CORRIGÉ

Solution 1 ***(1,75 pt)***

1. Principe du maximum faible : *(0,5 pt)*
Soit Ω un domaine borné, et soit $u(x,y) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ une fonction harmonique dans Ω. Alors le maximum de u dans $\overline{\Omega}$ est atteint sur la frontière $\partial\Omega$.
Cela s'écrit :

$$\max_{(x,y)\in\overline{\Omega}} u(x,y) = \max_{(x,y)\in\partial\Omega} u(x,y).$$

Principe du maximum fort : **(***0,5 pt***)**
Soit u une fonction harmonique dans un domaine Ω (ici nous autorisons aussi le cas Ω non borné). Si u atteint son maximum (minimum) en un point intérieur de Ω, alors u est constante.

2. Principe de comparaison **(***0,75 pt***)**
Définition d'une fonction auxiliaire : Soit $w(x,y) = u(x,y) - v(x,y)$.
Propriété de w : Puisque l'opérateur de Laplace est linéaire, w est également harmonique sur Ω ($\Delta w = \Delta u - \Delta v = 0 - 0 = 0$).
Condition au bord : Par hypothèse, sur la frontière $\partial\Omega$, $u \leq v$, donc $w(x,y) \leq 0$ pour tout $(x,y) \in \partial\Omega$.
Application du principe du maximum faible : Le maximum de la fonction harmonique w sur $\bar{\Omega}$ est atteint sur sa frontière. Comme $w \leq 0$ sur $\partial\Omega$, alors $w \leq 0$ dans Ω.
Conclusion : Puisque le maximum de w est ≤ 0, alors $w(x,y) \leq 0$ pour tout $(x,y) \in \Omega$, ce qui implique $u(x,y) \leq v(x,y)$ partout dans le domaine.

Solution 2 ***(1,5 pt)***

1. Problème aux limites mixte pour l'équation de Poisson : *(0,5 pt)*
Étant donnés les fonctions f dans Ω, g et h sur $\partial\Omega$, on cherche u tel que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \Gamma_D, \\ \partial_\nu u = h & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases} \tag{1}$$

où $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ est une partition (union disjointe) de la frontière.

2. Unicité dans le problème (1) : *(1,00 pt)*

Supposons que u_1 et u_2 sont deux solutions du problème (1). Posons $v = u_1 - u_2$. Il est facile de voir que v satisfait :

$$\Delta v = 0 \quad \text{dans } \Omega, \qquad v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_D, \qquad \partial_\nu v = 0 \quad \text{sur } \Gamma_N.$$

En substituant $v = u$ dans l'identité de Green

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy = \int_{\partial\Omega} v \partial_\nu u \, ds - \int_\Omega v \Delta u \, dxdy,$$

on obtient

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dxdy = \int_{\partial\Omega} v \partial_\nu v \, ds - \int_\Omega v \underbrace{\Delta v}_{=0} \, dxdy = \int_{\Gamma_D} \underbrace{v}_{=0} \partial_\nu v \, ds + \int_{\Gamma_N} v \underbrace{\partial_\nu v}_{=0} \, ds = 0.$$

Donc $\nabla v = 0$ dans Ω. Comme Ω est connexe, cela entraîne que v est constante dans Ω. Et puisque v s'annule sur Γ_D, alors $v \equiv 0$, et $u_1 \equiv u_2$.

