المحور الثالث: مقاييس النزعة المركزية

المحور الثالث: مقاييس النزعة المركزية

تعتبر هذه المقاييس نقطة البداية لأي دراسة تحليلية إحصائية، وتهتم بتوفير مؤشرات كمية تمثل التوجه العام لقيم المتغير الكمي المدروس. تتنوع استخدامات مقاييس النزعة المركزية في عمليات الاستدلال الإحصائي مما ينتج عنه تنوع في طبيعة تلك المقاييس. ومن أهم هذه المقاييس نجد: الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال

- مفهوم النزعة المركزية: تميل البيانات الإحصائية إلى التمركز حول قيمة معينة، وكلما ابتعدنا عن هذه القيمة فان عدد المعلومات يبدأ في التناقص، نسمي هذه الظاهرة بالنزعة المركزية
- مقاييس النزعة المركزية: يعبر قياس النزعة المركزية عن مركز التوزيع الإحصائي، ولقياس هذه النزعة نستعمل المقاييس التالية:

1- **الوسط الحسابي**: يعتبر من أشهر مقاييس النزعة المركزية وأكثرها استخداما، يرمز له ب $\bar{X}$ ويحسب بالعلاقة التالية: $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X}{n}$

حيث: Xi تأخذ القيم من X_1 إلى X_n أي: $X_1, X_2, X_3.......X_n$، و n هو عدد القيم.

1-1- الوسط الحسابي للبيانات غير المبوبة: عندما تكون البيانات عبارة عن سلسلة احصائية $X_1 , X_2,....X_n$ يتم حساب الوسط الحسابي بالعلاقة $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Xi}{n}$

مثال: لدينا علامات عينة مكونة من 15 طالب في مقياس الإحصاء الوصفي كالتالي:

10 .09 .16 .13 .12 .14 .11 .06 .15 .13 .11 .08 .15 .05 .07

المطلوب: احسب المتوسط الحسابي للسلسلة:

$$\bar{X} = \frac{10+09+16+13+12+14+11+06+15+13+11+08+15+05+07}{15} = \frac{165}{15} = 11$$

ومنه فإن متوسط علامات الطلبة في مقياس الإحصاء هو 11

1-2- المتوسط الحسابي للبيانات المبوبة: إذا كانت البيانات مبوبة في شكل جدول توزيع تكراري، يتم حساب الوسط الحسابي كالتالي:

- في حالة متغير كمي منفصل: يتم حساب الوسط الحسابي باستخدام التكرار المطلق حسب العلاقة التالية:

$$\bar{X} = \frac{F1X1+F2X2+\cdots.....+FnXn}{\text{n}}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} FiXi}{\sum Fi}$$

مثال: لدينا جدول التوزيع التكراري التالي

Xi	Fi	Xi.Fi
6	3	18

7	4	28
12	5	60
23	2	46
المجموع	**14**	**152**

وبالتالي:

$$\bar{X} = \frac{152}{14} = 10.85$$

- في حالة متغير كمي متصل: لحساب الوسط الحسابي في حالة متغير كمي متصل نقوم أولا بتحديد مراكز الفئات $C1.\ C2 \ldots\ldots Cn$ ثم تطبيق العلاقة التالية:

$$\bar{X} = \frac{F_1C_1 + F_2C_2 + \cdots + F_nC_n}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} FiCi}{\sum Fi}$$

مثال: احسب المتوسط الحسابي للتوزيع التكراري التالي:

الفئات	]4-0]	]8-4]	]12-08]	]16-12]	المجموع
Fi	5	7	13	6	31

الحل: نقوم أولا بحساب مراكز الفئات Ci ثم Fi.Ci

الفئات	Fi	مركز الفئة Ci	Fi.Ci
]4-0]	5	2	10
]8-4]	7	6	42
]12-08]	13	10	130
]16-12]	6	14	84
المجموع	31	/	266

$$\bar{X} = \frac{266}{31} = 8.58$$

ملاحظات تخص الوسط الحسابي:

- يتأثر الوسط الحسابي بشكل كبير بقيم المشاهدات المتطرفة أو الشاذة سواء الكبيرة أو الصغيرة، وبالتالي فان الوسط الحسابي قد لا يكون معبرا بشكل حقيقي عن متوسط قيم المشاهدات. في هذه الحالة إما نقوم بإهمال القيمة المتطرفة ثم نحسب الوسط الحسابي أو نتخلى عن اعتماد هذا المقياس؛
- لا يستخدم المتوسط الحسابي في حالة البيانات الوصفية الاسمية أو الترتيبية؛
- المتوسط المرجح: إذا كان لدينا عينتين، حجم العينة الأولى n_1 وحجم العينة الثانية n_2، كان المتوسط الحسابي لكل منهما $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ على التوالي فيتم حساب المتوسط الحسابي لهما بترجيح كل متوسط بحجم العينة المحسوب منها كما يلي:

$$\bar{X} = \frac{\bar{X}1n1+\bar{X}2n2}{n1+n2} \quad \text{.............} \quad (1)$$

