

## 5 Méthode de séparation des Variables

Notre première approche pour résoudre l'équation de Laplace sera basée sur la méthode de *séparation des variables*. La méthode n'est applicable que pour des domaines ayant une géométrie spéciales. Nous montrerons comment utiliser la méthode pour résoudre les équations de Laplace et de Poisson dans des rectangles, dans des disques, et dans des secteurs circulaires.

### 5.1 Domaines rectangulaires

Nous commençons par chercher des solutions (non triviales) de l'équation de Laplace qui peuvent être écrites sous la forme d'un produit

$$u(x, y) = X(x)Y(y)$$

d'une fonction de  $x$  seul par une fonction de  $y$  seul. Évidemment, nous ne nous intéressons pas à la solution nulle  $u(x, y) = 0$ . Nous cherchons donc des fonctions  $X$  et  $Y$  qui ne s'annulent pas identiquement. Nous calculons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)Y(y), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X(x)Y''(y),$$

et donc

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

Nous *séparons* ensuite *les variables* en plaçant tous les termes impliquant  $x$  d'un côté de l'équation et tous les termes impliquant  $y$  de l'autre; ceci est accompli en divisant par  $X(x)Y(y)$  puis en écrivant l'équation résultante sous la forme séparée

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

La seule façon qu'une fonction de  $x$  seul puisse être égale à une fonction de  $y$  seul est que les deux fonctions soient égales à une *constante de séparation* commune  $\lambda$  :

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Ainsi, les facteurs  $X(x)$  et  $Y(y)$  doivent satisfaire les équations différentielles ordinaires élémentaires

$$X'' - \lambda X = 0, \quad Y'' + \lambda Y = 0.$$

Les solutions des équations ci-dessus dépendent du signe de la constante  $\lambda$ . Listons la collection résultante des fonctions harmoniques séparables dans le tableau suivant :

*Solutions Séparables de l'Équation de Laplace*

$\lambda$	$X(x)$	$Y(y)$	$u(x, y) = X(x)Y(y)$
$\lambda = -\omega^2 < 0$	$\cos \omega x, \sin \omega x$	$e^{-\omega y}, e^{\omega y}$	$e^{\omega y} \cos \omega x, e^{-\omega y} \cos \omega x,$ $e^{\omega y} \sin \omega x, e^{-\omega y} \sin \omega x$
$\lambda = 0$	$1, x$	$1, y$	$1, x, y, xy$
$\lambda = \omega^2 > 0$	$e^{-\omega x}, e^{\omega x}$	$\cos \omega y, \sin \omega y$	$e^{\omega x} \cos \omega y, e^{-\omega x} \cos \omega y,$ $e^{\omega x} \sin \omega y, e^{-\omega x} \sin \omega y$

Puisque l'équation de Laplace est une équation linéaire homogène, toute combinaison linéaire de solutions est également une solution. Ainsi, nous pouvons construire des solutions plus générales sous forme de combinaisons linéaires finies, ou, à condition de prêter une attention particulière aux problèmes de convergence, sous forme de séries infinies des solutions séparables. Comme notre but est de résoudre des problèmes aux limites, nous devons nous assurer que la combinaison résultante satisfait les conditions aux limites. Mais ceci n'est pas une tâche facile, à moins que le domaine sous-jacent n'ait une géométrie plutôt spéciale.

En fait, les seuls domaines bornés sur lesquels nous pouvons résoudre explicitement des problèmes aux limites en utilisant les solutions séparables précédentes sont les rectangles. Donc, nous nous concentrerons sur les problèmes aux limites pour l'équation de Laplace

$$\Delta u = 0 \quad \text{sur un rectangle} \quad \Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}. \quad (18)$$

Pour avancer, nous autoriserons des valeurs aux limites non nulles sur un seul des quatre côtés du rectangle. Pour illustrer, nous nous concentrerons sur les conditions aux limites de Dirichlet suivantes :

$$u(x, 0) = g(x), \quad u(x, b) = 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0. \quad (19)$$

Nous supposons à ce stade que la *condition de compatibilité*

$$g(0) = g(a) = 0$$

est satisfaite.

