سلسلة تمارين في مشاكل التخصيص

تمرين 1: دراسة حالة تحسين التسويق عبر المؤثرين

المشكلة:

تريد شركة تسويقية تخصيص 5 مؤثرين لـ 5 حملات تسويقية بهدف تعظيم **التفاعل** (Engagement) كل مؤثر لديه معدل تفاعل مختلف مع كل حملة .الهدف هو تحديد أفضل تخصيص لتحقيق أعلى مجموع للتفاعل.

بيانات المسألة:

المصفوفة أدناه تمثل معدلات التفاعل بالمئات بين المؤثرين والحملات:

	Campaign A	Campaign B	Campaign C	Campaign D	Campaign E
Alice	8	6	9	7	5
Bob	7	5	8	6	4
Charlie	6	8	7	9	3
Diana	5	7	6	8	10
Eve	4	6	5	7	9

الحل باستخدام الخوارزمية المجرية (Hungarian Algorithm)

الخطوة الأولى :تحويل المسألة إلى مسألة تقليل

لأن هدفنا هو تعظيم التفاعل، نقوم بتحويل المسألة إلى مسألة تقليل باستخدام مفهوم **تكاليف الفرص** .يتم ذلك عن طريق طرح كل قيمة في المصفوفة من القيمة القصوى:(10)

	Campaign A	Campaign B	Campaign C	Campaign D	Campaign E
Alice	2	4	1	3	5
Bob	3	5	2	4	6
Charlie	4	2	3	1	7
Diana	5	3	4	2	0
Eve	6	4	5	3	1

الخطوة الثانية :خفض الصفوف

نطرح أصغر قيمة في كل صف من جميع عناصر الصف:

	Campaign A	Campaign B	Campaign C	Campaign D	Campaign E
Alice	1	3	0	2	4
Bob	1	3	0	2	4
Charlie	3	1	2	0	6
Diana	5	3	4	2	0
Eve	5	3	4	2	0

الخطوة الثالثة: خفض الأعمدة

نطرح أصغر قيمة في كل عمود من جميع عناصر العمود:

	Campaign A	Campaign B	Campaign C	Campaign D	Campaign E
Alice	0	2	0	2	4
Bob	0	2	0	2	4
Charlie	2	0	2	0	6
Diana	4	2	4	2	0
Eve	4	2	4	2	0

الخطوة الرابعة: تغطية الأصفار بخطوط

	Campaign A	Campaign B	Campaign C	Campaign D	Campaign E
Alice	~~0~~	~~2~~	~~0~~	~~2~~	~~4~~
Bob	~~0~~	~~2~~	~~0~~	~~2~~	~~4~~
Charlie	~~2~~	~~0~~	~~2~~	~~0~~	~~6~~
Diana	4	2	4	2	0
Eve	4	2	4	2	0

نحاول تغطية جميع الأصفار باستخدام الحد الأدنى من الخطوط:

- خط أفقي على الصف الأول.
- خط أفقي على الصف الثاني.
- خط رأسي على الصف الثالث.
- خط رأسي على العمود الخامس.

عدد الخطوط (5 > 4 = عدد الوكلاء)، لذلك نحتاج إلى تعديل المصفوفة.

الخطوة الخامسة: تعديل المصفوفة

نحسب أصغر قيمة غير مغطاة (2) ونطرحها من جميع العناصر غير المغطاة، ثم نضيفها إلى العناصر عند التقاطع بين الخطوط:

	Campaign A	Campaign B	Campaign C	Campaign D	Campaign E
Alice	0	2	0	2	6
Bob	0	2	0	2	6
Charlie	2	0	2	0	8
Diana	2	0	2	0	0
Eve	2	0	2	0	0

الخطوة السادسة :تحديد التخصيص الأمثل

نحدد التخصيص الأمثل بحيث يكون هناك صفر واحد فقط في كل صف وعمود:

	Campaign A	Campaign B	Campaign C	Campaign D	Campaign E	Assignment
Alice	0	2	0	2	6	Alice → Campaign C
Bob	0	2	0	2	6	Bob → Campaign A
Charlie	2	0	2	0	8	Charlie → Campaign B
Diana	2	0	2	0	0	Diana → Campaign E
Eve	2	0	2	0	0	Eve → Campaign D

النتيجة النهائية:

- Alice → Campaign C (تفاعل = 9)
- Bob → Campaign A (تفاعل = 7)
- Charlie → Campaign B (تفاعل = 8)
- Diana → Campaign E (تفاعل = 10)
- Eve → Campaign D (تفاعل = 7)

إجمالي التفاعل:

$$9 + 7 + 8 + 10 + 7 = \boxed{41}$$

تمرين 2: دراسة حالة :تخصيص الإعلانات على المنصات الرقمية

المشكلة:

تريد شركة إعلانية تخصيص 5 إعلانات لـ 5 منصات رقمية) مثلGoogle Ads، Facebook Ads، Instagram Ads ، Twitter Ads، و (LinkedIn Adsبهدف تعظيم **العائد على الاستثمار .(ROI)** كل إعلان لديه معدل عائد مختلف على كل منصة .الهدف هو تحديد أفضل تخصيص لتحقيق أعلى مجموع للعائد.

