# Théorème de dérivation sous le signe somme

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non) et $J$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $(x, y) \longmapsto f(x, y)$.

On souhaite dériver par rapport à $y$ la fonction $F$ définie par :

$$F(y) = \int_I f(x, y)\, dx \tag{1}$$

## 1. Hypothèses de Leibniz (Cadre de Riemann/Lebesgue)

Pour que $F$ soit dérivable sur $J$ et que l'on puisse intervertir les symboles $\frac{d}{dy}$ et $\int$, les trois conditions suivantes doivent être satisfaites :

1. **Continuité et intégrabilité :** Pour tout $y \in J$, la fonction $x \longmapsto f(x, y)$ est continue par morceaux et intégrable sur $I$.

2. **Existence de la dérivée partielle :** La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe en tout point de $I \times J$, et pour tout $y \in J$, la fonction $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ est continue par morceaux sur $I$.

3. **Condition de domination (Cruciale) :** Il existe une fonction $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$, **intégrable** sur $I$, telle que :

$$\forall (x, y) \in I \times J, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq \phi(x) \tag{2}$$

   (Note : Il suffit que cette domination soit réalisée localement, c'est-à-dire sur tout segment compact contenu dans $J$).

## 2. Conclusion

Sous ces conditions, la fonction $F$ est de classe $C^1$ sur $J$ et sa dérivée est donnée par :

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\left(\int_I f(x, y)\, dx\right) = \int_I \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx \tag{3}$$

## 3. Remarques techniques

- Si l'intervalle $I = [a, b]$ est compact et que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur le pavé $[a, b] \times J$, la condition de domination est automatiquement satisfaite (théorème de continuité sur un compact).
- Cette propriété est très utile pour démontrer la régularité des solutions d'équations différentielles ou pour le calcul d'intégrales à paramètres complexes (comme la transformée de Fourier ou de Laplace).