

Extremums

5.1 Extremums libres.

Soit

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x),$$

Et $a \in D$.

Définition. 5.1.

1. On dit que f admet un **maximum global** sur D en a si

$$\forall x \in D: f(x) \leq f(a).$$

2. On dit que f admet un **minimum global** sur D en a si

$$\forall x \in D: f(x) \geq f(a).$$

3. On dit que f admet un **Extremum global** en a si f admet un **maximum global** ou bien un **minimum global**.

Exemple. 5.1.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$.

2. $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$.

3. $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

4. $f(x, y) = xy$.

Définition. 5.2.

1. On dit que f admet un **maximum local** sur D en point $a \in D$, 'il existe une boule ouverte $B(a, r) \subset D$ telle que

$$\forall x \in B(a, r): f(x) \leq f(a).$$

2. On dit que f admet un **minimum local** sur D en point $a \in D$, 'il existe une boule ouverte $B(a, r) \subset D$ telle que

$$\forall x \in B(a, r): f(x) \geq f(a).$$

3. On dit que f admet un **Extremum Local** en a si f admet un **maximum Local** ou bien un **minimum Local**.

5.2 Points critique.

Définition. 5.3.

Soit $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est application. On dit que f admet un en $a \in D$ un point critique si f est différentiable en a et

$$Df(a) = 0.$$

Remarque.

Exemple. 5.2. Déterminer les points critique des applications suivantes :

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$.
2. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
3. $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3y$.
4. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$.

Solution.

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$.

Calculer $\nabla f(x, y)$. On a,

$$\nabla f(x, y) = (2x - y, 2y - x).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = 0 &\Rightarrow (2x - y, 2y - x) = (0, 0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y \\ 2y = x \end{cases} \Rightarrow x = y = 0. \end{aligned}$$

Donc la fonction f possède un point critique $(0, 0)$.

2. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Calculer $\nabla f(x, y)$. On a,

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = 0 &\Rightarrow (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = (0, 0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y & (1) \\ y^2 = x & (2) \end{cases}. \end{aligned}$$

De (1), on a

$$y = x^2 \Rightarrow y^2 = x^4. \quad (3)$$

En remplaçant (3) dans (2), on trouve

$$y^2 = x \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x^4 - x = x(x^3 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Enfin, de (1), on a

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}.$$

Donc la fonction f possède deux points critiques $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

3. $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3y$.

Calculer $\nabla f(x, y)$. On a,

$$\nabla f(x, y) = (2x, 3y^2 - 3).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = 0 &\Rightarrow (2x, 3y^2 - 3) = (0, 0) \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & (1) \\ y^2 = 1 & (2) \end{cases}. \end{aligned}$$

De (2), on a

$$y^2 = 1 \Rightarrow (y = -1) \vee (y = 1). \quad (3)$$

Enfin, de (1) et (3), on a

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}.$$

Donc la fonction f possède deux points critiques (0,-1) et (0,1).

Donc la fonction f possède deux points critiques (0,0) et (1,1).

$$4. f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y.$$

Calculer $\nabla f(x, y)$. On a,

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3, 3y^2 - 3).$$

Alors,

$$\nabla f(x, y) = 0 \Rightarrow (3x^2 - 3, 3y^2 - 3) = (0, 0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} (x = -1) \vee (x = 1) \\ (y = -1) \vee (y = 1) \end{cases} \end{aligned} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Enfin, de (1) et (2), on a

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1 \\ x = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}.$$

Donc la fonction f possède 4 points critiques (-1,-1), (-1,1), (1, -1) et (1,1).

$$4. f(x, y, z) = x^2 - x + 2y^2 - y - z^3.$$

Calculer $\nabla f(x, y)$. On a,

$$\nabla f(x, y, z) = (2x - 1, 4y - 1, 3z^2).$$

Alors,

$$\nabla f(x, y, z) = 0 \Rightarrow (2x - 1, 4y - 1, 3z^2) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \\ 4y - 1 = 0 \\ 3z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ 4y = 1 \\ 3z^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc la fonction f possède un point critique $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0)$.