بيانات المسألة:

المصفوفة أدناه تمثل معدلات العائد على الاستثمار (بالنسبة المئوية) لكل إعلان على كل منصة:

	Google Ads	Facebook Ads	Instagram Ads	Twitter Ads	LinkedIn Ads
Ad 1	7	8	6	9	5
Ad 2	6	7	8	5	4
Ad 3	5	9	7	6	3
Ad 4	4	6	5	8	10
Ad 5	3	5	4	7	9

الحل باستخدام الخوارزمية المجرية(Hungarian Algorithm)

الخطوة الأولى :تحويل المسألة إلى مسألة تقليل

لأن هدفنا هو تعظيم العائد، نقوم بتحويل المسألة إلى مسألة تقليل باستخدام مفهوم **تكاليف الفرص** .يتم ذلك عن طريق طرح كل قيمة في المصفوفة من القيمة القصوى:(10)

	Google Ads	Facebook Ads	Instagram Ads	Twitter Ads	LinkedIn Ads
Ad 1	3	2	4	1	5
Ad 2	4	3	2	5	6
Ad 3	5	1	3	4	7
Ad 4	6	4	5	2	0
Ad 5	7	5	6	3	1

الخطوة الثانية :خفض الصفوف

نطرح أصغر قيمة في كل صف من جميع عناصر الصف:

	Google Ads	Facebook Ads	Instagram Ads	Twitter Ads	LinkedIn Ads
Ad 1	2	1	3	0	4
Ad 2	2	1	0	3	4
Ad 3	4	0	2	3	6
Ad 4	6	4	5	2	0
Ad 5	6	4	5	2	0

الخطوة الثالثة :خفض الأعمدة

نطرح أصغر قيمة في كل عمود من جميع عناصر العمود:

	Google Ads	Facebook Ads	Instagram Ads	Twitter Ads	LinkedIn Ads
Ad 1	0	1	3	0	4
Ad 2	0	1	0	3	4
Ad 3	2	0	2	3	6
Ad 4	4	4	5	2	0
Ad 5	4	4	5	2	0

الخطوة الرابعة: تغطية الأصفار بخطوط

نحاول تغطية جميع الأصفار باستخدام الحد الأدنى من الخطوط:

	Google Ads	Facebook Ads	Instagram Ads	Twitter Ads	LinkedIn Ads
Ad 1	~~0~~	1	3	~~0~~	4
Ad 2	~~0~~	1	~~0~~	3	4
Ad 3	~~2~~	~~0~~	2	3	6
Ad 4	4	4	5	2	0
Ad 5	4	4	5	2	0

- خط أفقي على الصف الأول.
- خط أفقي على الصف الثاني.
- خط أفقي على الصف الثالث.
- خط رأسي على العمود الخامس.

لذلك نحتاج إلى تعديل المصفوفة ،(عدد الوكلاء) 5 > 4 = عدد الخطوط

الخطوة الخامسة: تعديل المصفوفة

نحسب أصغر قيمة غير مغطاة (2) ونطرحها من جميع العناصر غير المغطاة، ثم نضيفها إلى العناصر عند التقاطع بين الخطوط:

	Google Ads	Facebook Ads	Instagram Ads	Twitter Ads	LinkedIn Ads
Ad 1	0	1	3	0	6
Ad 2	0	1	0	3	6
Ad 3	2	0	2	3	8
Ad 4	2	2	3	0	0
Ad 5	2	2	3	0	0

الخطوة السادسة: تحديد التخصيص الأمثل

نحدد التخصيص الأمثل بحيث يكون هناك صفر واحد فقط في كل صف وعمود:

	Google Ads	Facebook Ads	Instagram Ads	Twitter Ads	LinkedIn Ads	Assignment
Ad 1	0	1	3	0	6	Ad 1 → Twitter Ads
Ad 2	0	1	0	3	6	Ad 2 → Instagram Ads
Ad 3	2	0	2	3	8	Ad 3 → Facebook Ads
Ad 4	2	2	3	0	0	Ad 4 → LinkedIn Ads
Ad 5	2	2	3	0	0	Ad 5 → Google Ads

النتيجة النهائية:

