Solution 1

Étape 1 : Séparation des variables
Nous cherchons des solutions de la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$. En substituant dans l'équation:

$$X(x)T'(t) = 17X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T'(t)}{17T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Étape 2 : Problème aux valeurs propres en x

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(\pi) = 0.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_n = n^2$ avec fonctions propres $X_n(x) = \sin(nx)$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Étape 3 : Équation en t

$$T'(t) = -17n^2T(t) \Rightarrow T_n(t) = B_n e^{-17n^2t}.$$

Étape 4 : Solution générale

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) e^{-17n^2t}.$$

Étape 5 : Condition initiale
A $t = 0$:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(nx) = g(x).$$

Les coefficients de Fourier sont :

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} 2\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{4}{\pi}\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{4}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right]. \end{aligned}$$

Pour n pair : $\cos(n\pi) = 1$, $\cos(n\pi/2) = (-1)^{n/2}$.
Pour n impair : $\cos(n\pi) = -1$, $\cos(n\pi/2) = 0$.
Solution (formelle) finale :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - (-1)^n\right]\sin(nx)e^{-17n^2t}. \tag{4}$$

On analyse comme d'habitude (faites-le) la convergence de la série (4) et des séries des dérivées pour établir que (4) est effectivement une solution du problème considéré.

Solution 2 (Conditions de Neumann)

1. Solution générale pour Neumann
Séparation $u(x,t) = X(x)T(t)$ donne :

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda.$$

Pour $X(x)$ avec $X'(0) = X'(L) = 0$:

$$\lambda_0 = 0,\ X_0(x) = 1; \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,\ X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),\ n \geq 1.$$

Pour $T(t)$:

$$T_0(t) = A_0, \quad T_n(t) = A_n e^{-k(n\pi/L)^2 t},\ n \geq 1.$$

Solution :

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k(n\pi/L)^2 t}. \tag{5}$$

Coefficients :

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

On analyse comme d'habitude (faites-le) la convergence de la série (5) et des séries des dérivées pour établir que (5) est effectivement une solution du problème considéré.
2. Limite quand $t \to \infty$
Tous les termes de la série (5) avec $n \geq 1$ décroissent exponentiellement vers 0. D'autre part, en vertu du M-test de Weierstrass, on montre (à vérifier) que la série (5) converge uniformément dans $\overline{Q} = [0, L] \times [0, +\infty[$. Par conséquent,

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t\to\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k(n\pi/L)^2 t}\right] = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)dx.$$

Interprétation physique : La température converge vers la température moyenne initiale. Comme la tige est isolée (pas de flux de chaleur aux extrémités), la chaleur totale est conservée et se répartit uniformément.

Solution 3 (Conditions périodiques)

1. Solution périodique
Conditions de périodicité impliquent :

$$\lambda_n = n^2, \quad X_n(x) = a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Solution :

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right] e^{-kn^2 t}. \tag{6}$$

Coefficients de Fourier :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin(nx)dx.$$

On analyse comme d'habitude (faites-le) la convergence de la série (6) et des séries des dérivées pour établir que (6) est effectivement une solution du problème considéré.
2. Limite quand $t \to \infty$
Raisonnant comme dans l'exercice précédent, on écrit

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t\to\infty} \left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right] e^{-kn^2t} = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x)dx.$$

Interprétation : Sur un fil circulaire isolé, la température converge vers la moyenne spatiale initiale (conservation de l'énergie thermique).

Solution 4 (Conditions aux limites non homogènes)

1. Déterminons la solution $u_*(x)$ du problème aux limites

$$\begin{cases} u_*''(x) = 0 & 0 < x < L, \\ u_*(0) = \alpha, & u_*(L) = \beta. \end{cases}$$

