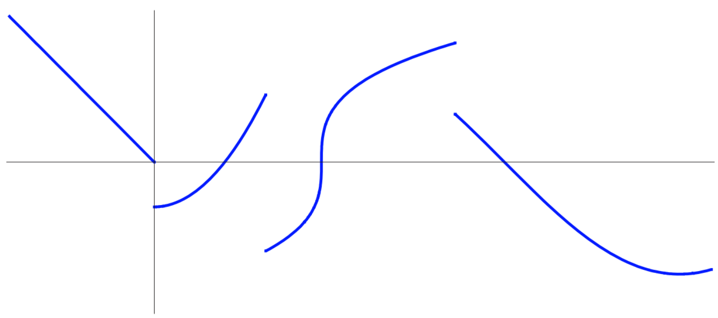
Fonctions continues par morceaux

Définition 8 *Une fonction $f(x)$ est dite* continue par morceaux *sur un intervalle $[a, b]$ si elle est définie et continue sauf éventuellement en un nombre fini de points $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$. De plus, en chaque point de discontinuité, nous exigeons que les limites à gauche et à droite*

$$f(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^-} f(x), \qquad f(x_k^+) = \lim_{x \to x_k^+} f(x), \tag{3.44}$$

existent. (Aux extrémités a, b, seule l'existence de l'une des limites, à savoir $f(a^+)$ et $f(b^-)$, est requise.) Notons que l'on n'exige pas que $f(x)$ soit définie en x_k. Même si $f(x_k)$ est définie, elle n'est pas nécessairement égale à l'une ou l'autre des limites.



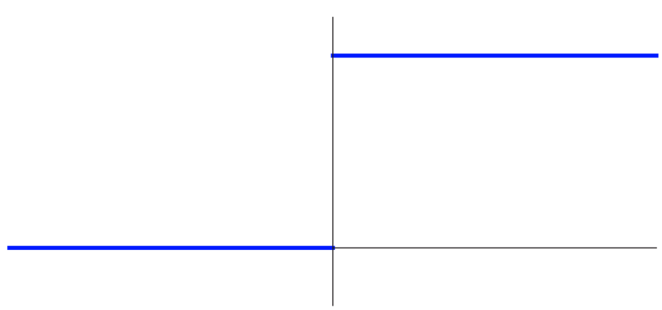
Fonction continue par morceaux

Les points x_k sont appelés *discontinuités de saut* de $f(x)$, et la différence

$$\beta_k = f(x_k^+) - f(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^+} f(x) - \lim_{x \to x_k^-} f(x) \tag{3.45}$$

entre les limites gauche et droite est l'amplitude du saut.
L'exemple le plus simple de fonction continue par morceaux est la *fonction échelon unité*

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{3.46}$$



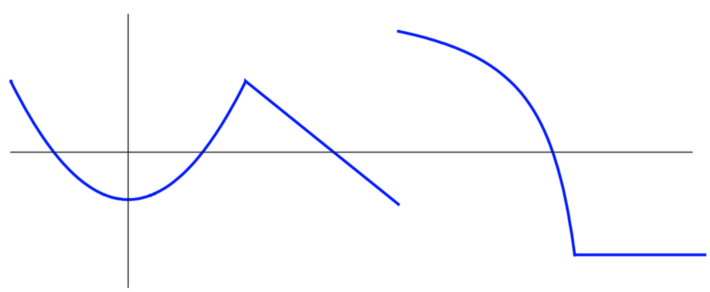
Elle présente une unique discontinuité de saut en $x = 0$ d'amplitude 1 : $\sigma(0^+) - \sigma(0^-) = 1 - 0 = 1$, et est continue partout ailleurs.

Définition 9 *Une fonction $f(x)$ est dite C^1* par morceaux *sur un intervalle $[a,b]$ si elle est définie, continue et continûment différentiable sauf en un nombre fini de points $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$. En chaque point exceptionnel, les limites à gauche et à droite de la fonction et de sa dérivée existent :*

$$f(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^-} f(x), \qquad f(x_k^+) = \lim_{x \to x_k^+} f(x),$$
$$f'(x_k^-) = \lim_{x \to x_k^-} f'(x), \qquad f'(x_k^+) = \lim_{x \to x_k^+} f'(x).$$

Pour une fonction C^1 par morceaux, un point exceptionnel x_k est soit :

- *une* discontinuité de saut *où les dérivées gauche et droite existent, soit*
- *un* coin, *c'est-à-dire un point où f est continue, $f(x_k^-) = f(x_k^+)$, mais où les dérivées gauche et droite diffèrent : $f'(x_k^-) \neq f'(x_k^+)$.*



Fonction C^1 par morceaux

Ainsi, en chaque point, y compris les discontinuités de saut, le graphe de $f(x)$ possède des tangentes droite et gauche bien définies. Par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ est C^1 par morceaux, car elle est continue partout et présente un coin en $x = 0$, avec $f'^+) = +1$ et $f'^-) = -1$.

Il existe une définition analogue des fonctions C^n *par morceaux*. On exige que la fonction admette n dérivées continues, sauf en un nombre fini de points. De plus, en chaque point, la fonction doit posséder des limites gauche et droite bien définies pour toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n.

Enfin, une fonction $f(x)$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ est continue par morceaux (ou C^1 ou C^n) si elle l'est sur tout intervalle borné.