Cas des fonctions de deux variables

Théorème 5.1.

Soit D un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ est fonction de classe C^2 et $a \in D$ un point critique de f . Alors, avec les notations

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a), \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a), \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \quad \text{et} \quad \Delta = s^2 - rt.$$

- Si $\Delta < 0$ et $r > 0$, f admet en a un minimum local.
- Si $\Delta < 0$ et $r < 0$, f admet en a un maximum local.
- Si $\Delta > 0$ et $r > 0$, f n'admet en a un ni minimum ni maximum local, mais un point selle.
- Si $\Delta = 0$, on ne peut conclure.

Résumé. En résumé, si a est un oint critique de f , sa nature est déterminée par le tableaux suivant :

$\Delta = s^2 - rt$	r	Nature du point a
-	+	minimum local
-	-	maximum local
+		point-selle
0		on ne peut pas conclure

Exemple 5.1. On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + 2xy + y - y^3. \end{aligned}$$

1. Déterminer les points critiques de l'application f .
2. Donner leur nature (extremum local, point selle).
3. Montrer que le minimum local obtenu n'est pas un minimum global pour f .

Solution.

L'application f est de classe C^2 (et même de classe C^∞) peut donc appliquer la méthode des dérivées premières et secondes pour l'étude des extrema locaux.

1. Les points critiques sont les points qui rendent nul le gradient. On a

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x + 2y, -3y^2 + 2x + 1).$$

Alors,

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (2x + 2y, -3y^2 + 2x + 1) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -3y^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -3y^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

En remplaçant (1) dans (2), on trouve

$$-3y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow \left(y = \frac{1}{3} \right) \vee (y = -1). \quad (3)$$

Enfin, de (1) et (3), on a

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ y = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}.$$

Donc la fonction f possède 2 points critiques $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ et $(1, -1)$.

2. Pour étudier la nature des points critiques, on calcule les dérivées secondes. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2.$$

Donc pour le point $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ on a

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 2, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = -2, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 2$$

Alors,

$$\Delta = s^2 - rt = 4 - (2 \times (-2)) = 8 > 0.$$

Donc, le point donc $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ correspond à un point selle ((ni minimum local ni maximum local).

Pour le point $(1, -1)$ on a

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (1, -1) = 2, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (1, -1) = 6, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (1, -1) = 2$$

Alors,

$$\Delta = s^2 - rt = 4 - (2 \times 6) = -8 < 0 \text{ et comme } r > 0.$$

Donc, on conclut que le point $(1, -1)$ est un minimum local pour f et **ce minimum** est $f(1, -1) = -3$

Exemple 5.1. On considère l'application f définie par :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 + 2xy + y - y^3.$$

1. Déterminer les points critiques de l'application f .
2. Donner leur nature (extremum local, point selle).
3. Montrer que le minimum local obtenu n'est pas un minimum global pour f .

Solution.

L'application f est de classe C^2 (et même de classe C^∞) peut donc appliquer la méthode des dérivées premières et secondes pour l'étude des extrema locaux.

1. Les points critiques sont les points qui rendent nul le gradient. On a

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2x + 2y, -3y^2 + 2x + 1).$$

Alors,

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (2x + 2y, -3y^2 + 2x + 1) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -3y^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ -3y^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

En remplaçant (1) dans (2), on trouve

$$-3y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow \left(y = \frac{1}{3}\right) \vee (y = -1). \quad (3)$$

Enfin, de (1) et (3), on a

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ y = -1 \Rightarrow x = 1 \end{cases}.$$

Donc la fonction f possède 2 points critiques $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et $(1, -1)$.

2. Pour étudier la nature des points critiques, on calcule les dérivées secondes. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2.$$

Donc pour le point $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ on a

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 2, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -2, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = 2$$

Alors,

$$\Delta = s^2 - rt = 4 - (2 \times (-2)) = 8 > 0.$$

Donc, le point donc $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ correspond à un point selle ((ni minimum local ni maximum local).

