

## 5.2 Domaines circulaires

La méthode de séparation des variables peut être exploitée avec succès dans certains domaines circulaires  $\Omega$ . Un cas particulièrement important est celui où  $\Omega$  est un disque.

Étant donné un réel fixé  $a > 0$ , on considère le problème aux limites de Dirichlet

$$\Delta u = 0 \quad x^2 + y^2 < a^2, \quad (25)$$

$$u(x, y) = h(x, y) \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad (26)$$

de sorte que la fonction  $u(x, y)$  satisfasse l'équation de Laplace dans le disque ouvert  $B_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 < a^2\}$  de rayon  $a > 0$  autour de l'origine et la condition aux limites de Dirichlet spécifiées sur le cercle  $\partial B_a$ . Par exemple,  $u(x, y)$  pourrait représenter le déplacement d'un tambour circulaire qui est attaché à un fil de hauteur  $h(x, y)$  en chaque point  $(x, y)$  sur son bord.

Les solutions séparables rectangulaires ne sont pas particulièrement utiles dans cette situation, et nous cherchons donc des solutions mieux adaptées à une géométrie circulaire. Cela nous inspire à adopter les coordonnées polaires

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

et à écrire la solution  $u(r, \theta)$  comme une fonction de celles-ci.

**Avertissement.** *On utilisera le même symbole pour noter une fonction  $u$  dans les deux systèmes de coordonnées : cartésiennes et polaires. Par exemple, si  $u(x, y) = x^2 + 2y$  en coordonnées cartésiennes, alors son expression en coordonnées polaires est  $u(r, \theta) = (r \cos \theta)^2 + 2r \sin \theta$ , et non  $r^2 + 2\theta$ .*

Nous devons relier les dérivées par rapport à  $x$  et  $y$  à celles par rapport à  $r$  et  $\theta$ . En effectuant un calcul standard de la règle de la chaîne, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y},$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (27)$$

En appliquant deux fois ces opérateurs différentiels à  $u(r, \theta)$ , nous trouvons, après un calcul où beaucoup de termes s'annulent, la forme en coordonnées polaires de l'équation de Laplace :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \quad (28)$$

Par conséquent, nous devons résoudre (28) dans le disque

$$B_a = \{(r, \theta) \mid 0 < r < a, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

La condition aux limites est imposée sur le cercle centré à l'origine et de rayon  $r = a$ , et donc, par (26), prend la forme

$$u(a, \theta) = h(a \cos \theta, b \sin \theta) \equiv h(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (29)$$

L'origine nécessite une attention particulière, puisque c'est un point singulier en coordonnées polaires. A cet effet, il est raisonnable d'exiger que la solution reste bornée et lisse – même au centre du disque :

$$\lim_{r \rightarrow 0} u(r, \theta) \text{ existe et est finie.} \quad (30)$$

Par ailleurs, pour être des fonctions univoques (i.e. à valeur unique) de  $x, y$ , la solution  $u(r, \theta)$  et ses valeurs aux limites  $h(\theta)$  doivent toutes deux être des fonctions  $2\pi$ -périodiques de la coordonnée angulaire :

$$u(r, \theta + 2\pi) = u(r, \theta), \quad h(\theta + 2\pi) = h(\theta). \quad (31)$$

La séparation des variables polaires est basée sur l'ansatz

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta), \quad (32)$$

qui suppose que la solution est un produit de fonctions dépendant chacune d'une seule variable. En substituant (32) dans la forme polaire (28) de l'équation de Laplace, on obtient

$$R''(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0.$$

Nous séparons maintenant les variables en déplaçant tous les termes impliquant  $r$  d'un côté de l'équation et tous les termes impliquant  $\theta$  de l'autre. Ceci est accompli en multipliant d'abord l'équation par  $r^2/(R(r)\Theta(\theta))$  puis en déplaçant le dernier terme vers le membre de droite :

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)}.$$

Comme dans le cas rectangulaire, une fonction de  $r$  ne peut être égale à une fonction de  $\theta$  que si les deux sont égales à une constante de séparation commune, que nous notons  $\lambda$  :

$$\frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda. \quad (33)$$

L'équation aux dérivées partielles se scinde donc en une paire d'équations différentielles ordinaires pour  $R$  et  $\Theta$  :

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \quad 0 < r < a, \quad (34)$$

$$\Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0 \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad (35)$$

qui définiront la solution séparable (32). Observez que les deux ont la forme d'une équation de fonction propre où la constante de séparation  $\lambda$  joue le rôle de la valeur propre. Nous sommes, comme toujours, intéressés uniquement par les solutions non nulles.