- Ad 1 → Twitter Ads (ROI = 9%)
- Ad 2 → Instagram Ads (ROI = 8%)
- Ad 3 → Facebook Ads (ROI = 9%)
- Ad 4 → LinkedIn Ads (ROI = 10%)
- Ad 5 → Google Ads (ROI = 3%)

إجمالي العائد على الاستثمار:

$$9 + 8 + 9 + 10 + 3 = \boxed{39\%}$$

تمرين 3: دراسة حالة مشكلة تخصيص غير متوازنة

المشكلة:

تريد شركة تسويقية تخصيص 4 موظفين لـ 5 مهام تسويقية .كل موظف لديه تكلفة مختلفة لكل مهمة، والهدف هو تخصيص الموظفين إلى المهام بطريقة تقلل من التكلفة الإجمالية .ومع ذلك، بسبب عدم توفر عدد كافٍ من الموظفين، لن يتم تنفيذ جميع المهام.

بيانات المسألة:

المصفوفة أدناه تمثل تكاليف (بالدولار) لكل موظف لكل مهمة:

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4	Task 5
Employee A	8	6	7	9	5
Employee B	7	5	6	8	4
Employee C	6	8	5	7	3
Employee D	5	7	6	8	4

الحل باستخدام الخوارزمية المجرية(Hungarian Algorithm)

الخطوة الأولى :جعل المشكلة متوازنة

بما أن عدد الموظفين (4) أقل من عدد المهام(5) ، نضيف" موظفًا وهميًا (Employee E) "مع تكاليف صفرية لكل المهام . هذا يضمن أن تكون المصفوفة مربعة.

المصفوفة الجديدة:

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4	Task 5
Employee A	8	6	7	9	5
Employee B	7	5	6	8	4

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4	Task 5
Employee C	6	8	5	7	3
Employee D	5	7	6	8	4
Employee E	0	0	0	0	0

الخطوة الثانية :خفض الصفوف

نطرح أصغر قيمة في كل صف من جميع عناصر الصف:

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4	Task 5
Employee A	3	1	2	4	0
Employee B	3	1	2	4	0
Employee C	3	5	2	4	0
Employee D	1	3	2	4	0
Employee E	0	0	0	0	0

الخطوة الثالثة :خفض الأعمدة

نطرح أصغر قيمة في كل عمود من جميع عناصر العمود:

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4	Task 5
Employee A	3	1	2	4	0
Employee B	3	1	2	4	0
Employee C	3	5	2	4	0
Employee D	1	3	2	4	0
Employee E	0	0	0	0	0

(لا يتغير شيء لأن القيم الصفرية موجودة بالفعل في كل عمود).

الخطوة الرابعة :تغطية الأصفار بخطوط

نحاول تغطية جميع الأصفار باستخدام الحد الأدنى من الخطوط:

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4	Task 5
Employee A	3	1	2	4	0
Employee B	3	1	2	4	0
Employee C	3	5	2	4	0
Employee D	1	3	2	4	0
Employee E	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~

- خط أفقي على الصف الخامس.(Employee E)
- خط رأسي على العمود الخامس.(Task 5)

لذلك نحتاج إلى تعديل المصفوفة ،(عدد الوكلاء) 5 > 2 = عدد الخطوط

الخطوة الخامسة :تعديل المصفوفة

نحسب أصغر قيمة غير مغطاة (1) ونطرحها من جميع العناصر غير المغطاة، ثم نضيفها إلى العناصر عند التقاطع بين الخطوط:

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4	Task 5
Employee A	2	0	1	3	0
Employee B	2	0	1	3	0
Employee C	2	4	1	3	0
Employee D	0	2	1	3	0
Employee E	0	0	0	0	0

تغطية الأصفار بخطوط

نحاول تغطية جميع الأصفار باستخدام الحد الأدنى من الخطوط:

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4	Task 5
Employee A	2	0	1	3	0
Employee B	2	0	1	3	0
Employee C	2	4	1	3	0
Employee D	0	2	1	3	0
Employee E	0	0	0	0	0

خط أفقي على الصف الخامس

خط رأسي على العمود الأول

خط رأسي على العمود الثاني

حط رأسي على العمود الخامس

لذلك نحتاج إلى تعديل المصفوفة ،(عدد الوكلاء) 5 > 4 = عدد الخطوط

تعديل المصفوفة:

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4	Task 5
Employee A	2	0	0	2	0
Employee B	2	0	0	2	0
Employee C	2	4	0	2	0
Employee D	0	2	0	2	0
Employee E	1	1	0	0	1

الخطوة السادسة :تحديد التخصيص الأمثل

نحدد التخصيص الأمثل بحيث يكون هناك صفر واحد فقط في كل صف وعمود:

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4	Task 5	Assignment
Employee A	2	0	0	2	0	Employee A → Task 2
Employee B	2	0	0	2	0	Employee B → Task 5
Employee C	2	4	0	2	0	Employee C → Task 3
Employee D	0	2	0	2	0	Employee D → Task 1
Employee E	1	1	0	0	1	Employee E → Task 4

النتيجة النهائية:

- Employee A → Task 2 (Cost = 6)
- Employee B → Task 5 (Cost = 4)
- Employee C → Task 3 (Cost = 5)
- Employee D → Task 1 (Cost = 5)
- Task 4 تنفيذها يتم لن.

