

Chapitre 3 : Équations Paraboliques

Chaleur-Diffusion

Prof. N. Merazga

26 avril 2026

Introduction. Dans ce chapitre, on traite des équations paraboliques, et, en particulier, du principal prototype des équations paraboliques, qui est l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = 0 \quad k > 0, \quad (1)$$

et l'équation de la chaleur inhomogène

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = f, \quad (2)$$

toutes les deux considérées dans un cylindre $Q = \Omega \times]0, +\infty[$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert, et soumises à des conditions initiales et au bord appropriées.

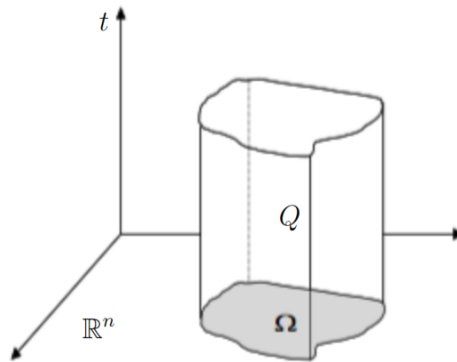


Figure 1. Cylindre spatio-temporel Q

Ici $t > 0$ représente le temps et $x \in \Omega$. L'inconnue est la fonction $u : \bar{\Omega} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$, et le Laplacien Δ est pris par rapport aux variables spatiales $x = (x_1, \dots, x_n)$: $\Delta u = \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}$. Dans (2) la fonction $f : \Omega \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est donnée.

Un principe directeur est que toute affirmation concernant les fonctions harmoniques conduit à un énoncé analogue (mais plus complexe) concernant les solutions des équations de la chaleur.

1 Interprétation physique

Pour simplifier, concentrons-nous sur l'équation de la chaleur *unidimensionnelle* ⁽¹⁾ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad k > 0. \quad (3)$$

Cette équation classique de la physique mathématique apparaît dans la théorie du flux de chaleur, c'est-à-dire *du transfert de chaleur par conduction* dans une barre ou un fil fin. La fonction $u(x, t)$ représente la température.

Même si l'on doit faire de nombreuses hypothèses simplificatrices, il est utile de voir comment l'équation (3) apparaît.

Supposons qu'une tige circulaire mince de longueur L ait une section transversale d'aire A et coïncide avec l'axe des x sur l'intervalle $[0, L]$ (Voir Figure 2). On suppose que :

- Le flux de chaleur à l'intérieur de la tige se produit uniquement dans la direction x .
- La surface latérale (courbe) de la tige est isolée, c'est-à-dire qu'aucune chaleur ne s'en échappe.
- Aucune chaleur n'est générée à l'intérieur de la tige par des moyens chimiques ou électriques.
- La tige est homogène, c'est-à-dire que sa masse par unité de volume ρ (masse volumique) est constante.
- La chaleur spécifique γ et la conductivité thermique K du matériau constituant la tige sont des constantes.

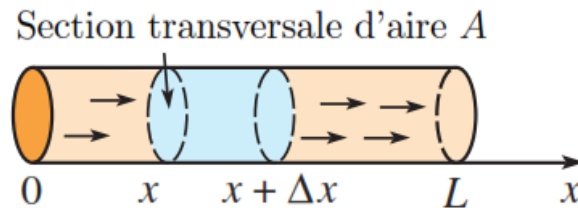


Figure 2. Flux thermique unidimensionnel

Pour obtenir l'EDP satisfaite par la température $u(x, t)$, on a besoin de deux lois empiriques de la conduction thermique :

(i) *La quantité de chaleur Q dans un élément de masse m est :*

$$Q = \gamma m u, \quad (4)$$

où u est la température de l'élément.

¹⁾ L'adjectif «unidimensionnel» fait référence au fait que x désigne une dimension spatiale.

(ii) Le taux de flux de chaleur Q_t à travers la section transversale indiquée dans Figure 2 est proportionnel à l'aire A de la section et à la dérivée partielle de la température par rapport à x :

$$Q_t = -K A u_x. \quad (5)$$

Puisque la chaleur s'écoule dans la direction où la température décroît, le signe négatif dans (5) est utilisé pour garantir que Q_t est positif lorsque $u_x < 0$ (flux de chaleur vers la droite) et négatif lorsque $u_x > 0$ (flux de chaleur vers la gauche). Si la tranche circulaire de la tige entre x et $x + \Delta x$ est très mince, alors $u(x, t)$ peut être prise comme température approximative en chaque point de l'intervalle. La masse de la tranche est $m = \rho(A \Delta x)$, et il découle de (4) que la quantité de chaleur qu'elle contient est :

$$Q = \gamma \rho A \Delta x u. \quad (6)$$

De plus, lorsque la chaleur s'écoule dans la direction positive de x , on voit à partir de (5) que la chaleur s'accumule dans la tranche au taux net :

$$-K A u_x(x, t) - [-K A u_x(x + \Delta x, t)] = K A [u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]. \quad (7)$$