Nous avons déjà résolu l'équation (35). Sa solution générale est donnée par :

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} Ae^{\sqrt{-\lambda}\theta} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\theta} = \tilde{A} \cosh(\sqrt{-\lambda}\theta) + \tilde{B} \sinh(\sqrt{-\lambda}\theta) & \text{si } \lambda < 0, \\ A + B\theta, & \text{si } \lambda = 0, \\ A \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B \sin(\sqrt{\lambda}\theta), & \text{si } \lambda > 0, \end{cases}$$

où  $A, B, \tilde{A}$  et  $\tilde{B}$  sont des réels arbitraires.

En vertu de la condition de périodicité (31),  $\Theta$  doit être une fonction  $2\pi$ -périodique :

$$\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta). \quad (36)$$

**Valeurs propres négatives** ( $\lambda < 0$ ). Dans ce cas, toute solution non triviale de l'EDO correspondante est une fonction non bornée sur  $\mathbb{R}$ . En particulier, il n'existe pas de solution non triviale périodique pour cette équation. En d'autres termes, le système (35)–(36) n'admet pas de valeur propre négative.

**Valeur propre nulle** ( $\lambda = 0$ ). Une fonction linéaire est périodique si et seulement si elle est constante. Donc  $\lambda = 0$  est une valeur propre dont la fonction propre est 1.

**Fonctions propres positives** ( $\lambda > 0$ ). La condition (36) s'écrit

$$A \cos(\sqrt{\lambda}\theta + 2\pi\sqrt{\lambda}) + B \sin(\sqrt{\lambda}\theta + 2\pi\sqrt{\lambda}) = A \cos(\sqrt{\lambda}\theta) + B \sin(\sqrt{\lambda}\theta). \quad (37)$$

Si  $A$  ou  $B$  est nul, mais  $|A| + |B| \neq 0$ , alors cela donne  $2\pi\sqrt{\lambda} = 2\pi n$ , i.e.  $\lambda = n^2$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ . Sinon, on dérive les deux membres de (37) pour obtenir

$$-\sqrt{\lambda}A \sin(\sqrt{\lambda}\theta + 2\pi\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}B \cos(\sqrt{\lambda}\theta + 2\pi\sqrt{\lambda}) = -\sqrt{\lambda}A \sin(\sqrt{\lambda}\theta) + \sqrt{\lambda}B \cos(\sqrt{\lambda}\theta). \quad (38)$$

Multipliant (37) par  $A$  et (38) par  $B/\sqrt{\lambda}$ , et ajoutant les deux identités obtenues membre à membre, on obtient de nouveau  $\lambda = n^2$ .

A ces valeurs propres correspondent des fonctions propres de la forme :

$$\Theta_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta.$$

En conclusion, la solution générale du problème de Sturm-Liouville périodique (35)-(36) est la suite infinie suivante de valeurs propres et fonctions propres :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= 0, & \Theta_0(\theta) &= 1, \\ \lambda_n &= n^2, & \Theta_n(\theta) &= A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \quad 1, 2, \dots \end{aligned}$$

En substituant les valeurs propres  $\lambda_n$  dans (34), on obtient une EDO d'Euler (équidimensionnelle) du second ordre pour  $R$  :

$$r^2 R_n'' + r R_n' - n^2 R_n = 0. \quad (39)$$

Les solutions de ces équations sont données (excepté pour  $n = 0$ ) par des puissances appropriées de la variable indépendante  $r$  (Voir Appendice Théorème 13) :

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (40)$$

Dans le cas spécial  $n = 0$  nous obtenons

$$R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r. \quad (41)$$

Observons que les fonctions  $r^{-n}, n = 1, 2, \dots$  et la fonction  $\ln r$  ont des singularités lorsque  $r \rightarrow 0$ . Puisque nous considérons seulement des solutions lisses, nous imposons la condition

$$D_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ce qui permet d'utiliser uniquement les solutions non singulières pour élaborer une solution candidate sous forme de série

$$u(r, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta). \quad (42)$$

Les coefficients  $\alpha_n, \beta_n$  seront prescrits par la condition aux limites (29). En substituant  $r = a$ , nous obtenons

$$u(a, \theta) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) = h(\theta). \quad (43)$$

On reconnaît ceci comme une série de Fourier standard pour la fonction  $2\pi$ -périodique  $h(\theta)$ .