Pour le point $(1, -1)$ on a

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = 2, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -1) = 6, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, -1) = 2$$

Alors,

$$\Delta = s^2 - rt = 4 - (2 \times 6) = -8 < 0 \text{ et comme } r > 0.$$

Donc, on conclut que le point $(1, -1)$ est un minimum local pour f et **ce minimum est $f(1, -1) = -3$**

Exemple 5.2. On considère l'application f définie par :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto 4x^2 + 2xy + y^2. \end{aligned}$$

1. Déterminer les points critiques de l'application f .
2. Donner leur nature (extremum local, point selle).
3. Montrer que le minimum local obtenu est en fait un minimum global pour f .

Solution.

L'application f est de classe C^2 (et même de classe C^∞) peut donc appliquer la méthode des dérivées premières et secondes pour l'étude des extrema locaux.

1. Les points critiques sont les points qui rendent nul le gradient. On a

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (8x + 2y, 2x + 2y).$$

Alors,

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (8x + 2y, 2x + 2y) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Donc la fonction f possède un point critique $(0, 0)$.

2. Pour étudier la nature de point critique, on calcule les dérivées secondes. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 8, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2.$$

Donc pour le point $(0, 0)$ on a

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 8, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 2.$$

Alors,

$$\Delta = s^2 - rt = 4 - (2 \times 8) = -12 < 0 \text{ et comme } r > 0.$$

Donc, on conclut que le point $(0,0)$ est un minimum local pour f et ce minimum est $f(0,0) = 0$.

3. On remarque que $f(x, y) = (x + y)^2 + 3x^2$. Donc, on aura

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2: f(x, y) \geq 0 = f(0,0).$$

On en déduit que $(0,0)$ est le minimum global de f .

Exemple 5.2. On considère l'application f définie par :

$$f(x, y) = x(\ln(x))^2 + y^2.$$

1. Préciser le domaine de définition de f .
2. Déterminer les points critiques de l'application f .
3. Donner leur nature (extremum local, point selle).
4. Montrer que le minimum local obtenu est en fait un minimum global pour f .
5. f admet-elle un maximum global ?

Solution.

1. Domaine de définition

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x > 0\}.$$

2. Les points critiques sont les points qui rendent nul le gradient. L'application f est de classe C^∞ sur son domaine et admet pour dérivées partielles

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = ((\ln(x))^2 + 2 \ln(x), 2y).$$

Alors,

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow ((\ln(x))^2 + 2 \ln(x), 2y) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\ln(x))^2 + 2 \ln(x) = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x)(\ln(x) + 2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

De (2), on a

$$\begin{cases} \ln(x) = 0 \\ \vee \\ \ln(x) + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln(x) = 0 \\ \vee \\ \ln(x) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = e^{-2} \end{cases} \quad (3)$$

Donc la fonction f possède 2 point critique $(1, 0)$ et $(e^{-2}, 0)$.

3. Pour étudier la nature de point critique, on calcule les dérivées secondes. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(\ln(x) + 1)}{x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Donc pour le point $(1, 0)$ on a

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 0) = 2, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 0) = 2, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 0) = 0.$$

Alors,

$$\Delta = s^2 - rt = 0 - (2 \times 2) = -4 < 0 \text{ et comme } r > 0.$$

Donc, on conclut que le point $(1,0)$ est un minimum local pour f et ce minimum est $f(1,0) = 0$.

Pour le point $(e^{-2}, 0)$ on a

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^{-2}, 0) = -2e^2, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e^{-2}, 0) = 2, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(e^{-2}, 0) = 0.$$

Alors,

$$\Delta = s^2 - rt = 0 - (-2e^2 \times 2) = 4e^2 > 0.$$

Donc, on conclut que le point $(e^{-2}, 0)$ est un point selle pour f .

4. On remarque que

$$\forall (x, y) \in D_f: f(x, y) \geq 0 = f(1,0).$$

On en déduit que $(1,0)$ est le minimum global de f .

5. On remarque que D_f est ouvert et comme f n'admet pas un maximum local. Alors, f n'admet pas de maximum global. On peut aussi voir que f n'est pas majorée, car :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x(\ln(x))^2) = +\infty.$$