Une fois que nous saurons comment résoudre ce type de problème, nous pourrions employer la superposition linéaire pour résoudre le problème aux limites de Dirichlet général sur un rectangle. D'autres conditions aux limites peuvent être traitées d'une manière similaire – sous réserve que la condition sur chaque côté du rectangle soit entièrement de Dirichlet ou

entièrement de Neumann ou, plus généralement, entièrement de Robin avec un coefficient de transfert constant.

Pour résoudre le problème aux limites (18-19), la première étape consiste à se limiter aux solutions séparables qui respectent les trois conditions aux limites homogènes. La fonction séparable  $u(x, y) = X(x)Y(y)$  s'annulera sur les côtés supérieur, droit et gauche du rectangle, à condition que

$$X(0) = X(a) = 0 \quad \text{et} \quad Y(b) = 0.$$

En se référant au tableau précédent, la première condition  $X(0) = 0$  exige

$$X(x) = \begin{cases} \sin \omega x, & \lambda = -\omega^2 < 0, \\ x, & \lambda = 0, \\ \sinh \omega x, & \lambda = \omega^2 > 0, \end{cases}$$

où  $\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$  est la fonction sinus hyperbolique usuelle. Cependant, les deuxième et troisième cas ne peuvent pas satisfaire la deuxième condition aux limites  $X(a) = 0$ , et nous les rejetons donc. Le premier cas conduit à la condition

$$X(a) = \sin \omega a = 0, \quad \text{et donc} \quad \omega a = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Les constantes de séparation et solutions correspondantes (à une constante multiplicative près) sont

$$\lambda_n = -\omega^2 = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (20)$$

**Remarque 6** *Jusqu'ici, nous avons simplement recalculé les valeurs propres et fonctions propres connues du problème aux limites familier  $X'' - \lambda X = 0$ ,  $X(0) = X(a) = 0$ , connu sous le nom de "Problème de Sturm-Liouville".*

Ensuite, puisque  $\lambda = -\omega^2 < 0$ , nous avons  $Y(y) = c_1 e^{\omega y} + c_2 e^{-\omega y}$  pour des constantes  $c_1, c_2$ . La troisième condition aux limites  $Y(b) = 0$  requiert alors que, à une constante multiplicative près,

$$Y_n(y) = \sinh \omega(b - y) = \sinh \frac{n\pi(b - y)}{a}. \quad (21)$$

En effet,

$$\begin{aligned} Y(y) &= c_1 e^{\omega y} + c_2 e^{-\omega y}. \\ Y(b) &= 0 \Rightarrow c_1 e^{\omega b} + c_2 e^{-\omega b} = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 e^{2\omega b}. \\ Y(y) &= c_1 (e^{\omega y} - e^{2\omega b} e^{-\omega y}) = c_1 e^{\omega b} (e^{\omega(y-b)} - e^{-\omega(y-b)}) = 2c_1 e^{\omega b} \sinh \omega(b - y). \end{aligned}$$

En absorbant les constantes :  $Y(y) = \sinh \omega(b - y)$ .

Nous concluons que les fonctions harmoniques

$$u_n(x, y) = \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b - y)}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (22)$$

fournissent une liste complète de solutions séparables qui satisfont les trois conditions aux limites homogènes. Il reste à analyser la condition aux limites inhomogène le long du bord inférieur du rectangle. À cette fin, essayons une superposition linéaire des solutions séparables pertinentes sous la forme d'une série infinie

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b - y)}{a},$$

dont les coefficients  $c_1, c_2, \dots$  doivent être prescrits par la condition aux limites restante. Au bord inférieur,  $y = 0$ , nous trouvons en supposant que la série converge

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} = g(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

ce qui prend la forme d'une série de Fourier sinus pour la fonction  $g(x)$  sur l'intervalle  $[0, a]$ .

Soient

$$\alpha_n = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

ses coefficients de Fourier sinus, d'où

$$c_n = \frac{\alpha_n}{\sinh \frac{n\pi b}{a}}.$$

La série résultante

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{a} \frac{\sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}}. \quad (4.98)$$

fournit une formule explicite pour une solution (formelle) du problème aux limites (18-19).