En dérivant (6) par rapport à t , on voit que ce taux net est aussi donné par :

$$Q_t = \gamma \rho A \Delta x u_t. \quad (8)$$

En égalisant (7) et (8) :

$$u_t = \frac{K}{\gamma \rho} \cdot \frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x}. \quad (9)$$

En passant à la limite dans (9) lorsque $\Delta x \rightarrow 0$, on obtient finalement (3) sous la forme :

$$u_t = \frac{K}{\gamma \rho} u_{xx}.$$

Il est d'usage de poser $k = K/(\gamma \rho)$ et d'appeler cette constante positive la *diffusivité thermique*.

Afin de prendre en compte des influences internes ou externes agissant sur le système physique, l'équation (3) doit être modifiée. La forme plus générale de l'équation de la chaleur unidimensionnelle est :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t, u, u_x) = 0. \quad (10)$$

Par exemple, s'il y a transfert de chaleur à partir de la surface latérale d'une tige vers un milieu environnant maintenu à une température constante u_m , alors l'équation de la chaleur (10) devient :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(u - u_m) = 0, \quad (11)$$

où h est une constante.

Remarque 1 L'analyse d'une grande variété de phénomènes divers conduit au modèle mathématique (3), ou à ses généralisations (1) et (2) impliquant un plus grand nombre de variables spatiales. L'équation, (1) est parfois appelée l'équation de diffusion car la diffusion de substances dissoutes en solution est analogue au flux de chaleur dans un solide. La fonction $u(x, t)$ satisfaisant l'EDP représente dans ce cas la concentration de la substance dissoute.

Conditions initiales

Puisque les solutions de (3) dépendent du temps t , on peut prescrire ce qui se passe en $t = 0$; c'est-à-dire donner une *condition initiale (CI)*. Si $g(x)$ désigne la distribution initiale de température dans la tige dans Figure 2, alors une solution $u(x, t)$ de (3) doit satisfaire la condition initiale unique

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L.$$

Conditions aux limites

En général, il existe trois types de conditions aux limites associées à l'équation (3). Sur un bord, on peut spécifier les valeurs de l'une des quantités suivantes :

$$(i) \ u, \quad (ii) \ \frac{\partial u}{\partial \nu}, \quad (iii) \ \frac{\partial u}{\partial \nu} + hu, \quad h \text{ constante.}$$

Ici $\partial u / \partial \nu$ désigne la dérivée normale de u (la dérivée directionnelle de u dans la direction perpendiculaire au bord). Une condition aux limites du premier type (i) est appelée *condition de Dirichlet*, une condition du deuxième type (ii) est appelée *condition de Neumann*, et une condition du troisième type (iii) est connue sous le nom de *condition de Robin*.

Par exemple, pour $t > 0$ une condition typique à l'extrémité droite de la tige dans Figure 2 peut être :

$$(i)' \ u(L, t) = u_0, \quad u_0 \text{ constante,}$$

$$(ii)', \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0,$$

$$(iii)', \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = -h(u(L, t) - u_m), \quad h > 0 \text{ et } u_m \text{ constants.}$$

La condition (i)' signifie simplement que le bord $x = L$ est maintenu, par quelque moyen que ce soit, à une température constante u_0 pour tout $t > 0$. La condition (ii)' indique que le bord $x = L$ est *isolé*. D'après la loi empirique du transfert de chaleur, le flux de chaleur à travers une frontière (i.e. la quantité de chaleur par unité de surface et par unité de temps transmise à travers la frontière) est proportionnel à la valeur de la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ de la température u . Donc lorsque le bord $x = L$ est thermiquement isolé, aucune chaleur ne rentre dans la tige ni n'en sort, et donc

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0.$$

On peut interpréter (iii)' comme signifiant que la chaleur est *perdue* par l'extrémité droite de la tige par contact avec un milieu, tel que l'air ou l'eau, maintenu à température constante. En vertu de la loi de refroidissement de Newton, le flux de chaleur sortant de la tige est proportionnel à la différence entre la température $u(L, t)$ au bord et la température u_m du milieu environnant. On note que si la chaleur est perdue par l'extrémité gauche de la tige, la condition aux limites est :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = h(u(0, t) - u_m).$$

Le changement de signe algébrique est cohérent avec l'hypothèse que la tige est à une température plus élevée que le milieu entourant les extrémités, de sorte que $u(0, t) > u_m$ et $u(L, t) > u_m$.

