Intégrale Double

Rectangle

Soit f une fonction continue sur un rectangle $D = [a,b] \times [c,d]$ de $\mathbb{R}^2$ dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Alors,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy.$$

7.1. Propriétés des intégrales doubles

1. Soient f, g deux fonction continue sur D, on a

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)\,dxdy = \alpha \iint_D f\,dxdy + \beta \iint_D g\,dxdy.$$

2. Si D_1 et D_2 deux rectangles tels que $\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{D}_2 = \emptyset$, alors

$$\iint_{\mathrm{D}_1 \cup \mathrm{D}_2} f\,dxdy = \iint_{\mathrm{D}_1} f\,dxdy + \iint_{\mathrm{D}_2} f\,dxdy.$$

3. Si $f(x,y) \geq 0$ sur D $(f \neq 0)$ alors

$$\iint_D f\,dxdy > 0.$$

4. Si $f \leq g$ $\forall (x,y) \in D$, alors

$$\iint_D f\,dxdy \leq \iint_D g\,dxdy.$$

5.

$$\left|\iint_D f\,dxdy\right| \leq \iint_D |f|\,dxdy.$$

Exemples. Calculer les intégrales suivantes sur les domaines indiqués

1. $\iint_D (1 + x - y)\,dxdy,$ $\quad$ $\mathrm{D} = [-1,1] \times [-1,0].$
2. $\iint_D (2x + y^2)\,dxdy,$ $\quad$ $\mathrm{D} = [0,1] \times [0,1].$
3. $\iint_D \cos(x + y)\,dxdy,$ $\quad$ $\mathrm{D} = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, \pi].$
4. $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2},$ $\quad$ $\mathrm{D} = [0,1] \times [1,2].$

Solution

1. $$\iint_D (1 + x - y)\,dxdy = \int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (1 + x - y)\,dxdy = \int_{-1}^0 \left[x + \frac{1}{2}x^2 - yx\right]_{-1}^1 dy$$

$$= \int_{-1}^0 \left[\left(1 + \frac{1}{2} - y\right) - \left(-1 + \frac{1}{2} + y\right)\right] dy$$

$$= \int_{-1}^0 (2 - 2y)dy = [2y - y^2]_{-1}^0 = 3.$$

2. $\iint_D (2x+y^2)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (2x+y^2)\,dxdy = \int_0^1 [x^2+y^2x]_0^1 dy$

$$= \int_0^1 [(1+y^2)-(0)]dy = \int_0^1 (1+y^2)dy = \left[y+\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{4}{3}.$$

3. $\iint_D \cos(x+y)\,dxdy = \int_0^\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y)\,dxdy = \int_0^\pi [\sin(x+y)]_0^{\frac{\pi}{2}} dy$

$$= \int_0^\pi \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+y\right)-\sin(y)\right]dy = \left[-\cos\left(\frac{\pi}{2}+y\right)+\cos(y)\right]_0^\pi$$

$$= \left(-\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+\cos(\pi)\right)-\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(0)\right) = -2.$$

4. $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \int_0^1 \frac{dxdy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left[-\frac{1}{x+y}\right]_0^1 dy$

$$= \int_1^2 \left[-\frac{1}{y+1}+\frac{1}{y}\right]dy = [-\ln(y+1)+\ln(y)]_1^2$$

$$= (-\ln(3)+\ln(2))-(-\ln(2)+\ln(1)) = 2\ln(2)-\ln(3).$$

<u>Théorème</u> (Fubini)

Soit f une fonction intégrable sur D. Alors

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

De plus si $f(x,y)=h(x)g(y)$ alors

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \left(\int_a^b h(x)dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

<u>Exemples</u>. Calculer les intégrales suivantes sur les domaines indiqués

1. $\iint_D e^{x+y}\,dxdy$, D $=[0,1]\times[0,2]$.
2. $\iint_D (x^3y+xy)\,dxdy$, D $=[0,1]\times[0,1]$.
3. $\iint_D \sin(x+y)\,dxdy$, D $=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times[0,\pi]$.
4. $\iint_D \frac{dxdy}{(1+x)(1+y)}$, D $=[0,1]\times[0,1]$