**Convergence et Régularité** Jusqu'ici, nous avons indiqué le principe de la méthode de séparation des variables sans se préoccuper de la validité des calculs. A cet effet, nous avons déterminé une candidate naturelle à la solution du problème (18-19) sous forme d'une série. Si cette série est divergente ou si sa somme n'est pas différentiable autant de fois qu'il est nécessaire, cette dernière ne peut être une solution du problème. Aussi, la construction formelle (4.98) nécessite une analyse mathématique sérieuse pour être placée sur des bases rigoureuses. Pour cela, il nous devons nous pencher sur les questions clés suivantes :

- La série de Fourier (4.98) converge-t-elle dans le rectangle  $\bar{\Omega}$  ?
- Si oui, peut-on la dériver terme à terme ?
- Si oui, sa somme forme-t-elle réellement une solution du problème aux limites (18-19) ?

L'analyse de Fourier dit que, sous des conditions modérées sur la fonction frontière  $g(x)$ , la réponse est oui.

Supposons pour le moment que les coefficients de Fourier de  $g(x)$  soient uniformément bornés,

$$|\alpha_n| \leq M \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

ce qui, est vrai chaque fois que  $g(x)$  est continue par morceaux ou, plus généralement, intégrable :  $\int_0^a |g(x)| dx < \infty$ . En effet, pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$|\alpha_n| \leq \frac{2}{a} \int_0^a \left| g(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \right| dx \leq \frac{2}{a} \int_0^a |g(x)| dx := M.$$

Dans ce cas, le terme général de la série de Fourier sinus (4.98)

$$\alpha_n \sin \frac{n\pi x}{a} \frac{\sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \quad \text{pour tout } 0 \leq x \leq a \text{ et tout } 0 < y \leq b,$$

est de l'ordre de  $O(e^{-n\frac{\pi y}{a}})$  pour de grandes valeurs de  $n$ . En effet,

$$\left| \frac{\sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \right| = \frac{e^{\frac{n\pi(b-y)}{a}} - e^{-\frac{n\pi(b-y)}{a}}}{e^{\frac{n\pi b}{a}} - e^{-\frac{n\pi b}{a}}} = \frac{e^{\frac{n\pi(b-y)}{a}} \left(1 - e^{-2\frac{n\pi(b-y)}{a}}\right)}{e^{\frac{n\pi b}{a}} \left(1 - e^{-2\frac{n\pi b}{a}}\right)} = e^{-\frac{n\pi b}{a}} \frac{1 - e^{-2\frac{n\pi(b-y)}{a}}}{1 - e^{-2\frac{n\pi b}{a}}}.$$

Posons :

$$Q_n(y) = \frac{1 - e^{-2\frac{n\pi(b-y)}{a}}}{1 - e^{-2\frac{n\pi b}{a}}}.$$

Pour  $y$  fixé dans  $]0, b]$ , et  $n \geq 1$ , on a

$$0 < 1 - e^{-2\frac{n\pi(b-y)}{a}} < 1 \quad \text{et} \quad 1 - e^{-2\frac{n\pi b}{a}} \geq 1 - e^{-2\frac{\pi b}{a}} > 0,$$

D'où

$$Q_n(y) \leq \frac{1}{1 - e^{-2\frac{\pi b}{a}}} := C_1, \tag{23}$$

et donc

$$\left| \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{a} \frac{\sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \right| \leq C_1 e^{-n\frac{\pi y}{a}} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq a \text{ et } 0 < y \leq b.$$

### Convergence de la série (4.98)

Comme la série numérique  $\sum_{n \geq 1} e^{-n \frac{\pi y}{a}}$  converge pour tout  $y \in ]0, b]$  fixé (en tant que série géométrique de raison positive  $r = e^{-\frac{\pi y}{a}} < 1$ ), il en résulte, par le critère de Weierstrass (Théorème 10) de convergence uniforme, que la série (4.98) converge normalement et donc uniformément sur  $[0, a]$  pour tout  $0 < y \leq b$ , et que sa somme  $u(x, y)$  est donc bien définie sur  $\Omega$ . Étant donné  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit, on déduit par le même critère ( $M$ -Test), que la série (4.98) converge normalement et donc uniformément sur le compact  $[\varepsilon, b]$  pour tout  $0 \leq x \leq a$ .