Par conséquent,

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) d\phi, \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) \cos n\phi d\phi, \quad \beta_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) \sin n\phi d\phi \quad n \geq 1. \quad (44)$$

sont précisément ses coefficients de Fourier. De cette manière, nous avons produit une solution formelle (42) au problème aux limites (28)-(29).

**Convergence** Examinons les propriétés de convergence de la série de Fourier formelle que nous avons construite dans (42). Notons  $M = (1/\pi) \int_0^{2\pi} |h(\theta)| d\theta$ . Les formules de Fourier (44) impliquent les inégalités

$$|\alpha_n|, |\beta_n| \leq \frac{M}{a^n}.$$

Donc le  $n$ -ième terme dans la série de Fourier (42) est borné par  $2M(r/a)^n$ ; comme la série géométrique  $\sum_{n \geq 0} (r/a)^n$  est convergente pour tout  $r < a$ , alors la série (42) converge pour tout  $r < a$ , ce qui signifie que la fonction  $u$  est bien définie en tout point du disque  $B_a$ .

Bien plus, la série (42) converge uniformément dans tout disque fermé de rayon  $\tilde{a} < a$  en vertu du critère de Weierstrass (Théorème 10). En fait, nous pouvons utiliser le même argument pour montrer aussi que la série des dérivées de tout ordre converge uniformément dans tout disque fermé de rayon  $\tilde{a} < a$  vers la dérivée appropriée de la solution. Ceci permet de dériver terme à terme la série (42) pour s'apercevoir que sa somme  $u(r, \theta)$  est effectivement harmonique dans  $B_a$ .

De plus, si  $h(\theta)$  est une fonction périodique,  $C^1$  par morceaux et continue, alors son développement de Fourier converge en tout point  $\theta \in [0, 2\pi]$  vers  $h$ . Ainsi,  $u$  donnée par (42) est une solution classique du problème considéré.

**Exemple 2** *Résolvez l'équation de Laplace dans le disque unité soumise aux conditions aux limites  $u(r, \theta) = y^2$  sur  $r = 1$ .*

*Observez que sur la frontière  $y^2 = \sin^2 \theta$ . Tout ce que nous avons à faire est de calculer le développement de Fourier classique de la fonction  $\sin^2 \theta$ . Ce développement s'effectue aisément à la lumière de l'identité  $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ . Ainsi la série de Fourier est finie, et la fonction harmonique requise est  $u(r, \theta) = \frac{1}{2}(1 - r^2 \cos 2\theta)$ , ou, en revenant aux coordonnées cartésiennes,  $u(x, y) = \frac{1}{2}(1 - x^2 + y^2)$ .*

La méthode de séparation des variables peut être utilisée pour d'autres domaines avec une forme polaire symétrique. Nous terminons cette section en considérant un problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace dans un secteur circulaire.

**Exemple 3** *Trouvez la fonction harmonique  $u(r, \theta)$  dans le secteur*

$$\Omega_\gamma = \{(r, \theta) \mid 0 < r < a, 0 < \theta < \gamma\}$$

*qui satisfait sur la frontière du secteur la condition de Dirichlet*

$$u(a, \theta) = g(\theta) \quad 0 \leq \theta \leq \gamma, \quad u(r, 0) = u(r, \gamma) = 0 \quad 0 \leq r \leq a. \quad (45)$$

Le processus d'obtention de solutions séparées et d'un problème aux valeurs propres approprié est similaire au cas précédent de l'équation de Laplace dans le disque entier. A savoir, nous cherchons à nouveau des solutions de la forme  $R(r)\Theta(\theta)$ , où l'équation de Sturm-Liouville est à nouveau (35) pour  $\Theta$ , et l'équation pour la composante radiale est à nouveau (34).