<u>Solution</u>

1. $\iint_D e^{x+y}\,dxdy = \int_0^2 \int_0^1 e^x e^y\,dxdy = \left(\int_0^1 e^x dx\right)\left(\int_0^2 e^y dy\right)$

$$= [e^x]_0^1[e^y]_0^2 = (e-1)(e^2-1).$$

2. $\iint_D (x^3y+xy)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (x^3+x)y\,dxdy = \left(\int_0^1 (x^3+x)dx\right)\left(\int_0^1 ydy\right)$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}.$$

4. $\iint_D (x^3y+xy)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dxdy}{(1+x)(1+y)} = \left(\int_0^1 \frac{dx}{1+x}\right)\left(\int_0^1 \frac{dx}{1+y}\right)$

$$= [\ln(x+1)]_0^1[\ln(y+1)]_0^1 = (\ln(2)-\ln(1))(\ln(2)-\ln(1)) = (\ln(2))^2.$$

<u>Théorème.</u> 2.

Soit f une fonction continue sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$. On suppose que ce domaine D définie par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Alors f est intégrable sur D et on a

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right) dx$$

<u>Théorème.</u> 2.

Soit f une fonction continue sur un domaine D de $\mathbb{R}^2$. On suppose que ce domaine D définie par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \vartheta_1(y) \leq x \leq \vartheta_2(y)\}.$$

Alors f est intégrable sur D et on a

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \int_c^d \left(\int_{\vartheta_1(y)}^{\vartheta_2(y)} f(x, y)\, dx\right) dy$$

<u>Exemples</u>. Calculer les intégrales suivantes sur les domaines indiqués

1. $\iint_D (x + y)\, dxdy$, $\quad$ $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2x\}$.
2. $\iint_D x\cos(y)\, dxdy$, $\quad$ $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ x^2 \leq y \leq x\}$.
3. $\iint_D (xy + y^3)\, dxdy$, $\quad$ $\mathrm{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 4, \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y}\right\}$.

<u>Solution</u>

1. $$\iint_D (x + y)\, dxdy = \int_0^1 \left(\int_x^{2x} (x + y)\, dy\right) dx = \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_x^{2x} dx$$
$$= \int_0^1 \left[(2x^2 + 2x^2) - \left(x^2 + \frac{1}{2}x^2\right)\right]_x^{2x} dx$$
$$= \frac{5}{2}\int_0^1 x^2 dx = \frac{5}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

2. $$\iint_D x\cos(y)\, dxdy = \int_0^1 x\left(\int_{x^2}^x \cos(y)\, dy\right) dx = \int_0^1 [\sin(y)]_{x^2}^x dx$$
$$= \int_0^1 x\sin(x)\, dx - \int_0^1 x\sin(x^2)\, dx$$

$$\int_0^1 x\sin(x)\, dx = [-x\cos(x)]_0^1 + \int_0^1 \cos(x)\, dx = -\cos(1) + [\sin(x)]_0^1 = -\cos(1) + \sin(1)$$

$$-\int_0^1 x\sin(x^2)\, dx = \left[\frac{1}{2}\cos(x^2)\right]_0^1 = \frac{\cos(1) - 1}{2}$$

Donc,

$$\iint_D x\cos(y)\, dxdy = \sin(1) - \frac{\cos(1) + 1}{2}$$

TD

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes sur les domaines indiqués

1. $\iint_D (x-3y^2)dxdy$, $\quad$ D = [0,2] × [1,2].
2. $\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}dxdy$, $\quad$ D = [0,1] × [0,2].
3. $\iint_D \frac{dxdy}{(1+x)(1+y)}$, $\quad$ D = [0,1] × [0,1].
4. $\iint_D \frac{x\sin(y)}{1+x^2}dxdy$, $\quad$ D = [0,1] × [0, π].
5. $\iint_D (16-x^2-2y^2)dxdy$, $\quad$ D = [0,2] × [0,2].

