

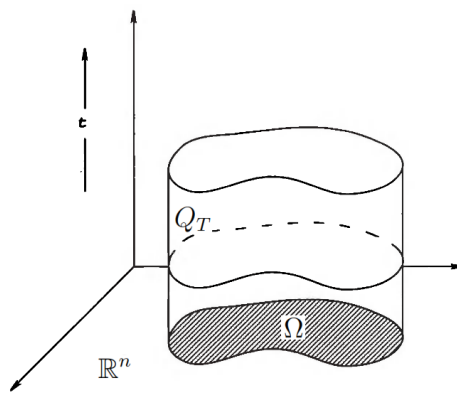
### 3 Principe du maximum pour l'équation de la chaleur

Le principe du maximum est également valable pour les équations paraboliques. Considérons l'équation de la chaleur pour une fonction  $u(x, t)$  dans un domaine **borné**  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  :

$$u_t = k\Delta u \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (40)$$

où l'on note ici  $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$ . Pour formuler le principe du maximum, on fixe un instant  $T > 0$  et on définit le cylindre parabolique

$$Q_T = \{(x, t) \mid x \in \Omega, 0 < t \leq T\} = \Omega \times ]0, T],$$



ainsi que la frontière parabolique de  $Q_T$  :

$$\Gamma_T = \overline{Q_T} \setminus Q_T = (\Omega \times \{0\}) \cup (\partial\Omega \times [0, T]),$$

i.e. la frontière de  $Q_T$ , à l'exception du couvercle supérieur  $\Omega \times \{T\}$ . On désigne également par  $C_1^2(Q_T)$  la classe des fonctions qui sont deux fois continûment différentiables dans  $Q_T$  par rapport à  $x$ , une fois continûment différentiables par rapport à  $t$  :

$$C_1^2(Q_T) = \{u : Q_T \rightarrow \mathbb{R} \mid u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j} \in C(Q_T) \text{ pour tous } 1 \leq i, j \leq n\}.$$

En particulier, si  $u \in C_1^2(Q_T)$  alors  $u, u_t, u_{x_i}, u_{x_i x_j}$  sont continues jusqu'au sommet  $\Omega \times \{T\}$ . Nous pouvons maintenant énoncer le principe du maximum pour l'équation de la chaleur.

**Théorème 1 (Principe du maximum)** Soit  $u \in C_1^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  une solution de l'équation de la chaleur (40) dans  $Q_T$ . Alors,

(i) Principe du maximum "faible" :  $u$  atteint son maximum (minimum) sur  $\Gamma_T$  :

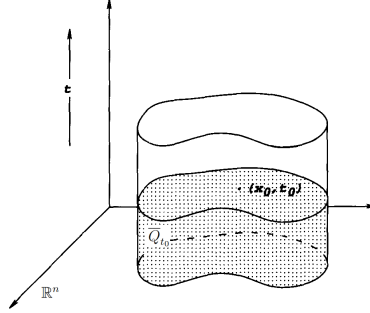
$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\Gamma_T} u \quad \text{et} \quad \min_{\overline{Q_T}} u = \min_{\Gamma_T} u.$$

(ii) Principe du maximum fort : de plus, si  $\Omega$  est connexe et il existe un point  $(x_0, t_0) \in Q_T$  tel que

$$u(x_0, t_0) = \max_{\overline{Q_T}} u \quad \text{ou} \quad u(x_0, t_0) = \min_{\overline{Q_T}} u,$$

alors

$u$  est constante dans  $\overline{Q_{t_0}}$ .



Comme conséquence directe du principe du maximum, on a le théorème suivant, qui garantit l'unicité et la stabilité de la solution du problème de Dirichlet pour l'équation de la chaleur.

**Théorème 2 (Unicité et stabilité sur des domaines bornés)** *Supposons que*

$$f \in C(Q_T), \quad g_i \in C(\overline{\Omega}) \quad \text{et} \quad h_i \in C(\partial\Omega \times [0, T]) \quad \text{pour } i = 1, 2.$$

Soient  $u_i \in C_1^2(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  une solution du problème

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} - k\Delta u_i &= f(x, t) & x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \\ u_i(x, 0) &= g_i(x) & x \in \Omega, \\ u_i(x, t) &= h_i(x, t) & x \in \partial\Omega, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

pour  $i = 1, 2$  respectivement. Posons

$$\delta = \max_{\overline{\Omega}} |g_1 - g_2| + \max_{\partial\Omega \times [0, T]} |h_1 - h_2|.$$

Alors

$$|u_1 - u_2| \leq \delta \quad (x, t) \in \overline{Q_T}. \quad (41)$$

**Preuve.** En posant  $w = u_1 - u_2$ , la preuve est la même que pour le théorème correspondant de l'équation de Poisson. Le cas particulier  $g_1 = g_2, h_1 = h_2$  implique immédiatement la partie unicité du théorème.  $\square$

## 4 Énergie et unicité

Examinons à nouveau le problème mixte

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = f(x, t) \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T, \quad (42)$$

$$u(x, 0) = g(x) \quad x \in \Omega, \quad (43)$$

$$u(x, t) = h(x, t) \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (44)$$

Nous avons précédemment invoqué le principe du maximum pour démontrer l'unicité, et maintenant nous proposons un argument alternatif fondé sur l'intégration par parties. Nous supposons, comme d'habitude, que  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert borné, et que  $\partial\Omega$  est  $C^1$ . Le temps final  $T > 0$  est donné.

**Théorème 3 (Unicité)** *Il existe au plus une solution  $u \in C_1^2(\overline{Q}_T)$  du problème (42)-(44).*

**Preuve.** Si  $\tilde{u}$  est une autre solution,  $w := u - \tilde{u}$  est une solution de

$$\frac{\partial w}{\partial t} - k\Delta w = 0 \quad x \in \Omega, \quad 0 < t \leq T,$$

$$w(x, 0) = 0 \quad x \in \Omega,$$

$$w(x, t) = 0 \quad x \in \partial\Omega, \quad 0 \leq t \leq T,$$

Posons

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} w^2(x, t) dx \quad (0 \leq t \leq T).$$

Alors,

$$E'(t) = \int_{\Omega} w w_t dx = k \int_{\Omega} w \Delta w dx = k \left( \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial w}{\partial \nu} ds - \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \right) = -k \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \leq 0,$$

d'où,

$$0 \leq E(t) \leq E(0) = \int_{\Omega} w^2(x, 0) dx = 0 \quad (0 \leq t \leq T).$$

Par conséquent,  $w = u - \tilde{u} \equiv 0$  dans  $Q_T$ .