وفي حالة أكثر من عينتين تكون العلاقة: $\bar{X} = \frac{\bar{X}1n1+\bar{X}2n2+\bar{X}3n3+\cdots+\bar{X}knk}{n1+n \quad \cdots+nk}$

مثال: لدينا المتوسط الحسابي لمعدلات طلبة تخصصين مختلفين في نفس الشعبة كالتالي

$\bar{X}2 = 14$ ، $\bar{X}1 = 12$ ، حيث عدد الطلبة في التخصص الأول هو $n_1 = 32$، وفي التخصص الثاني هو $n_2=25$. فما هو الوسط الحسابي لمعدلات الطلبة في كلا التخصصين.

الحل: حساب المتوسط المرجح $\bar{X} = \frac{32.12+2 \;\; .14}{25+3} = 12.88$

لنفترض أن عدد الطلبة في التخصصين متساوي أي أن حجم العينة هو نفسه $n_1=n_2=25$

فيكون المتوسط الحسابي لهما هو: $\bar{X} = \frac{\bar{X}1+\bar{X}2}{2} = \frac{12+14}{2} = 13$

بتطبيق علاقة الوسط الحسابي المرجح رقم (1) في هذه الحالة : $\bar{X} = \frac{25.12+25.14}{25+25} = 13$

نجد نفس النتيجة أي انه في حالة تساوي حجم العينات نقوم فقط بتجميع المتوسطات ونقسم على عددها، أما في حالة اختلاف الحجم نقوم باستخدام العلاقة المرجحة (العلاقة رقم 1)

2- **الوسيط**: (**Median**) يعرف الوسيط على انه القيمة التي تتوسط مجموعة من القيم إذا تم ترتيبها ترتيبا تصاعديا أو تنازليا

1.2 حساب الوسيط في البيانات غير المبوبة: وهناك حالتين لتحديد الوسيط في هذه الحالة

أولا- في حالة عدد المفردات فردي (n فردي): ويحسب ترتيب الوسيط في هذه الحالة من العلاقة $\frac{n+1}{2}$

مثال: احسب الوسيط من البيانات التالية: 61،80،40،10،15،12،20

الحل: نقوم أولا بترتيب البيانات تصاعديا ثم نقوم بحساب العلاقة $\frac{(7+1)}{2} = 4$

80.61.40.20.15.12.10 ترتيب الوسيط هو 4، إذا الوسيط هو القيمة 20

ثانيا في حالة كون عدد المفردات زوجي (n زوجي) في هذه الحالة يوجد رقمين يمثلان الوسيط ويمكن إيجادهما بتطبيق العلاقة:

$\frac{n}{2}$; $\frac{n}{2}+1$ مثال: احسب الوسيط في المعطيات التالية : 19. 12. 15. 23 . 42. 84 73. 30

الحل: نقوم أولا بترتيب المعطيات ترتيبا تصاعديا 84. 73 .42 .30 .23 .19 .15. 12 ثم نقوم بإيجاد ترتيب الوسيط $\frac{8}{2}=4$، $\frac{8}{2}+1= 5$

2.2 الوسيط في حالة بيانات مبوبة (متغير كمي منفصل):

المحور الثالث: مقاييس النزعة المركزية

في حالة كون المتغير الإحصائي المدروس كمي منفصل، نقوم بإتباع الخطوات التالية لتحديد الوسيط

- نقوم أولا بحساب التكرار المتجمع الصاعد؛
- نحدد رتبة الوسيط $\frac{n}{2}$ ؛
- نبحث في العمود الخاص بالتكرار المتجمع الصاعد عن القيمة المساوية ل $\frac{n}{2}$ أو الأكبر منها مباشرة

$$Ni\uparrow \geq \frac{n}{2}$$

- القيمة Xi المقابلة لقيمة التكرار المتجمع الصاعد المحددة سابقا هي قيمة الوسيط.

مثال: لدينا جدول التوزيع التكراري التالي يمثل توزيع 20 أسرة حسب عدد أطفالها

عدد الأطفال Xi	عدد الأسر Fi	Ni↑
2	07	7
3	04	11
4	06	14
5	03	20
المجموع	20	

رتبة الوسيط هي $\frac{n}{2} = 10$.