Exercice 2. Calculer les intégrales suivantes sur les domaines indiqués

1. $\int_1^2 \int_0^{\frac{1}{y}} ye^{xy}\,dxdy = \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{1}{y}} ye^{xy}\,dx\right)dy.$
2. $\int_1^2 \int_{y-1}^{y+1} 2y\,dxdy = \int_1^2 \left(\int_{y-1}^{y+1} 2y\,dx\right)dy.$
3. . $\int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{(x+y)^2}dydx = \int_1^2 \left(\int_0^{1-x} \frac{dy}{(x+y)^2}\right)dx$

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes sur les domaines indiqués

1. $\iint_D (x^2+y^2)dxdy$,
2. $\iint_D xy(x+y)dxdy$,

Où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\,, x+y \leq 1\}.$$

3. $\iint_D \frac{dxdy}{(x+y)^2}$,

Où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\,, 1 \leq x+y \leq 2\}.$$

Changement de variable dans une intégrale double

<u>Théorème</u>

Soit

$$\mathrm{I} = \iint_D f(x,y)\,dxdy.$$

On suppose que par le changement de variables

$$\begin{cases} x = \phi(u,v) \\ \\ y = \psi(u,v) \end{cases} \qquad (u,v) \in \Delta, \qquad \phi,\psi \in C^1 \quad .$$

D est en bijection avec Δ, c'est à dire que l'on a l'équivalence

$$(x = \pi(u,v), y = \vartheta(u,v)) \in D \Leftrightarrow (\mu,\vartheta) \in \Delta.$$

Alors,

$$\mathrm{I} = \iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f\big(a(u,v),b(u,v)\big)\,|J(u,v)|dud\vartheta.$$

Où

$$|J(u,v)| = \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

<u>Passage aux coordonnées polaires</u>

Le changement de variables en coordonnées polaires correspond à poser

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \quad .$$

Donc

$$|J(r,\theta)| = |(r,\theta)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r\cos^2(\theta) + r\sin^2(\theta) = r.$$

Alors,

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))\,rdrd\theta.$$

<u>Exemples</u>. Calculer les intégrales suivantes sur les domaines indiqués

1. $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}$, $\qquad \mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :, x^2+y^2 \le 1\}$.
2. $\displaystyle\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$, $\qquad \mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\}$.
3. $\displaystyle\iint_D \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $\qquad \mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :, x \ge 0, y \ge 0, x^2+y^2 \le 1\}$.

Solution

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_\Delta f(r\cos(\theta)\,, r\sin(\theta))\, r drd\theta.}$$

1. $I_1 = \iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2+1}$, $\quad$ D $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :, x^2+y^2 \le 1\}$.

En posant

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ r > 0\,, \theta \in [0,2\pi] \end{cases}.$$

Alors,

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1} \Leftrightarrow f(r\cos(\theta)\,, r\sin(\theta)) = \frac{1}{r^2+1}.$$

Et

$$x^2+y^2 = r^2 \le 1 \Leftrightarrow 0 < r \le 1.$$

D'où,

$$\Delta = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 :, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 < r \le 1\}$$

Donc,

$$I_1 = \iint_\Delta \frac{r}{r^2+1} drd\theta = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{r^2+1} d\theta dr = \left(\int_0^1 \frac{r}{r^2+1} dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln(r^2+1)\right]_0^1 [\theta]_0^{2\pi} = \pi \ln(2).$$

2. $I_2 = \iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$, $\quad$ D $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\}$.

En posant

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ r > 0\,, \theta \in [0,2\pi] \end{cases}.$$

Alors,

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \Leftrightarrow f(r\cos(\theta)\,, r\sin(\theta)) = e^{-r^2}.$$

Et

$$x^2+y^2 = r^2 \le 4 \Leftrightarrow 0 < r \le 2.$$

D'où,

$$\Delta = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 :, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 < r \le 2\}$$

Donc,

$$I_2 = \iint_\Delta re^{-r^2} drd\theta = \int_0^2 \int_0^{2\pi} re^{-r^2}\, d\theta dr = \left(\int_0^1 re^{-r^2} dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^2 [\theta]_0^{2\pi} = \left(-\frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}\right) 2\pi = (1-e^{-4})\pi.$$

3. $I_3 = \iint_D \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, $\qquad$ $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :, x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$.