Solution 3 ***(1,00 pt)***

1. Valeur moyenne de la température sur la plaque circulaire B_R : *(0,50 pt)*

Comme la plaque est en équilibre thermique, sa température u est une fonction harmonique et donc vérifie le principe de la valeur moyenne qui stiplule que la valeur moyenne de u sur le disque B_R est égale à sa valeur moyenne sur le cercle $C_R = \partial B_R$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi R^2} \iint_{B_R} u(x,y)\, dxdy &= \frac{1}{2\pi R} \oint_{C_R} u(x(s), y(s))\, ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(R,\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin\theta + 2)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \left[-\cos\theta + 2\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{4\pi}{2\pi} = 2.
\end{aligned}$$

2. Calcul de la température au centre de la plaque : *(0,50 pt)*

D'après le principe de la valeur moyenne, la valeur d'une fonction harmonique au centre d'un disque est égale à la moyenne de ses valeurs sur la frontière circulaire

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta)\, d\theta = 2.$$

Remarque : On peut aussi utiliser la formule intégrale de Poisson (avec $r = 0$) :

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \phi) + r^2} h(\phi) d\phi.$$

Solution 4 ***(1,00 pt)***

1. Énoncé de la condition de compatibilité : *(0,50 pt)*

Considérons le problème de Neumann non homogène pour l'équation de Poisson :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où f et g sont des fonctions données dans Ω et sur $\partial\Omega$ respectivement. Une condition nécessaire pour l'existence d'une solution au problème (2) est *la condition de compatibilité*

$$\int_\Omega f(x,y)dxdy + \int_{\partial\Omega} g(x(s),y(s))ds = 0, \tag{3}$$

où $(x(s), y(s))$ est une paramétrisation de $\partial\Omega$.

2. Explication de la non-unicité : *(0,50 pt)*

La solution du problème de Neumann homogène pour l'équation de Laplace n'est pas unique. En effet, supposons que u soit une solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Alors, pour toute constante réelle C, la fonction $v := u + C$ est également une solution du problème (4), du moment que

$$\Delta v = \Delta(u + C) = \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et

$$\partial_\nu v = \partial_\nu (u + C) = \partial_\nu u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Solution 5 Notons Ω l'anneau $\{(r,\theta)\ ;\ 1 < r < 2,\ 0 \leq \theta < 2\pi\}$. ***(1,50 pt)***

1. **Fonction harmonique sur Ω vérifiant la condition de Dirichlet** *(0,75 pt)*

$$u(1,\theta) = 0, \quad u(2,\theta) = 1.$$

Puisque la donnée est constante sur les deux bords, on cherche une solution *indépendante de θ : $u = u(r)$*. L'équation de Laplace en coordonnées polaires devient :

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = 0,$$

soit

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) = 0.$$

En intégrant une fois :

$$r\,\frac{du}{dr} = C_1, \quad \text{soit} \quad \frac{du}{dr} = \frac{C_1}{r}.$$

En intégrant une seconde fois :

$$u(r) = C_1 \ln r + C_2.$$

Les conditions aux limites :

$$\begin{aligned}
u(1,\theta) = 0 &\iff C_1 \ln 1 + C_2 = 0 \iff C_2 = 0, \\
u(2,\theta) = 1 &\iff C_1 \ln 2 = 1 \iff C_1 = \frac{1}{\ln 2}.
\end{aligned}$$

La solution est :

$$u(r) = \frac{\ln r}{\ln 2} \quad 1 < r < 2.$$

2. **Fonction harmonique sur Ω vérifiant la condition de Neumann** *(0,75 pt)*

$$u_r(1,\theta) = 0, \quad u_r(2,\theta) = 1.$$

Solution indépendante de θ :

$$u = C_1 \ln r + C_2.$$

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} u_r(1) = 0 \iff C_1 = 0 \\ u_r(2) = 1 \iff \frac{C_1}{2} = 1 \iff C_1 = 2 \end{cases} \qquad \text{Contradiction.}$$

Conclusion : Il n'y a pas de solution. Cela s'explique par la non satisfaction de *la condition de compatibilité* (3) :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds = \int_{\partial\Omega} \frac{du}{dr}\, ds = \int_0^{2\pi} u_r(1,\theta)\, d\theta + \int_0^{2\pi} u_r(2,\theta)\, d\theta = 2\pi \neq 0$$

alors que le flux total doit être nul pour un problème de Neumann.