La différence est dans la condition aux limites pour l'équation  $\Theta$ . Contrairement à la condition de périodicité imposée pour le problème dans le disque plein, nous avons maintenant des conditions aux limites de Dirichlet  $\Theta(0) = \Theta(\gamma) = 0$ . Par conséquent, les suites de fonctions propres et valeurs propres sont maintenant données par

$$\Theta_n(\theta) = A_n \sin \frac{n\pi}{\gamma}\theta, \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\gamma}\right)^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

En substituant les valeurs propres  $\lambda_n$  dans (34), et en gardant seulement les solutions qui sont bornées à l'origine, nous obtenons

$$u_n(r, \theta) = \sin \frac{n\pi\theta}{\gamma} r^{n\pi/\gamma}.$$

Donc, la solution formelle est donnée par la série

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi\theta}{\gamma} r^{n\pi/\gamma}. \tag{46}$$

Sur  $r = a$ ,  $0 < \theta < \gamma$  nous avons

$$g(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a^{n\pi/\gamma} \sin \frac{n\pi\theta}{\gamma},$$

par conséquent,

$$\alpha_n = \frac{2a^{-n\pi/\gamma}}{\gamma} \int_0^\gamma g(\phi) \sin \frac{n\pi\phi}{\gamma} d\phi.$$

## 6 Formule de Poisson

L'un des outils importants dans la théorie des EDP est la représentation intégrale des solutions. Une représentation intégrale est une formule pour la solution d'un problème en termes d'une intégrale dépendant d'une fonction noyau. Nous devons calculer la fonction noyau juste une fois pour une équation donnée, un domaine donné, et un type donné de condition aux limites. Nous démontrons maintenant une représentation intégrale pour l'équation de Laplace dans un disque de rayon  $a$  avec des conditions aux limites de Dirichlet (25)-(26). Nous

commençons par réécrire la solution comme une série de Fourier (voir (42)), en utilisant (44) :

$$\begin{aligned}
u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) d\phi + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left[ \frac{\cos n\theta}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) \cos n\phi d\phi + \frac{\sin n\theta}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} h(\phi) \sin n\phi d\phi \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) d\phi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \int_0^{2\pi} h(\phi) (\cos n\phi \cos n\theta + \sin n\phi \sin n\theta) d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) d\phi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \int_0^{2\pi} h(\phi) \cos n(\theta - \phi) d\phi.
\end{aligned} \tag{47}$$

Considérez  $r \leq \tilde{a} < a$ . Puisque la série converge uniformément dans le disque compact  $\bar{B}_{\tilde{a}}$  centré à l'origine de rayon  $\tilde{a}$ , nous pouvons interchanger l'ordre de sommation et d'intégration, et obtenir

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\theta - \phi) \right] d\phi, \quad r \leq \tilde{a}. \tag{48}$$

La sommation de la série infinie  $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\theta - \phi)$  requiert un petit calcul annexe. Introduisons la variable complexe

$$z = \rho e^{i\alpha} = \rho \cos \alpha + i \rho \sin \alpha,$$

et évaluons (pour  $\rho < 1$ ) la somme géométrique

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{2} + \frac{z}{1-z} = \frac{1+z}{2(1-z)} = \frac{(1+z)(1-\bar{z})}{2|1-z|^2} = \frac{1+z-\bar{z}-|z|^2}{2|1-z|^2} = \frac{1-\rho^2+2i\rho\sin\alpha}{2(1-2\rho\cos\alpha+\rho^2)}.$$

Puisque

$$z^n = \rho^n e^{in\alpha} = \rho^n (\cos n\alpha + i \sin n\alpha),$$

nous concluons en séparant les parties réelle et imaginaire que

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n\alpha = \frac{1-\rho^2}{2(1-2\rho\cos\alpha+\rho^2)}. \tag{49}$$

Revenons à (48) et mettant  $\rho = r/a$ ,  $\alpha = \theta - \phi$ , nous obtenons l'importante formule intégrale de Poisson pour la solution du problème aux limites.