التكلفة الإجمالية :

$$6 + 4 + 5 + 5 = \boxed{20}$$

شرح كيفية الحل:

1. **جعل المشكلة متوازنة** :أضفنا موظفًا وهميًا لتحويل المصفوفة المستطيلة إلى مربع.
2. **خفض الصفوف والأعمدة** :قمنا بتطبيع المصفوفة عن طريق طرح أصغر قيمة في كل صف وعمود.
3. **تغطية الأصفار** :استخدمنا الحد الأدنى من الخطوط لتغطية الأصفار.
4. **تعديل المصفوفة** :إذا لم يكن عدد الخطوط يساوي عدد الوكلاء/المهام، قمنا بتعديل القيم غير المغطاة.
5. **تحديد التخصيص الأمثل** :حددنا التخصيص بحيث يكون هناك صفر واحد فقط في كل صف وعمود.

تمرين 4: مشكلة تخصيص غير متوازنة

المشكلة :

تريد شركة تصنيع تخصيص 3 عمال لـ 4 مهام إنتاجية .كل عامل لديه تكلفة مختلفة لكل مهمة، والهدف هو تخصيص العمال إلى المهام بطريقة تقلل من التكلفة الإجمالية .ومع ذلك، بسبب قلة عدد العمال، لن يتم تنفيذ جميع المهام.

بيانات المسألة :

المصفوفة أدناه تمثل تكاليف (بالدولار) لكل عامل لكل مهمة:

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4
Worker A	9	7	6	8
Worker B	8	6	7	5
Worker C	7	5	8	6

الحل باستخدام الخوارزمية المجرية(Hungarian Algorithm)

الخطوة الأولى :جعل المشكلة متوازنة

بما أن عدد العمال (3) أقل من عدد المهام(4) ، نضيف" عاملًا وهميًا (Worker D) "مع تكاليف صفرية لكل المهام .هذا يضمن أن تكون المصفوفة مربعة.

المصفوفة الجديدة:

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4
Worker A	9	7	6	8
Worker B	8	6	7	5
Worker C	7	5	8	6
Worker D	0	0	0	0

الخطوة الثانية :خفض الصفوف

نطرح أصغر قيمة في كل صف من جميع عناصر الصف:

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4
Worker A	3	1	0	2
Worker B	3	1	2	0
Worker C	2	0	3	1
Worker D	0	0	0	0

الخطوة الثالثة :خفض الأعمدة

نطرح أصغر قيمة في كل عمود من جميع عناصر العمود:

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4
Worker A	3	1	0	2
Worker B	3	1	2	0
Worker C	2	0	3	1
Worker D	0	0	0	0

(لا يتغير شيء لأن القيم الصفرية موجودة بالفعل في كل عمود).

الخطوة الرابعة :تغطية الأصفار بخطوط

نحاول تغطية جميع الأصفار باستخدام الحد الأدنى من الخطوط:

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4
Worker A	3	1	0	2
Worker B	3	1	2	0
Worker C	2	0	3	1
Worker D	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~

- خط أفقي على الصف الرابع.(Worker D)
- خط رأسي على العمود الثالث(Task 3)
- خط رأسي على العمود الثالث.(Task 3)
- خط رأسي على العمود الثالث.(Task 3)

عدد الخطوط هو 4 وعدد الوكلاء هو 4 لذلك لا نحتاج إلى تعديل المصفوفة

الخطوة السادسة :تحديد التخصيص الأمثل

نحدد التخصيص الأمثل بحيث يكون هناك صفر واحد فقط في كل صف وعمود:

	Task 1	Task 2	Task 3	Task 4	Assignment
Worker A	3	1	0	2	Worker A → Task 2
Worker B	3	1	2	0	Worker B → Task 4
Worker C	2	0	3	1	Worker C → Task 3
Worker D	0	0	0	0	Worker D → Task 1

النتيجة النهائية:

- Worker A → Task 3 (Cost = 6)
- Worker B → Task 4 (Cost = 5)
- Worker C → Task 2 (Cost = 5)
- Task 1 تنفيذها يتم لن.

التكلفة الإجمالية :

$$6 + 5 + 5 = \boxed{16}$$