FEUILLE DE TD N°3

Exercice 1 Résoudre l'équation

$$u_t = 17u_{xx} \quad 0 < x < \pi,\ t > 0,$$

avec les conditions aux limites $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ pour $t \geq 0$, et les conditions initiales

$$u(x,0) = g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 2 & \pi/2 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Exercice 2 (Conditions de Neumann)

1. En utilisant la méthode de séparation des variables, trouver une solution (formelle) du problème (de Neumann)

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= 0 \quad 0 < x < L,\ t > 0, \\ u_x(0,t) = u_x(L,t) &= 0 \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= g(x) \quad 0 \leq x \leq L, \end{aligned}$$

   décrivant l'évolution de la chaleur d'une tige unidimensionnelle isolée.

2. Trouver $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ pour tout $0 < x < \pi$, et expliquer l'interprétation physique de votre résultat.

Exercice 3 (Conditions périodiques)

1. En utilisant la méthode de séparation des variables, trouver une solution (formelle) du problème de chaleur périodique suivant :

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= 0 \quad 0 < x < 2\pi,\ t > 0, \\ u(0,t) = u(2\pi,t), \quad u_x(0,t) &= u_x(2\pi,t) \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= g(x) \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \end{aligned}$$

   où g est une fonction périodique lisse. Ce système décrit l'évolution de la chaleur sur un fil circulaire isolé de longueur 2π.

2. Trouver $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ pour tout $0 < x < 2\pi$, et expliquer l'interprétation physique de votre résultat.

Exercice 4 (Conditions aux limites non homogènes) Considérons le problème mixte avec des conditions de Dirichlet non homogènes mais constantes,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < L,\ t > 0, && (1)\\
u(0,t) &= \alpha, \quad u(L,t) = \beta, \quad t \geq 0, && (2)\\
u(x,0) &= g(x), \quad 0 \leq x \leq L. && (3)
\end{aligned}$$

1. Montrer qu'en cherchant u sous la forme $u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + u_*(x)$, où $u_*(x)$ est une fonction harmonique sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions aux limites

$$u_*(0) = \alpha, \quad u_*(L) = \beta,$$

le problème (1)-(3) se ramène à un problème de Dirichlet homogène pour la fonction $\tilde{u}$.

2. Résoudre par séparation de variables le problème pour $\tilde{u}$, puis en déduire u.

3. Trouver $\lim_{t\to\infty} u(x,t)$ pour tout $0 < x < L$, et expliquer l'interprétation physique de votre résultat.

Exercice 5 (Équation de la chaleur inhomogène) Résoudre le problème de chaleur suivant :

$$\begin{aligned}
u_t - ku_{xx} &= A\cos(\alpha t) \quad 0 < x < 1,\ t > 0,\\
u_x(0,t) = u_x(1,t) &= 0 \quad t \geq 0,\\
u(x,0) &= 1 + \cos(2\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1.
\end{aligned}$$

Exercice 6 (Unicité par la méthode de l'énergie) Soient $\alpha, \beta \geq 0$, $k > 0$. En utilisant la méthode de l'énergie, prouver l'unicité pour le problème

$$\begin{aligned}
u_t - ku_{xx} &= f(x,t) \quad 0 < x < L,\ t > 0,\\
u(0,t) - \alpha u_x(0,t) = a(t), \quad u(L,t) + \beta u_x(L,t) &= b(t) \quad t \geq 0,\\
u(x,0) &= g(x) \quad 0 < x < L.
\end{aligned}$$