### Régularité $C^\infty$ par rapport à $x$

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  un entier arbitraire. Le terme général dérivé  $k$  fois par rapport à  $x$  de la série (4.98) est :

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{a} \frac{\sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \right) = \alpha_n \left( \frac{n\pi}{a} \right)^k h_1 \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \frac{\sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}}$$

où la fonction  $h_1$  est soit  $\pm \sin$ , soit  $\pm \cos$ . Dans tous les cas,  $|h_1(\frac{n\pi x}{a})| \leq 1$ .

Pour  $y$  fixé dans  $]0, b]$ , nous utilisons la majoration du rapport des sinus hyperboliques établie précédemment. On en déduit la majoration suivante :

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{a} \frac{\sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \right) \right| \leq MC_1 \left( \frac{\pi}{a} \right)^k n^k e^{-n \frac{\pi y}{a}} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq a \text{ et } 0 < y \leq b.$$

Pour un point  $y$  fixé dans l'intervalle  $]0, b]$ , la série numérique  $\sum_{n=1}^{\infty} n^k e^{-n \frac{\pi y}{a}}$  converge. Cela implique que :

- La série des dérivées d'ordre  $k$  par rapport à  $x$  converge normalement et donc uniformément sur l'intervalle  $[0, a]$ .
- Par conséquent, en vertu du théorème 9, la somme  $u(x, y)$  est de classe  $C^k$  par rapport à  $x$  sur  $[0, a]$  et la dérivée  $\frac{\partial^k u}{\partial x^k}$  est obtenue par  $k$  dérivations terme à terme de la série (4.98), i.e.

$$\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{a} \frac{\sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \right), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Comme ce raisonnement est valable pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $u$  est indéfiniment différentiable par rapport à  $x$  sur  $[0, a]$  pour tout  $y \in ]0, b]$ .

### Régularité $C^\infty$ par rapport à $y$

Considérons maintenant la série des dérivées d'ordre  $k$  par rapport à  $y$ . Son terme général s'écrit

$$\frac{\partial^k}{\partial y^k} \left( \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{a} \frac{\sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \right) = \alpha_n \left( -\frac{n\pi}{a} \right)^k \sin \frac{n\pi x}{a} h_2 \left( \frac{n\pi(b-y)}{a} \right)$$

où la fonction  $h_2$  est soit  $\sinh$ , soit  $\cosh$ . Dans tous les cas,

$$\left| \frac{h_2\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right)}{\sinh\frac{n\pi b}{a}} \right| \leq C_2 e^{-n\frac{\pi y}{a}}$$

où  $C_2 := \frac{2}{1-e^{-2\frac{\pi b}{a}}}$  est une constante indépendante de  $n$ . On en déduit la majoration suivante pour tout  $y \in [\varepsilon, b]$  :

$$\left| \frac{\partial^k}{\partial y^k} \left( \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{a} \frac{\sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \right) \right| \leq MC_2 \left(\frac{\pi}{a}\right)^k n^k e^{-n\frac{\pi \varepsilon}{a}}, \quad \text{pour tout } x \in [0, a].$$

Puisque la série  $\sum_{n \geq 1} n^k e^{-n\frac{\pi \varepsilon}{a}}$  converge,

- il s'ensuit, par le critère  $M$  de Weierstrass, que la série des dérivées d'ordre  $k$  par rapport à  $y$  converge normalement et donc uniformément sur tout intervalle compact  $[\varepsilon, b] \subset ]0, b]$ .
- Par conséquent, en vertu du théorème 9, la somme  $u(x, y)$  est de classe  $C^k$  par rapport à  $y$  sur  $]0, b]$  et la dérivée  $\frac{\partial^k u}{\partial y^k}$  est obtenue par  $k$  dérivations terme à terme de la série (4.98), i.e.

$$\frac{\partial^k u}{\partial y^k}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^k}{\partial y^k} \left( \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{a} \frac{\sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \right), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Comme ce raisonnement est valable pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $u$  est indéfiniment différentiable par rapport à  $y$  sur  $]0, b]$  pour tout  $x \in [0, a]$ .

### Harmonicité de $u$ dans $\Omega$

A la lumière de ce qui précède, on a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Delta u_n = 0, \quad \text{dans } \Omega,$$

où dans la dernière étape nous avons utilisé la propriété que chaque solution séparée  $u_n(x, y)$  est une fonction harmonique dans  $\Omega$ . Ainsi,  $u$  est une fonction harmonique dans le domaine  $\Omega$ .

