Exercice 17 Ecrire l'équation de Laplace bidimensionnelle dans un système de coordonnées polaires.

2 Classification des EDP de second ordre

Exercice 18 Réduire les équations suivantes à la forme canonique :

(a) $u_{xx} + xyu_{yy} = 0.$

(b) $yu_{xx} - xu_{yy} + u_x + yu_y = 0.$

(c) $e^{2x}u_{xx} + 2\ e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} = 0.$

(d) $u_{xx} + (1+y)^2u_{yy} = 0.$

(e) $xu_{xx} + 2\ \sqrt{xy}\ u_{xy} + yu_{yy} - u_x = 0.$

(f) $(x-y)u_{xx} + (xy - y^2 - x + y)u_{xy} = 0.$

(g) $y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} + u_x = 0.$

(h) $\sin^2 y\ u_{xx} - e^{2x}u_{yy} + 3\ u_x - 5\ u = 0.$

(i) $u_{xx} + 2\ u_{xy} + 4\ u_{yy} + 2\ u_x + 3\ u_y = 0.$

Exercice 19 Réduire à la forme canonique et écrire sous sa forme la plus simple l'équation

$$au_{xx} + 2\ au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0.$$

3 Équation de transport

Exercice 20 On considère l'équation de transport

$$u_t + 2u_x = 0 \qquad \text{pour } t \geq 0,\ x \in \mathbb{R},$$

avec la donnée initiale

$$u(0,x) = u_0(x), \qquad \text{où } u_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Déterminer les caractéristiques dans le plan (t,x) et les tracer.

(b) Pour chacun des points $P_1 = (1,0)$, $P_2 = (1,3)$, $P_3 = (2,-2)$, remonter la caractéristique et en déduire $u(P_i)$.

(c) En déduire la formule explicite de $u(t,x)$.

(d) Représenter $u(t, \cdot)$ pour $t = 0$, $t = 1/2$, $t = 1$, $t = 2$.

Exercice 21 On considère l'équation de transport

$$u_t + u_x = 0 \qquad \text{pour } t \geq 1,\ x \in \mathbb{R},$$

avec la donnée initiale

$$u(1, x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

(a) Déterminer les caractéristiques dans le plan (t, x) et les tracer.

(b) Pour chacun des points $P_1 = (\frac{3}{2}, 0)$, $P_2 = (2, 3)$, $P_3 = (3, -2)$, remonter la caractéristique et en déduire $u(P_i)$.

(c) En déduire la formule explicite de $u(t, x)$.

Exercice 22 Résoudre les problème à valeur initiale

(a) $u_t - 2u_x = 1, \quad u(0, x) = e^{-x^2}, \qquad \text{pour } t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}.$

(b) $u_t + 2u_x = \sin x, \quad u(0, x) = \sin x, \qquad \text{pour } t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}.$

Exercice 23 (Transport amorti ou amplifié) Donner une formule explicite pour une fonction u résolvant le problème de valeur initiale :

$$\begin{cases} u_t + b \cdot \nabla u + cu &= 0 \qquad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0, x) &= u_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Ici, $c \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^n$ sont des constantes.

Exercice 24 Résoudre les problèmes à valeur initiale

(a) $u_t + u_x + \frac{1}{2}u = 0, \quad u(0, x) = \operatorname{Arctan} x, \qquad \text{pour } t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}.$

(b) $u_t - 4u_x + u = 0, \quad u(0, x) = 1/(1 + x^2), \qquad \text{pour } t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}.$

Exercice 25 Soient b et $c > 0$ deux constantes réelles.

(a) Supposons que $u(t, x)$ résout le problème

$$u_t + bu_x = 0, \quad u(0, x) = f(x), \qquad \text{pour } t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

Prouver que $v(t, x) = u(t - t_0, x)$ résout le problème

$$v_t + bv_x = 0, \quad v(t_0, x) = f(x), \qquad \text{pour } t \geq t_0,\ x \in \mathbb{R}.$$

(b) Le résultat de la question précédente est-il valide lorsque l'équation de transport est remplacée par l'équation de transport amorti $u_t + bu_x + cu = 0$?