Il est bien sûr possible de spécifier des conditions différentes aux deux extrémités de la tige simultanément. Par exemple, on pourrait avoir :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad u(L, t) = u_0, \quad t > 0,$$

auquel cas, la condition aux limites est appelée *mixte*.

On note que la condition aux limites (i)' est *homogène* si $u_0 = 0$; *non homogène* si $u_0 \neq 0$. La condition (ii)' est homogène; la condition (iii)' est homogène si $u_m = 0$ et non homogène si $u_m \neq 0$.

Problème mixte (IBVP)

Considérons une tige mince de longueur L dont la température initiale est $g(x)$ dans toute la tige, et dont les extrémités sont maintenues à température zéro pour tout $t > 0$.

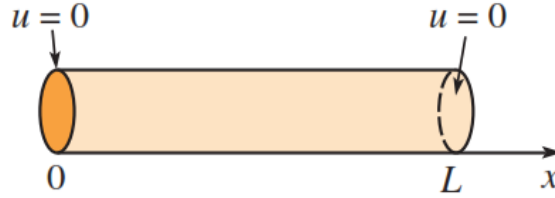


Figure 3. Trouver la température u dans une barre de longueur finie.

Si la tige satisfait les hypothèses évoquées dans les pages 2 et 3, alors la température $u(x, t)$ dans la tige est déterminée par le problème :

$$\text{Équation : } \frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (12)$$

$$\text{(CL) : } u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (13)$$

$$\text{(CI) : } u(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L, \quad (14)$$

appelé *problème mixte (IBVP)*. Le problème (12)–(14) est classifié comme *homogène* car l'équation aux dérivées partielles et les conditions aux limites sont homogènes.

Afin de rendre (13) cohérente avec (14), il est raisonnable de supposer satisfaite la *condition de compatibilité*

$$g(0) = g(L) = 0. \quad (15)$$

Dans la section suivante, nous montrons comment résoudre ce problème par la *méthode de séparation des variables* introduite dans le chapitre précédent.

2 Séparation des variables pour l'équation de la chaleur

Dans cette méthode, on cherche à trouver une solution particulière du problème (12)–(14) sous la forme du produit d'une fonction de x et d'une fonction de t :

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

À cet effet, on observe que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = XT', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T,$$

où les primes désignent la dérivation ordinaire.

En substituant $u(x, t) = X(x)T(t)$ dans l'équation aux dérivées partielles (12), on obtient :

$$XT' = kX''T.$$

Par division des deux membres par kXT , on sépare les variables :

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X}. \quad (16)$$

Puisque le membre gauche de (16) est indépendant de x et est égal au membre droit qui est indépendant de t , on conclut que les deux membres de l'équation sont indépendants de x et de t . Autrement dit, chaque membre de l'équation doit être une constante. Pour des raisons pratiques, il est commode de noter $-\lambda$ cette constante réelle de séparation. Des deux égalités :

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

on déduit les deux équations différentielles ordinaires linéaires :

$$X'' + \lambda X = 0 \quad 0 < x < L, \quad (17)$$

$$T' + k\lambda T = 0 \quad t > 0, \quad (18)$$

lesquelles sont couplées par la constante λ . Les conditions aux limites (13) deviennent

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \quad \text{et} \quad u(L, t) = X(L)T(t) = 0.$$

Comme ces dernières égalités doivent avoir lieu pour tout t , on doit avoir

$$X(0) = 0 \quad \text{et} \quad X(L) = 0.$$

Ces conditions aux limites homogènes associées à l'EDO homogène (17) constituent un *problème de Sturm–Liouville* :

$$X'' + \lambda X = 0, \quad 0 < x < L, \quad X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \quad (19)$$

Pour les trois cas possibles de λ : nul, négatif ou positif, i.e. $\lambda = 0$, $\lambda = -\omega^2 < 0$ et $\lambda = \omega^2 > 0$ où $\omega > 0$, l'équation (17) s'écrit respectivement :

$$X'' = 0, \quad (20)$$

$$X'' - \omega^2 X = 0, \quad (21)$$

$$X'' + \omega^2 X = 0. \quad (22)$$

Les solutions générales correspondantes sont :

$$X(x) = \alpha + \beta x, \quad (23)$$

$$X(x) = \alpha \cosh \omega x + \beta \sinh \omega x, \quad (24)$$

$$X(x) = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x, \quad (25)$$

où α, β sont des constantes réelles arbitraires.