لا توجد قيمة مساوية للرتبة في عمود التكرار المتجمع الصاعد وبالتالي نأخذ القيمة الأكبر مباشرة وهي: 11

قيمة Xi المقابلة ل11 هي: 03

وبالتالي: **Me= 03**

بالتالي: 50 % من الأسر عدد أطفالها اقل من 03

: 50 % من الأسر عدد أطفالها اكثر من 03

3.2 الوسيط في حالة بيانات مبوبة (فئات): لحساب الوسيط في حالة بيانات مبوبة في جدول توزيع تكراري يتم إتباع الخطوات التالية:

* تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد
* تحديد رتبة الوسيط $(\frac{n}{2}) = (\frac{\sum F}{2})$
* تحديد فئة الوسيط
* حساب الوسيط بالعلاقة $Med = A + \frac{\frac{n}{2} - N\uparrow 1}{N\uparrow 2 - N\uparrow 1} * L$

حيث: A هو الحد الأدنى لفئة الوسيط

$N \uparrow 1$ التكرار المتجمع الصاعد للفئة السابقة للفئة الوسيطية

$N \uparrow 2$ التكرار المتجمع الصاعد للفئة الوسيطية

L هو طول الفئة الوسيطية

المحور الثالث: مقاييس النزعة المركزية

او باستخدام العلاقة:

$$Med= A+\frac{\frac{n}{2}-N\uparrow 1}{F} *L$$

حيث A هو الحد الأدنى لفئة الوسيط

$N\uparrow 1$ التكرار المتجمع الصاعد للفئة السابقة للفئة الوسيطية

F التكرار المطلق للفئة الوسيطية

L هو طول الفئة الوسيطية

مثال: لدينا جدول التوزيع التكراري التالي:

المطلوب: احسب الوسيط

الحل: نقوم بتحديد التكرار المتجمع الصاعد

الفئات	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد
50.70	8	8
70.90	15	23
90.110	28	51
110.130	20	71
130.150	15	86
150.170	8	94
170.190	6	100
Σ	100	/

تحديد رتبة الوسيط: $\frac{n}{2}=\frac{100}{2}=50$

تحديد فئة الوسيط:

نبحث في عمود التكرار المتجمع الصاعد عن القيمة المساوية ل (50) او الأكبر منها مباشرة، وهي (51)، اذا الفئة الوسيطية هي (90- 110)

حساب الوسيط: $Med= A+\frac{\frac{n}{2}-N\uparrow 1}{N\uparrow 2-N\uparrow 1} *L =90+\frac{50-23}{51-23}*20=109.28$

ملاحظة: يمكن إيجاد الوسيط بيانيا من خلال تحديد إحداثيات نقطة تقاطع منحنى التكرار المتجمع الصاعد مع منحنى التكرار المتجمع النازل وتمثل الفاصلة قيمة الوسيط بينما الترتيبية هي رتبة الوسيط.

خصائص الوسيط:

- لا يتأثر الوسيط بالقيم المتطرفة؛
- يتأثر بعدد قيم المشاهدات، ويأخذ بعين الاعتبار موقع القيم وليس متوسطها؛
- يمكن إيجاده من جداول التوزيع التكراري ذات الفئات المفتوحة؛
- يمكن حسابه بيانيا (نقطة تقاطع منحنى التكرار المتجمع الصاعد والنازل)؛
- لا يعتمد في حسابه على جميع القيم ويتحدد بعدد البيانات وليس بقيمها.

3- **المنوال**: (**Mode**) يعرف بأنه القيمة الأكثر شيوعا أو تكرارا بين القيم، ويتم تحديده من خلال تحديد تكرار جميع القيم للمتغير محل الدراسة في البيانات غير المبوبة، بينما نقوم بالاستعانة بعلاقة رياضية في حالة البيانات المبوبة.

1.3 المنوال في البيانات الخام (غير المبوبة):هو القيمة الأكثر تكرارا ويمكن أن يأخذ أكثر من قيمة وهذا في حالة وجود قيمتين لهما نفس التكرار وهو اكبر تكرار.

مثال1: لدينا البيانات التالية تمثل أعمار اللاعبين المشاركين في آخر مباراة للمنتخب الوطني لكرة القدم:

36 .30 .29 .23. 26 .30 . 36 .34 .25 .30..31 المطلوب: اوجد المنوال؟

الحل: بما أن 30 هو العمر الذي تكرر أكثر من غيره (3 مرات) فان منوال العمر هو 30 سنة

مثال2: البيانات التالية تمثل تقييم أفراد اللجنة لأداء اللاعبين في رياضة ما

جيد، ممتاز، جيد، جيد جدا، جيد، ممتاز....البيانات في هذه الحالة هي بيانات وصفية ترتيبية، منوال التقييمات هو (جيد) لأنه الأكثر تكرار

2.3 المنوال في البيانات المبوبة والمتغير كمي منفصل: في حالة كون المتغير كمي منفصل نستنتج المنوال مباشرة من جدول التوزيع التكراري وهو قيمة Xi التي تقابل أكبر تكرار.