En posant

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \quad r > 0\,.$$

Alors,

$f(x,y) = \cos\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \Leftrightarrow f(r\cos(\theta)\,, r\sin(\theta)) = \cos(r)$.

Pour r et θ.

Comme $x \geq 0$ et $y \geq 0$, alors $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Et

$x^2+y^2 = r^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 < r \leq 1$.

D'où,

$$\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 :, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 < \ r \leq 1\right\}$$

Donc,

$$I_3 = \iint_\Delta r\cos(r)\,drd\theta = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos(r)\,d\theta dr = \left(\int_0^1 r\cos(r)\,dr\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\right) =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^2 [\theta]_0^{2\pi} = \left(-\frac{1}{2}e^{-4} + \frac{1}{2}\right)2\pi = (1-e^{-4})\pi.$$

4. $I_4 = \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, $\qquad$ $\mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :, x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2-2x \leq 0\}$.

En posant

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \quad r > 0\,.$$

Alors,

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow f(r\cos(\theta)\,, r\sin(\theta)) = r$.

Pour r et θ.

$$x^2+y^2-2x = r^2 - 2r\cos(\theta) \ \leq 0 \Longrightarrow r^2 < 2r\cos(\theta)$$
$$\Leftrightarrow 0 < r \leq 2\cos(\theta). \qquad (1)$$

De (1), on a

$\cos(\theta) > 0 \Leftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. $\qquad$ (2).

D'où,

$$\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 :, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 < \ r \leq 2\cos(\theta)\right\}$$

Donc,

$$I_4 = \iint_\Delta r^2\,drd\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\cos(\theta)} r^2\,dr\right) d\theta = \int_0^1 \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^{2\cos(\theta)} d\theta$$

$$= \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(\theta)\,d\theta = \frac{8}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta) - \cos(\theta)\sin^2(\theta))d\theta\,.$$

$$= \frac{8}{3}\left[\sin(\theta) - \frac{1}{3}\sin^3(\theta)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{32}{9}.$$

Remarque

$\cos^3(\theta) = \cos(\theta)\cos^2(\theta) = \cos(\theta)\,(1-\sin^2(\theta)) = \cos(\theta) - \cos(\theta)\sin^2(\theta)$

5. $I_2 = \iint_D y^2\, dxdy, \qquad \mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq 0, 2 \leq\ x^2 + y^2 \leq 4\}.$

En posant

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases} \quad r > 0\,.$$

Alors,

$f(x,y) = y^2 \Leftrightarrow f(r\cos(\theta)\,, r\sin(\theta)) = r^2\sin^2(\theta).$

Pour r et θ.

$$x^2 + y^2 = r^2 \Leftrightarrow 2 \leq\ r^2 \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} \leq\ r \leq 2.$$

Comme $y \geq 0$, on a

$y = r\sin(\theta) \geq 0 \Longrightarrow \sin(\theta) \geq 0 \Longrightarrow \theta \in [0,\pi]$

D'où,

$$\Delta = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \colon , 0 \leq \theta \leq \pi, \sqrt{2} \leq\ r \leq 2\right\}$$

Donc,

$$\begin{aligned} I_5 = \iint_\Delta r^2\sin^2(\theta)\, drd\theta &= \int_0^2\int_0^{2\pi} r^3\sin^2(\theta)\, d\theta dr = \left(\int_{\sqrt{2}}^2 r^3 dr\right)\left(\int_0^\pi \sin^2(\theta)\, d\theta\right) \\ &= \left(\int_{\sqrt{2}}^2 r^3 dr\right)\left(\frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos(2\theta))\, d\theta\right) \\ &= \left[\frac{1}{4}r^4\right]_{\sqrt{2}}^2 \left[\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)\right]_0^\pi \\ &= \left(\frac{16-4}{4}\right)\left(\frac{1}{2}(\pi - 0)\right) = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Remarque