### Conditions aux limites

De par sa construction, la fonction  $u$  donnée par (4.98) satisfait aux trois conditions aux limites homogènes. Pour satisfaire à la condition aux limites restante sur le bord  $y = 0$ , i.e.

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

nous devons avoir

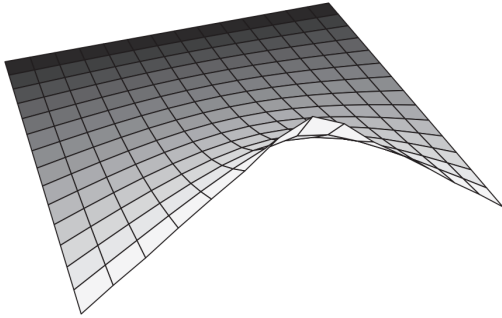
$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad 0 \leq x \leq a,$$

autrement dit, nous devons supposer que le développement de Fourier de  $g$  converge vers  $g$  en tout point  $x \in [0, a]$ . D'après l'analyse de Fourier, ceci est assuré dès que  $g$  est  $C^1$  par morceaux et continue sur  $[0, a]$  et vérifie les conditions de compatibilité aux points extrêmes :  $g(0) = g(a) = 0$ .

Ainsi, on peut énoncer le résultat suivant.

**Proposition 3** *Supposons que la donnée au bord  $g$  est  $C^1$  par morceaux, et continue sur  $[0, a]$  et qu'elle satisfait la condition de compatibilité aux points extrêmes :  $g(0) = g(a) = 0$ . Alors, la somme de la série (4.98) est effectivement une solution classique du problème aux limites (18-19).*

**Exemple 1** *Une membrane est étirée sur un fil en forme d'un carré unité avec un côté plié en deux, comme représenté à la Figure 5 :*



**Figure 5.** Membrane carrée sur un fil

Les conditions aux limites précises sont

$$u(x, y) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, & y = 0, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, & y = 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq 1, & y = 1, \\ 0, & x = 0, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & x = 1, & 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

La série de Fourier sinus de la fonction frontière inhomogène se calcule aisément :

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases} \\ &= \frac{4}{\pi^2} \left( \sin \pi x - \frac{\sin 3\pi x}{9} + \frac{\sin 5\pi x}{25} - \dots \right) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}. \end{aligned}$$

En prenant  $a = b = 1$  dans (4.98), nous concluons que la solution au problème aux limites

peut être exprimée comme une série de Fourier

$$u(x, y) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin(2k+1)\pi x \sinh(2k+1)\pi(1-y)}{(2k+1)^2 \sinh(2k+1)\pi}.$$

Dans la Figure 5, est tracée la somme des 10 premiers termes de la série. Cela donne une approximation raisonnablement bonne de la solution réelle, sauf lorsque nous sommes très proches du coin surélevé du fil frontière qui est le point de déplacement maximal de la membrane.

## Appendice

**Théorème 9 (Dérivation terme à terme d'une série de fonctions)** On suppose que :

- H1)** pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $u_n$  est dérivable (resp. de classe  $C^1$ ) sur  $I$ ,
- H2)** il existe  $x_0 \in I$  tel que la série numérique  $\sum_n u_n(x_0)$  soit convergente,
- H3)** la série des dérivées  $\sum_n u'_n$  converge uniformément sur  $I$  (resp. sur tout intervalle compact inclus dans  $I$ ).

Alors,

- i)** la série  $\sum_n u_n$  converge uniformément sur  $I$  (resp. uniformément sur tout intervalle compact inclus dans  $I$ ),
- ii)** la somme  $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$  est une fonction dérivable (resp. de classe  $C^1$ ) sur  $I$  et

$$\forall x \in I, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x),$$

i.e., on a la **formule de dérivation terme à terme** de la série  $\sum_n u_n$  :

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n. \quad (24)$$

**Théorème 10 (Critère de Weierstrass (M-Test))** La série  $\sum_n f_n$  est **normalement** convergente sur  $I$  si, et seulement si, il existe une suite réelle positive  $(\beta_n)$  vérifiant les deux conditions suivantes :

- i)**  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq \beta_n,$
- ii)** la série  $\sum_n \beta_n$  converge.