

# Chapitre 2 : Équations Elliptiques

## Équation de Laplace & Équation de Poisson

Prof. N. Merazga

5 avril 2026

### Introduction

L'opérateur de Laplace joue un rôle central dans la théorie des EDP. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude des équations elliptiques, et, en particulier, au principal prototype des équations elliptiques, qui est l'équation de Laplace elle-même :

$$\Delta u = 0.$$

On commence par passer en revue quelques propriétés de base des problèmes elliptiques. On introduit ensuite la propriété de la valeur moyenne, et on formule également le principe du maximum.

On prouvera l'unicité et la stabilité des solutions de l'équation de Laplace de deux manières. Une approche est basée sur le principe du maximum, et l'autre approche utilise la méthode des identités de Green (ou de l'énergie).

La méthode de résolution la plus simple pour l'équation de Laplace est la méthode de séparation des variables. