

Interrogation Écrite : Notions Préliminaires des EDP

Durée : 40 mn - Aucun document autorisé

Exercice 1 Questions théoriques indépendantes

1. Pour chacune des équations suivantes, déterminer l'ordre et la nature (linéaire, semi-linéaire, quasi-linéaire, complètement non linéaire) :

$$\begin{aligned} u_t + cuu_x &= 0, \\ u_{tt} - \Delta^2 u &= 0, \\ \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) &= 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (|\nabla u| = \text{norme euclidienne de } \nabla u). \end{aligned}$$

2. Quel est le type du problème aux limites suivant ?

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \quad (\Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ ouvert}) \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} & \text{sur } \partial\Omega \quad (\nu = \text{normale unitaire à } \partial\Omega). \end{cases} \quad (1)$$

3. Énoncer avec précision les trois critères de Jacques Hadamard pour qu'un problème associé à une EDP soit dit "**bien posé**".
4. Quelle est la différence entre une condition aux limites de Dirichlet et une condition de Neumann dans le contexte des EDP d'ordre 2 ?
5. Qu'est-ce qu'une solution « classique » dans le contexte des EDP ? Appliquer à l'équation $u_t - ku_{xx} = f$.

Exercice 2 Soit le problème de Cauchy suivant pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$u_t - 3u_x = t, \quad u(0, x) = \cos x. \quad (2)$$

1. Énoncer la formule de Duhamel pour la solution d'une EDP de transport non homogène de type $u_t + bu_x = f(t, x)$ avec condition initiale $u_0(x)$.
2. Calculer explicitement la solution $u(t, x)$ du problème (2) en utilisant cette formule.
3. Vérifier par le calcul que la solution trouvée satisfait l'équation et la condition initiale.

Exercice 3 Indiquer le type, ramener à la forme canonique puis trouver la solution générale $u(x, y)$ de l'équation aux dérivées partielles d'ordre 2 suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (3)$$

Solution 1

2,25 pts

1. Classification des équations :

- $u_t + cuu_x = 0$: Équation du **premier ordre, quasi-linéaire** car le coefficient de la dérivée u_x dépend de la solution u . (0, 25 pt)
- $u_{tt} - \Delta^2 u = 0$, Équation du **4ème ordre, linéaire**. (0, 25 pt)
- $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En écrivant cette équation sous la forme :

$$\frac{1 + u_y^2}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} u_{xx} - \frac{2 u_x u_y}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} u_{xy} + \frac{1 + u_x^2}{(1 + |\nabla u|^2)^{3/2}} u_{yy} = 0,$$

on s'aperçoit que c'est une équation du **second ordre, quasi-linéaire**. (0, 50 pt)

2. Le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

est un problème aux limites de Robin. (0, 25 pt)

3. Un problème est **bien posé** s'il remplit les critères d'existence (une solution existe), d'unicité (il n'y a qu'une seule solution) et de stabilité (la solution dépend continûment des données). (0, 25 pt)

4. Dans le contexte des EDP d'ordre 2, la condition de Dirichlet impose la valeur de la solution elle-même sur la frontière du domaine. À l'inverse, la condition de Neumann impose la valeur de la dérivée normale de la solution sur cette même frontière, représentant souvent un flux. (0, 25 pt)

5. Une **solution classique** est une fonction **suffisamment régulière** (de classe C^k pour une équation d'ordre k) qui vérifie l'EDP en **tout point du domaine** considéré. Elle implique que toutes les dérivées apparaissant dans l'équation soient continues. (0, 25 pt)

Pour l'équation $u_t - ku_{xx} = f$, une solution classique doit être de classe C^2 . (0, 25 pt)

Solution 2

1,50 pt

1. Formule de Duhamel :

$$u(t, x) = u_0(x - bt) + \int_0^t f(s, x + b(s - t)) ds. \quad (0, 50 pt)$$

2. Calcul : Ici $b = -3$, $u_0(x) = \cos x$, $f(s, y) = s$, d'où

$$u(t, x) = \cos(x + 3t) + \int_0^t s \, ds = \cos(x + 3t) + \frac{t^2}{2}. \quad (0, 50 \text{ pt})$$

3. Vérification : (0, 50 pt)

$$u(0, x) = \cos(x) + 0 = \cos(x).$$

$$u_t(t, x) = -3 \sin(x + 3t) + t \text{ et } u_x(t, x) = -\sin(x + 3t).$$

$$u_t - 3u_x = -3 \sin(x + 3t) + t + 3 \sin(x + 3t) = t \text{ (OK).}$$

Solution 3 2,25 pt

Soit l'équation aux dérivées partielles d'ordre 2 suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

L'objectif est de déterminer sa nature et de la réduire à sa forme standard.

Étape 1 : Classification

On identifie les coefficients de l'équation : $a = 1$, $b = -2$ et $c = 3$. Le discriminant réduit est :

$$\delta = b^2 - ac = (-2)^2 - (1)(3) = 4 - 3 = 1 > 0.$$

Conclusion : Comme $\delta > 0$, l'équation est de type **hyperbolique**. (0, 25 pt)

Étape 2 : Équation des caractéristiques

On cherche les courbes caractéristiques en résolvant l'équation différentielle :

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2b \left(\frac{dy}{dx} \right) + c = 0 \iff 1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 4 \left(\frac{dy}{dx} \right) + 3 = 0.$$

Les racines sont :

$$\bullet \lambda_1 = -1 \implies \frac{dy}{dx} = -1 \implies y + x = C_1$$

$$\bullet \lambda_2 = -3 \implies \frac{dy}{dx} = -3 \implies y + 3x = C_2 \quad (0, 5 \text{ pt})$$

Étape 3 : Changement de variables

On pose les nouvelles variables (ξ, η) :

$$\xi = y + x, \quad \eta = y + 3x.$$

Alors,

$$\xi_x = \xi_y = \eta_y = 1 \text{ et } \eta_x = 3.$$

En appliquant la règle de la chaîne, on obtient :

$$\begin{aligned}u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + 3u_\eta, \\u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi + u_\eta,\end{aligned}$$

par suite,

$$\begin{aligned}u_{xx} &= (u_\xi + 3u_\eta)_\xi \xi_x + (u_\xi + 3u_\eta)_\eta \eta_x = u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}, \\u_{yy} &= (u_\xi + u_\eta)_\xi \xi_y + (u_\xi + u_\eta)_\eta \eta_y = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \\u_{xy} &= (u_y)_x = (u_\xi + u_\eta)_\xi \xi_x + (u_\xi + u_\eta)_\eta \eta_x = u_{\xi\xi} + 4u_{\xi\eta} + 3u_{\eta\eta}.\end{aligned}$$

Après substitution dans l'équation initiale et simplification, on obtient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (1, 00 \text{ pt})$$

Étape 4 : Résolution générale

L'équation réduite est très simple à intégrer :

1. On intègre par rapport à ξ : $\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(\eta)$.
2. On intègre par rapport à η : $u(\xi, \eta) = \int f(\eta) d\eta + G(\xi) = F(\eta) + G(\xi)$.

En revenant aux variables originales (x, y) :

$$u(x, y) = F(y + 3x) + G(y + x) \quad (0, 50 \text{ pt})$$

où F et G sont des fonctions arbitraires de classe C^2 sur \mathbb{R} .