**Théorème 11** *La solution de l'équation de Laplace dans le disque de rayon  $a$  centré à l'origine et soumise aux conditions aux limites de Dirichlet  $u(a, \theta) = h(\theta)$  est*

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(r, \theta; a, \phi) h(\phi) d\phi, \tag{50}$$

où le noyau  $K$ , donné par

$$K(r, \theta; a, \phi) = \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\theta - \phi) + r^2}, \quad (51)$$

est appelé le noyau de Poisson.

C'est une formule très utile. Le noyau décrit une solution universelle pour l'équation de Laplace dans un disque. Tout ce que nous avons à faire (au moins en théorie), est de substituer la condition aux limites dans (50) et effectuer l'intégration. De plus, la formule est valide pour toute fonction intégrable  $h$ . Il s'avère que l'on peut établir des représentations similaires non seulement dans des disques, mais aussi dans des domaines lisses arbitraires.

D'abord, en posant  $r = 0$ , Cette formule est un cas particulier d'un fait général important.

**Remarque 7** *La formule de Poisson fournit, comme sous-produit, une autre preuve pour le principe de la valeur moyenne. En fait, la formule est valide par rapport à tout cercle autour de tout point dans un domaine donné (pourvu que le cercle soit complètement contenu dans le domaine). En effet, si nous substituons  $r = 0$  dans (50), nous obtenons*

$$u(0, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(\phi) d\phi. \quad (52)$$

*Le membre de gauche est la valeur de  $u$  à l'origine – le centre du disque – et donc indépendant de  $\theta$ ; le membre de droite est la moyenne de ses valeurs sur le cercle, ce qui est le principe de la valeur moyenne.*

Lorsque nous avons résolu l'équation de Laplace dans un rectangle ou dans un disque, nous avons vu que la solution est dans  $C^\infty(\Omega)$ . Autrement dit, la solution est indéfiniment différentiable en tout point intérieur. Prouvons cette propriété pour tout domaine.

**Théorème 12 (Régularité des fonctions harmoniques)** *Soit  $u(x, y)$  une fonction harmonique dans  $\Omega$ . Alors  $u \in C^\infty(\Omega)$ .*

**Preuve** Désignons par  $p$  un point intérieur dans  $\Omega$ , et construisons un système de coordonnées centré en  $p$ . Soit  $B_a$  un disque de rayon  $a$  centré en  $p$ , strictement contenu dans  $\Omega$ . Écrivons la formule de Poisson pour un point arbitraire  $(x, y)$  dans  $B_a$ . Nous pouvons dériver sous le signe intégral un nombre arbitraire de fois par rapport à  $r$  ou par rapport à  $\theta$ , et ainsi établir le théorème. □

## Appendice

**Théorème 13 (EDO d'Euler équidimensionnelle du 2<sup>nd</sup> ordre)** Soient  $A, B, C \in \mathbb{R}$ , et soient  $r_1, r_2$  les racines de l'équation indicelle

$$Ar(r-1) + Br + C = 0.$$

Alors la solution générale de l'équation d'Euler (équidimensionnelle) du 2<sup>nd</sup> ordre

$$Ax^2y''(x) + Bxy'(x) + Cy(x) = 0, \tag{53}$$

est donnée par

$$y(x) = \begin{cases} \alpha x^{r_1} + \beta x^{r_2} & r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 \neq r_2, \\ \alpha x^{r_1} + \beta x^{r_1} \ln x & r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 = r_2, \\ \alpha x^\lambda \cos(\mu \ln x) + \beta x^\lambda \sin(\mu \ln x) & r_1 = \lambda + i\mu \in \mathbb{C}, \end{cases}$$

où  $\alpha, \beta$  sont des nombres réels arbitraires.

**Théorème 14 (Permutation de  $\int_a^b$  et  $\sum_{n=0}^{+\infty}$ )** On suppose que :

**H1)** pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n$  est intégrable sur l'intervalle compact  $[a, b]$ ,

**H2)** la série  $\sum_n f_n$  converge uniformément sur  $[a, b]$ .

Alors

**i)** la somme  $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  est une fonction intégrable sur  $[a, b]$ ,

**ii)** la série numérique de terme général  $u_n = \int_a^b f_n(x) dx$  est convergente, et on a

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right),$$

i.e., on a la **formule d'intégration terme à terme** :

$$\int_a^b \left( \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int_a^b f_n(x) dx \right).$$