

FEUILLE DE TD N°2

Exercice 1

- (a) Résolvez le problème aux limites $\Delta u = 1$ pour $x^2 + y^2 < 1$ et $u(x, y) = 0$ pour $x^2 + y^2 = 1$ directement. *Indication : la solution est un simple polynôme.*
- (b) Tracez votre solution, en l'interprétant comme le déplacement à l'équilibre d'un tambour circulaire sous l'effet d'une force gravitationnelle constante.

Exercice 2 Formulez le problème aux limites correspondant à l'équilibre thermique d'une plaque rectangulaire isolée sur deux de ses côtés, dont la température est de 0°C sur le bord supérieur et de 100°C sur le bord inférieur. Où pensez-vous que la température maximale soit située ? Quelle est sa valeur ? Pouvez-vous trouver une formule permettant de calculer la température à l'intérieur de la plaque ?

Indication : la solution est constante le long des lignes horizontales.

Exercice 3 Énoncez le problème aux limites de Dirichlet pour l'équation de Laplace sur le carré unité $0 \leq x, y \leq 1$, qui est satisfait par $u(x, y) = 1 + xy$.

Exercice 4 Supposons que $u(x, y)$ est une solution de l'équation de Laplace.

- (a) Montrez que toute translatée $U(x, y) = u(x - a, y - b)$, où $a, b \in \mathbb{R}$, est également une solution.
- (b) Montrez que la fonction tournée $U(x, y) = u(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta)$, où $-\pi < \theta \leq \pi$, est également une solution.
- (c) Montrez que la fonction redimensionnée $U(x, y) = u(x/\alpha, y/\alpha)$ pour toute constante $\alpha > 0$, est également une solution.

Exercice 5 Considérons le problème aux limites

$$\Delta u = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad u(0, y) = h(y), \quad u(a, y) = k(y),$$

sur le rectangle $R = \{0 < x < a, 0 < y < b\}$.

- (a) Expliquer comment utiliser la superposition linéaire pour résoudre le problème ci-dessus, en le scindant en quatre problèmes aux limites séparés pour lesquels chacune des solutions s'annule sur trois côtés du rectangle.
- (b) Écrire une formule de série pour la solution résultante.

Exercice 6 Prouvez l'identité de Green (7.20).

Exercice 7 Prouvez l'unicité dans les problèmes de Dirichlet et de Neumann pour l'équation de Helmholtz réduite

$$\Delta u - ku = 0$$

dans un domaine plan borné Ω , où k est une constante positive.

Indication : utiliser l'identité de Green (7.20).

Exercice 8 Trouvez la solution $u(x, y)$ de l'équation de Helmholtz réduite $\Delta u - ku = 0$ (k est un paramètre positif) dans le carré $0 < x, y < \pi$, où u satisfait la condition aux limites

$$u(0, y) = 1, \quad u(\pi, y) = u(x, 0) = u(x, \pi) = 0.$$

Exercice 9 Résolvez l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ dans le carré $0 < x, y < \pi$, sujette à la condition aux limites

$$u(x, 0) = u(x, \pi) = 1, \quad u(0, y) = u(\pi, y) = 0.$$

Exercice 10 Soit $u(x, y)$ une fonction harmonique non constante dans le disque $x^2 + y^2 < R^2$. On définit pour chaque $0 < r < R$

$$M(r) = \max_{x^2+y^2=r^2} u(x, y).$$

Prouvez que $M(r)$ est une fonction monotone croissante dans l'intervalle $(0, R)$.

Exercice 11 Trouvez une fonction harmonique $u(x, y)$ dans le carré $0 < x, y < \pi$ satisfaisant les conditions aux limites de Neumann

$$u_y(x, \pi) = x - \pi/2, \quad u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = u_y(x, 0) = 0.$$

Exercice 12 Trouvez une fonction u , harmonique dans le disque $x^2 + y^2 < 6$, et satisfaisant $u(x, y) = y + y^2$ sur la frontière du disque. Écrivez votre réponse dans un système de coordonnées cartésiennes.

Exercice 13 Résolvez l'équation de Laplace $\Delta u = 0$ dans le domaine $x^2 + y^2 > 4$, sujette à la condition aux limites $u(x, y) = y$ sur $x^2 + y^2 = 4$, et la condition de décroissance

$$\lim_{|x|+|y| \rightarrow \infty} u(x, y) = 0.$$

Exercice 14 Résolvez le problème

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 & 0 < x < 2\pi, \quad -1 < y < 1, \\ u(x, -1) &= 0, \quad u(x, 1) = 1 + \sin 2x & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ u_x(0, y) &= u_x(2\pi, y) = 0 & -1 < y < 1. \end{aligned}$$

Exercice 15 Partant de la formule de Poisson, prouvez que toute fonction harmonique non négative dans le disque de rayon a satisfait

$$\frac{a-r}{a+r}u(0,0) \leq u(r,\theta) \leq \frac{a+r}{a-r}u(0,0), \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Remarque : Ce résultat est appelé l'inégalité de Harnack. Il dit qu'une fonction harmonique ne peut pas avoir de variations trop rapides.