$\sin^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}.$

<u>**Td**</u>

<u>**Exercice**</u>. Calculer les intégrales suivantes sur les domaines indiqués

1. $\iint_D \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \qquad \mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$
2. $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy, \qquad \mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4\}.$
3. $\iint_D \dfrac{dxdy}{x^2+y^2+1}, \qquad \mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}.$
4. $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy, \qquad \mathrm{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}.$

Intégrale Triple

Parallélépipède

Soit f une fonction continue à trois variables sur un Domaine $d=[a,b]\times[c,d]\times[e,m]$ de $\mathbb{R}^3$ c.-à-d.

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : a\le x\le b, c\le y\le d, e\le z\le m\}.$$

Alors,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdy\,dz=\int_e^m\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Théorème (Fubini)

Soit f une fonction intégrable sur D. Alors

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdy\,dz=\int_e^m\left(\int_c^d\left(\int_a^b f\,dx\right)dy\right)dz=\cdots.$$

De plus si $f(x,y,z)=u(x)v(y)w(z)$ alors

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\left(\int_a^b u(x)dx\right)\left(\int_c^d v(y)\,dy\right)\left(\int_e^m w(z)\,dz\right).$$

Exemples 1. Calculer les intégrales suivantes sur les domaines indiqués

1. $\iiint_D (x+3yz)dxdydz\,,\qquad \mathrm{D}=[0,1]\times[1,2]\times[2,3].$
2. $\iiint_D 2(xy+yz+xz)dxdydz\,,\qquad \mathrm{D}=[0,1]\times[0,1]\times[0,1].$
3. $\iiint_D e^{x+y+z}\,,\qquad \mathrm{D}=[0,1]\times[0,2]\times[0,3].$
4. $\iiint_D 12xyz^2dxdydz\,,\qquad \mathrm{D}=[0,1]\times[-1,2]\times[0,3].$
5. $-\iiint_D \cos(x)\sin(y)\,dxdydz\,,\qquad \mathrm{D}=\left[\frac{\pi}{4},\pi\right]\times\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]\times[0,2\pi].$
6. $\iiint_D \sin(x+y+z)\,dxdydz\,,\qquad \mathrm{D}=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]^3.$

Solution.

1.

$$I_1=\iiint_D (x+3yz)dxdydz=\int_2^3\int_1^2\int_0^1 f(x,y,z)\,dxdydz=\int_2^3\left[\int_1^2\left(\int_0^1(x+3yz)\,dx\right)dy\right]dz$$

$$=\int_2^3\left[\int_1^2\left[\frac{1}{2}x^2+3yzx\right]_0^1dy\right]dz=\int_2^3\left[\int_1^2\left(\frac{1}{2}+3yz\right)dy\right]dz=\int_2^3\left[\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}y^2z\right]_1^2dz$$

$$=\int_2^3\left(\frac{1}{2}+\frac{9}{2}z\right)dz=\left[\frac{1}{2}z+\frac{9}{2}z^2\right]_2^3=\frac{47}{4}.$$

2.

$$I_2=\iiint_D (x+3yz)dxdydz=\int_2^3\int_1^2\int_0^1 f(x,y,z)\,dxdydz=\int_2^3\left[\int_1^2\left(\int_0^1(x+3yz)\,dx\right)dy\right]dz$$

$$=\int_2^3\left[\int_1^2\left[\frac{1}{2}x^2+3yzx\right]_0^1dy\right]dz=\int_2^3\left[\int_1^2\left(\frac{1}{2}+3yz\right)dy\right]dz=\int_2^3\left[\frac{1}{2}y+\frac{3}{2}y^2z\right]_1^2dz$$

$$= \int_2^3 \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2} z\right) dz = \left[\frac{1}{2} z + \frac{9}{2} z^2\right]_2^3 = \frac{47}{4}.$$