Lorsqu'on applique les conditions aux limites $X(0) = 0$ et $X(L) = 0$ aux solutions (23) et (24), on n'obtient que $X(x) = 0$, ce qui mène au résultat inutilisable $u = 0$. En appliquant la condition $X(0) = 0$ à la solution (25), on obtient $\alpha = 0$, donc $X(x) = \beta \sin \omega x$. La deuxième condition $X(L) = 0$ implique alors :

$$X(L) = \beta \sin(\omega L) = 0. \quad (26)$$

Si $\beta \neq 0$, l'équation (26) est satisfaite lorsque $\sin(\omega L) = 0$, i.e. $\omega L = n\pi$, soit $\omega = n\pi/L$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Donc le problème (19) admet des solutions non triviales lorsque

$$\lambda_n = \omega_n^2 = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Les valeurs λ_n et les solutions correspondantes :

$$X_n(x) = \beta \sin \frac{n\pi}{L}x, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (27)$$

sont, respectivement, les *valeurs propres* et les *fonctions propres* du problème (19).

La solution générale de (18) correspondante à $\lambda = \lambda_n$ est

$$T_n(t) = \gamma e^{-k(n\pi/L)^2 t},$$

où γ est une constante réelle arbitraire. Ainsi, on a obtenu une suite de solutions séparées de l'équation de la chaleur (12) satisfaisant les conditions aux limites (13) :

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = A_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}, \quad (28)$$

où l'on a remplacé $\beta\gamma$ par A_n . Par le principe de superposition, la fonction :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad (29)$$

doit également, bien que formellement, satisfaire l'équation (12) et les conditions (13). Pour qu'elle satisfasse la condition initiale (14), il faudrait choisir les coefficients A_n de telle sorte que :

$$u(x, 0) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (30)$$

Cette dernière expression est le développement de Fourier-sinus de g . Par identification, on déduit que :

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \quad (31)$$

On conclut qu'une solution (formelle) du problème mixte décrit en (12), (13) et (14) est donnée par la série infinie :

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \sin \frac{n\pi x}{L} e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}. \quad (32)$$

Nous affirmons que sous l'hypothèse que le développement de Fourier-sinus de g converge vers g , la série (32) est effectivement une solution classique.

Exemple 1 *Considérons le problème :*

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (33)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad t \geq 0, \quad (34)$$

$$u(x, 0) = g(x) \quad 0 \leq x \leq \pi \quad (35)$$

où

$$g(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \pi/2, \\ \pi - x & \pi/2 \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad (36)$$

La solution formelle est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx e^{-n^2 t}, \quad (37)$$

où

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} x \sin nx dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi} \left[-\frac{(\pi - x) \cos nx}{n} - \frac{\sin nx}{n^2} \right]_{\pi/2}^{\pi} \\ &= \frac{4}{\pi n^2} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

Or,

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2m, \\ (-1)^{m+1} & n = 2m - 1, \end{cases} \quad (38)$$

où $m = 1, 2, \dots$. Par conséquent, la solution formelle est

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2} \sin[(2m-1)x] e^{-(2m-1)^2 t}. \quad (39)$$

Montrons que la série (39) est effectivement une solution classique.

Clairement, la fonction g est C^1 par morceaux et continue sur $[0, \pi]$ et de plus satisfait la condition de compatibilité $g(0) = g(\pi) = 0$. Par conséquent, d'après le test de Dirichlet-Jordan, le développement de Fourier-sinus de g converge vers g uniformément sur $[0, \pi]$.

Par ailleurs, pour tout $m \geq 1$, on a

$$|u_m(x, t)| = \frac{4}{\pi} \left| \frac{(-1)^{m+1}}{(2m-1)^2} \sin[(2m-1)x] e^{-(2m-1)^2 t} \right| \leq \frac{4}{\pi(2m-1)^2}.$$

Puisque, la série $\frac{4}{\pi} \sum_m \frac{1}{(2m-1)^2}$ converge, il s'ensuit par le M-test de Weierstrass que la série (39) converge uniformément vers une fonction continue dans la région

$$\bar{D} = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0\}.$$

En substituant u dans les conditions initiales et aux limites, et en utilisant le fait que le développement de Fourier-sinus de g converge uniformément sur $[0, \pi]$ vers g , nous déduisons que ces conditions sont effectivement satisfaites.