مثال: بالاعتماد على معطيات المثال الخاص بالأسر

عدد الأطفال Xi	عدد الأسر Fi
2	07
3	04
4	06
5	03

المجموع	20

$$Mod = 02$$

3.3 المنوال في حالة متغير كمي متصل:

يحسب المنوال في هذه الحالة بالعلاقة التالية

$$Mod = A + \frac{\Delta 1}{\Delta 1 + \Delta 2} * L$$

حيث:

A يرمز للحد الأدنى للفئة المنوالية

$\Delta 1$ هو الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة السابقة

$\Delta 2$ هو الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة الموالية

L وهو طول فئة المنوال

مثال: لدينا جدول التوزيع التكراري التالي:

فئات الدخل	10-	20-	30-	40-	50-	60-	70-80
عدد العمال	5	12	22	38	22	12	5

المطلوب: اوجد المنوال حسابيا ثم بيانيا.

الحل:

نقوم أولا بإعادة انشاء جدول التوزيع التكراري وتوضيح الحدود العليا للفئات:

الفئات	التكرارات
20-10	5
30-20	12
40-30	22
50-40	38
60-50	22
70-60	12
80-70	5

نقوم بتحديد الفئة المنوالية من خلال أكبر تكرار (الفئة المنوالية هي [50.40[ )، تكرار الفئة السابقة هو: 22، وتكرار الفئة الموالية هو:22، ثم نقوم بتطبيق المعادلة:

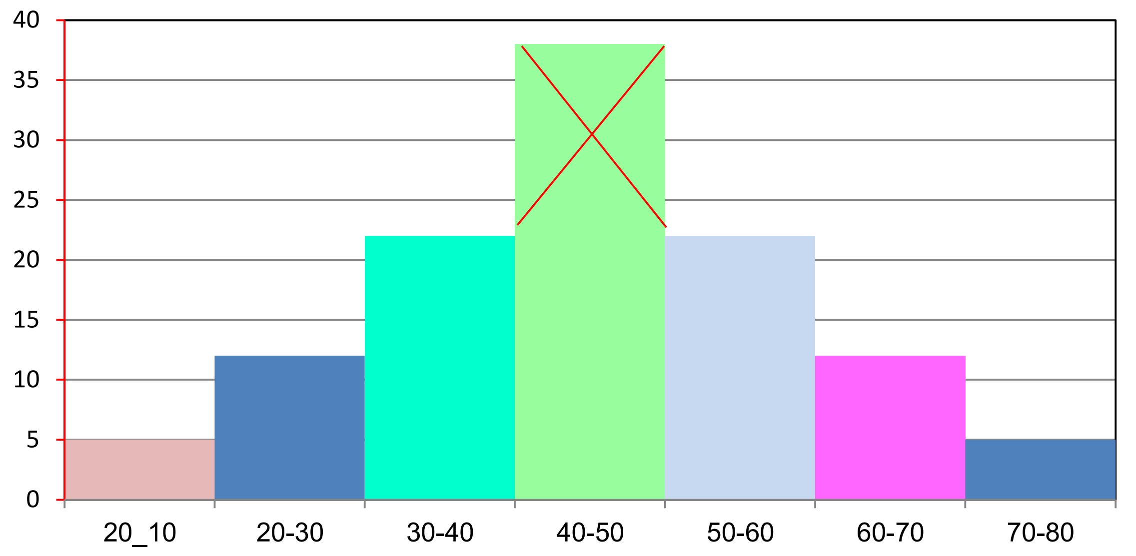
$$Mod = A + \frac{\Delta 1}{\Delta 1 + \Delta 2} * L$$

$$Mod = 40 + \frac{(38- \quad)}{(38-22)+(38- \quad)} * 10$$

$$Mod = 45$$

- إيجاد المنوال بيانيا: نقوم برسم مدرج تكراري، نبحث عن أطول عمود وهو يمثل الفئة المنوالية ثم نقوم بالربط بين حافتي هذا العمود مع حافتي العمودين المجاورين، نقطة التقاطع تمثل المنوال.

شكل(07): مدرج تكراري يوضح توزيع العمال حسب فئات الدخل



خصائص المنوال:

- لا يتأثر بالقيم المتطرفة الصغرى أو الكبرى؛
- يمكن حسابه في حالة البيانات الوصفية عند الرغبة في معرفة حالة الشيوع؛
- يمكن حسابه في حالة الجداول التكرارية المفتوحة؛
- يسهل تحديد المنوال بمجرد النظر إليه خاصة إذا كان حجم البيانات قليل؛
- يعتبر أكثر المقاييس توفيقا لأنه يعبر عن القيم التي تتجمع عندها البيانات أكثر من غيرها (تجمع البيانات لا يكون دائما معبرا أو ذا معنى وبالتالي فان معرفة الهدف من العملية الإحصائية يساهم في تحديد مدى أهمية المنوال في كل دراسة).