3. D'âpre le théorème **de Fubini**

$$I_3 = \iiint_D e^{x+y+z} dxdydz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y+z}\, dxdydz = \left(\int_0^1 e^x dx\right)\left(\int_0^1 e^y dy\right)\left(\int_0^1 e^z\, dz\right)$$

$$= \left[\ e^x\right]_0^1 \left[\ e^y\right]_0^1 \left[\ e^z\right]_0^1 = (e-1)^3.$$

4. D'âpre le théorème **de Fubini**

$$I_4 = \iiint_D 12xyz^2 dxdydz = 12 \int_0^1 \int_{-1}^2 \int_0^3 xyz^2\, dxdydz = 12 \left(\int_0^1 xdx\right)\left(\int_{-1}^2 ydy\right)\left(\int_0^3 z^2\, dz\right)$$

$$= \left[\frac{1}{2} x^2\right]_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2\right]_{-1}^2 \left[\frac{1}{3} z^3\right]_0^3 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(2 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{27}{3}\right) = 81.$$

<u>Théorème.</u> 2.

Soit f une fonction continue sur un domaine D de $\mathbb{R}^{\mathbf{2}}$**.** On suppose que ce domaine D définie par

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\ \}.$$

Alors f est intégrable sur D et on a

$$\iiint_D f(x, y, z) dxdy\, dz = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right) dy\right) dx.$$

<u>Exemples</u> 2. Calculer les intégrales suivantes sur les domaines indiqués

1. $\iiint_D zdxdydz$, $\quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0\ \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 -\ x - y\}.$
2. $\iiint_D dxdy\, dz$, $\quad D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \frac{x}{2}\ \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}, 0 \leq z \leq 2 -\ x - 2y\right\}.$
3. $\iiint_D \frac{dxdydz}{(1 + x + y + z)^3}$, $\quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$
4. $\iiint_D (1 - 2yz)dxdydz$, $\quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 3\}.$
5. $\iiint_D e^x dxdydz$, $\quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x + y\}.$
6. $\iiint_D xzdxdydz$, $\quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - x\}.$
7. $\iiint_D xyzdxdydz$, $\quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}.$

Solution.

$I_1 = \iiint_D z dx dy dz\,,\;\; D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, 0 \;\le y \le 1 - x\,, 0 \le z \le 1 - \;x - y\}.$

On a,

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \;\le y \le 1 - x \\ 0 \le z \le 1 - \; x - y \end{cases}$$

Alors,

$$\iiint_D z dx dy dz = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x}\left(\int_0^{1-\,x-y} z\, dz\right) dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{1-x-y} dy\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \frac{1}{2}(1-x-y)^2\, dy\right] dx = \int_0^1 \left[\left[-\frac{1}{6}(1-x-y)^3\right]_0^{1-x}\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{6}(1-x)^3\right] dx = \left[-\frac{1}{24}(1-x)^4\right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

$I_2 = \iiint_D dx dy dz\,,\;\; D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1, \frac{x}{2} \le y \le 1 - \frac{x}{2}\,, 0 \le z \le 2 - \; x - 2y\right\}.$

On a,

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \frac{x}{2} \;\le y \le 1 - \frac{x}{2} \\ 0 \le z \le 2 - \; x - 2y \end{cases}$$

Alors,

$$\iiint_D dx dy dz = \int_0^1 \left[\int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}}\left(\int_0^{2-\,x-2y} dz\right) dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}}\left[\;z\right]_0^{2-\,x-2y} dy\right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} (2 - \; x - 2y)\, dy\right] dx = \int_0^1 \left[\;\; 2y - xy - y^2\right]_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int_0^1 [x^2 - 2x + 1] dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$I_5 = \iiint_D e^x dx dy dz\,, \qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le y, 0 \le y \le 1\,, 0 \le z \le x + y\}.$

On a,

$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le y \\ 0 \le z \le x + y \end{cases}$$

