر التجميعي**
		0.56
0.33		

4. احسب جودة تمثيل الفرد الأول بالنسبة للمحور الرئيسي الثاني، مع الاخذ بعين الاعتبار ان جودة تمثيله (الفرد الأول) بالنسبة للمحور الرئيسي الأول تساوي 0.37.
5. بعد إعطاء الصيغة المناسبة، احسب مساهمة الفرد الأول في المركب الرئيسي الثاني.
6.
a. اعط صيغة كتابة المركب الرئيسي comp1 الأول بدلالةvar1, var2, var3.
b. اثبت وجود علاقة ارتباط قوية للمتغير 1 في المركب الرئيسي الأول.

الحل:

1. التباين الكلي في هذه الحالة (التحليل بالمركبات الرئيسية المعياري) يساوي عدد المتغيرات 3.
2. حساب القيمة x:

بما انه في حالة التحليل بالمركبات الرئيسية المعياري الاشعة الذاتية متعامدة اثنين، اثنين، اذن:

$U_1 * U_2 = 0 \leftrightarrow (-0.7*0.05) + (-0.15*-0.98) + (x*0.17) = 0$

$-0.035+0.147+0.17x=0$

0.112+0.17x=0

0.17x=−0.112

$$x = \frac{-0.112}{0.17}$$

$$x \approx -0.6588$$

$$\boxed{x \approx -0.659}$$

3. اكمال الجدول مع إعطاء العلاقات المستعملة:

Valeur propre (λ_i) القيمة الذاتية	Inertie expliquée التباين المفسر	Inertie expliquée cumulée التباين المفسر التجميعي
$\lambda_1/3=0.56 \rightarrow \lambda_1 = 3*0.56 = 1.68$	0.56	0.56
$\lambda_2 = 3- \lambda_1 - \lambda_3$ $\lambda_2 = 3 – 1.68 – 0.33$ $\lambda_2 = 0.99$	$\lambda_2/3 = 0.99/3 = 0.33$	$0.56 + \lambda_2/3 = 0.56 + 0.33 = 0.89$
0.33	$\lambda_3/3 = 0.33/3 = 0.11$	$0.56 + \lambda_2/3 + 0.33/3 = 0.56 + 0.33 + 0.11 \approx 1$

4. حساب جودة تمثيل الفرد الأول بالنسبة للمحور الرئيسي الثاني:

$\cos(\theta_1)^2 = 0.37$

$\cos(\theta_2)^2 = ?$

$\cos(\theta_1)^2 = \left(\overrightarrow{U_1} * \overrightarrow{ind_1}\right)^2 / \left\|\overrightarrow{ind_1}\right\|^2 = 0.37 \rightarrow \left\|\overrightarrow{ind_1}\right\|^2 = \left(\overrightarrow{U_1} * \overrightarrow{ind_1}\right)^2 / 0.37$

$\cos(\theta_2)^2 = \left(\overrightarrow{U_2} * \overrightarrow{ind_1}\right)^2 / \left\|\overrightarrow{ind_1}\right\|^2$

$\cos(\theta_2)^2 = \left(\overrightarrow{U_2} * \overrightarrow{ind_1}\right)^2 * 0.37 / \left(\overrightarrow{U_1} * \overrightarrow{ind_1}\right)^2 = (-1.92)^2 * 0.37 / (1.48)^2 = 0.6227$

5. حساب مساهمة الفرد الأول في المركب الرئيسي الثاني:

الصيغة:

$$\text{Ctr}\ (ind_1) = \frac{\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{ind_1} * \overrightarrow{U_2}\right)^2}{\lambda_2} = \frac{\frac{1}{10}(-1.92)^2}{0.99} = 0.37236364$$

6.

a. صيغة كتابة المركب الرئيسي comp1 الأول بدلالة var1, var2, var3

Comp1 = -0.7*var1 – 0.15*var2 + x*var3

Comp1 = -0.7*var1 – 0.15*var2 - 0.659*var3

b. علاقة الارتباط بين المتغير 1 والمركب الرئيسي الأول:

r(var1, comp1) = -0.7*$\sqrt{\lambda_1}$ = -0.7*$\sqrt{1.68}$ = -0.9073037