Il reste à montrer que la série (39) est dérivable par rapport à t , deux fois dérivable par rapport à x , et satisfait l'équation de la chaleur dans le domaine

$$D := \{(x, t) \mid 0 < x < \pi, t > 0\}.$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Montrons d'abord que la série (39) est dérivable par rapport à t , deux fois dérivable par rapport à x , et satisfait l'équation de la chaleur dans le sous-domaine

$$D_\varepsilon := \{(x, t) \mid 0 < x < \pi, t \geq \varepsilon\}.$$

En dérivant $u_m(x, t)$ par rapport à t , nous obtenons que

$$\left| \frac{\partial u_m}{\partial t}(x, t) \right| = \left| \frac{4(2m-1)^2}{\pi(2m-1)^2} \sin[(2m-1)x] e^{-(2m-1)^2 t} \right| \leq \frac{4}{\pi} e^{-(2m-1)^2 \varepsilon}, \quad \forall t \geq \varepsilon.$$

Puisque la série $(4/\pi) \sum e^{-(2m-1)^2\varepsilon}$ converge, il s'ensuit par le M -test de Weierstrass que pour tout $\varepsilon > 0$ la série $\sum \frac{\partial u_m}{\partial t}(x, t)$ converge vers $\frac{\partial u}{\partial t}$ uniformément dans D_ε . Comme chaque $\frac{\partial u_m}{\partial t}$ est une fonction continue sur D_ε , il en est de même pour $\frac{\partial u}{\partial t}$.

De même, on peut montrer que u a une dérivée continue du second ordre par rapport à x qui est obtenue par deux dérivations terme à terme. Donc,

$$u_t - u_{xx} = \sum_{m=1}^{\infty} (u_m)_t - \sum_{m=1}^{\infty} (u_m)_{xx} = \sum_{m=1}^{\infty} [(u_m)_t - (u_m)_{xx}] = 0,$$

où dans la dernière étape nous avons utilisé la propriété que chaque $u_m(x, t)$ est une solution de l'équation de la chaleur. Ainsi, u est une solution de l'EDP dans D_ε . Puisque ε est un nombre positif arbitraire, il s'ensuit que u est une solution de l'équation de la chaleur dans le domaine D .

Parce que le terme général u_m décroît exponentiellement dans D_ε , il est possible de dériver (39) terme à terme à tout ordre par rapport à x et t . La série correspondante converge uniformément dans D_ε vers la dérivée appropriée. Notez que k dérivations par rapport à x et ℓ dérivations par rapport à t contribuent au terme général de la série par un facteur d'ordre $O(m^{k+2\ell})$, mais à cause du terme exponentiel, la série correspondante est convergente.

La conclusion importante est que même pour une condition initiale non lisse g , la solution a une infinité de dérivées par rapport à x et t et elle est lisse dans le cylindre D . La non-régularité de la donnée initiale disparaît immédiatement (voir Figure 4). Cet effet de lissage est connu pour se produire également dans des problèmes paraboliques plus généraux, contrairement au cas hyperbolique, où les singularités se propagent le long des caractéristiques et en général persistent au cours du temps.

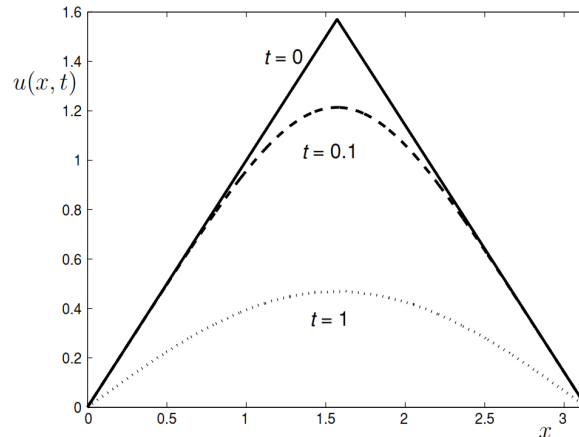


Figure 4. La fonction $u(x, t)$ de (39) pour $t = 0$, $t = 0.1$, et $t = 1$. Notez que la singularité à $t = 0$ est rapidement lissée. Les graphes ont été générés avec 200 termes dans le développement de Fourier.

Nous concluons cette section en mentionnant un autre résultat qualitatif qui peut être déduit de notre représentation concernant le comportement asymptotique de la solution (i.e. le comportement à la limite $t \rightarrow \infty$). Ce comportement est directement influencé par les conditions aux limites. En particulier, il dépend de la valeur propre minimale du problème aux valeurs propres correspondant. Dans notre cas, toutes les valeurs propres sont strictement positives, et de (29) et la convergence uniforme dans \bar{D} il s'ensuit que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad \forall 0 \leq x \leq L.$$

Ainsi, la température le long de la tige converge vers la température qui est imposée aux extrémités.