Alors,

$$\iiint_D dx dy dz = \int_0^1 \left[\int_0^y \left(\int_0^{x+y} e^x dz\right) dx\right] dy = \int_0^1 \left[\int_0^y e^x \left(\int_0^{x+y} dz\right) dx\right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_0^y e^x \left[\;\; z\right]_0^{x+y} dx\right] dy = \int_0^1 \left[\int_0^y (x+y)e^x\, dx\right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[\;\;(x+y-1)e^x\right]_0^y dy = \int_0^1 \left((2y-1)e^y - (y-1)\right) dy.$$

$$= \left[(2y-3)e^y - \left(\frac{1}{2}y^2 - y\right)\right]_0^1 = \frac{7}{2} - e.$$

$$I_5 = \iiint_D xzdxdydz\,, \qquad\qquad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\,, 0 \leq z \leq 1-x\}.$$

On a,

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ y^2 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 1-x \end{cases}$$

Alors,

$$\iiint_D dxdydz = \int_0^1 \left[\int_{y^2}^1 \left(\int_0^{1-x} xzdz\right) dx\right] dy = \int_0^1 \left[\int_{y^2}^1 x \left(\int_0^{1-x} zdz\right) dx\right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{y^2}^1 x \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^{1-x} dx\right] dy = \int_0^1 \left[\int_{y^2}^1 \frac{1}{2}x(1-x)^2\, dx\right] dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right)\right]_{y^2}^1 dy = \int_0^1 \left(-\frac{3x^8 - 8x^6 + 6x^4 - 1}{24}\right) dy.$$

$$= -\frac{1}{24}\left[\frac{3}{9}x^9 - \frac{8}{7}x^7 + \frac{6}{5}x^5 - x\right]_0^1 = \frac{8}{315}.$$

Changement de variable dans une intégrale triple

Théorème

Soit

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdy\,dz.$$

On suppose que par le changement de variables

$$\begin{cases} x = \phi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = \mu(u,v,w) \end{cases} \quad (u,v,w) \in \Delta, \quad \phi,\psi,\mu \in C^1 \quad .$$

Alors,

$$\mathrm{I} = \iiint_D f(x,y,z)dxdy\,dz = \iiint_\Delta f(u,v,w)\,|J(u,v,w)|dud\vartheta dw.$$

Où

$$|J(u,v,w)| = \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Passage aux coordonnées cylindrique

Le changement de variables en coordonnées polaires correspond à poser

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \\ \quad z = \mathrm{z} \end{cases} \quad \mathrm{r} > 0, \theta \in [0,2\pi].$$

Donc

$$f(x,y,z) = f(r\cos(\theta)\,, r\sin(\theta)\,, z).$$

Et

$$|J(u,v)| == \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \mathrm{z}} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{z}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \\ r\sin(\theta) & r\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Alors,

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)dxdy\,dz = \iiint_\Delta f(r\cos(\theta)\,, r\sin(\theta)\,, \mathrm{z})\,r drd\theta dz.}$$

Exemples. Calculer les intégrales suivantes sur les domaines indiqués

1 $\iiint_D (x^2+y^2+1)\,dxdydz,\qquad \mathrm{D}=\{(x,y,)\in\mathbb{R}^3:,x^2+y^2\leq 1{,}0\leq z\leq 2\}.$

2. $\iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdydz,\qquad \mathrm{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^3:,x^2+y^2\leq a^2,0<z<a\}.$

3 $\iiint_D \cos(\sqrt{x^2+y^2})\,dxdydz,\qquad \mathrm{D}=\{(x,y,)\in\mathbb{R}^3:,x^2+y^2\leq 4{,}0\leq z\leq 1\}.$

4. $\int_{-2}^{2}\left(\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2}(x^2+y^2)\,dz\right)dy\right)dx.$

5. $\iiint_D \frac{dxdydz}{x^2+y^2},\qquad \mathrm{D}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^3:,x\geq 0,y\geq 0,1\leq x^2+y^2\leq 4{,}0\leq z\leq 1\}.$