La résolution de l'équation différentielle ordinaire donne $u^*(x) = a + bx$, où les constantes a, b sont fixées par les conditions aux limites. Cela donne :

$$u_*(x) = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{L}x.$$

La différence

$$\tilde{u}(x,t) = u(x,t) - u_*(x) = u(x,t) - \alpha - \frac{\beta-\alpha}{L}x$$

est, par linéarité, une solution de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u_*}{\partial t} = -k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 u_*}{\partial x^2} = -k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_*}{\partial x^2}\right) = -k\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2},$$

du moment que $\frac{\partial u_*}{\partial t} = 0 = k\frac{\partial^2 u_*}{\partial x^2}$. De plus, $\tilde{u}$ satisfait clairement les conditions aux limites homogènes aux deux extrémités :

$$\tilde{u}(0,t) = 0 = \tilde{u}(L,t).$$

La donnée initiale doit être similairement adaptée :

$$\tilde{u}(x,0) = u(x,0) - u_*(x) = g(x) - \alpha - \frac{\beta-\alpha}{L}x := \tilde{g}(x). \tag{7}$$

Ainsi, le problème à valeurs initiales et aux limites homogènes résultant pour $\tilde{u}$ est :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L,\ t > 0, && (8)\\
\tilde{u}(0,t) &= 0, \quad \tilde{u}(L,t) = 0, \quad t \geq 0, && (9)\\
\tilde{u}(x,0) &= \tilde{g}(x), \quad 0 \leq x \leq L. && (10)
\end{aligned}$$

2. En résolvant le problème (8)-(10), nous écrivons $\tilde{u}(x,t)$ sous la forme d'une série de Fourier

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n e^{-k\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t} \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{11}$$

où les coefficients de Fourier sont spécifiés par la donnée initiale modifiée $\tilde{g}(x)$ en (7) :

$$\tilde{b}_n = \frac{2}{L}\int_0^L \tilde{g}(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

On vérifie de la même manière que précédemment que la série (11) fournit effectivement une solution du problème (8)-(10). La solution du problème mixte non homogène (1)-(3) a ainsi la forme série

$$u(x,t) = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n e^{-k\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t} \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{12}$$

3. Lorsque $t \to \infty$, le profil de température (12) décroît asymptotiquement vers le **profil d'équilibre**,

$$u(t,x) \longrightarrow u_*(x) = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{L}x,$$

au même taux exponentiellement rapide, gouverné par la première valeur propre $\lambda_1 = \pi^2/L^2$ – sauf si $\tilde{b}_1 = 0$, auquel cas le taux de décroissance est encore plus rapide.

Solution 5 (Équation de la chaleur inhomogène)

Nous cherchons une solution de la forme $u(x,t) = v(x,t) + w(t)$, où $v(x,t)$ est solution de l'équation de la chaleur homogène avec conditions de Neumann et $w(t)$ gére le terme source.
Partie homogène : Pour $v(x,t)$ solution de l'équation de la chaleur homogène avec conditions de Neumann :

$$v(x,t) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\pi x) e^{-k(n\pi)^2 t}. \tag{13}$$

Partie particulière : Substituant $u(x,t) = v(x,t) + w(t)$ dans l'équation de la chaleur inhomogène, il vient

$$\begin{aligned}
(v+w)_t - k(v+w)_{xx} = A\cos(\alpha t) \quad &\Longleftrightarrow \underbrace{(v_t - kv_{xx})}_{=0} + w'(t) = A\cos(\alpha t)\\
&\Longleftrightarrow w'(t) = A\cos(\alpha t)\\
&\Longleftrightarrow w(t) = \frac{A}{\alpha}\sin(\alpha t) + C.
\end{aligned}$$

Condition initiale :

$$u(x,0) = 1+\cos(2\pi x) \iff v(x,0)+w(0) = 1+\cos(2\pi x) \iff v(x,0) = 1+\cos(2\pi x) - C.$$

Substituant dans (13), on trouve

$$\frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\pi x) = 1 + \cos(2\pi x) - C \iff \begin{cases} \dfrac{C_0}{2} = 1 - C, \quad C_2 = 1, \\ C_n = 0,\ n \geq 1 \text{ avec } n \neq 2, \end{cases}$$

d'où

$$v(x,t) = 1 - C + \cos(2\pi x)e^{-4\pi^2 kt}.$$

Solution complète :

$$u(x,t) = v(x,t) + w(t) = 1 + \cos(2\pi x)e^{-4\pi^2 kt} + \frac{A}{\alpha}\sin(\alpha t).$$

Solution 6 *Exercice résolu en classe.*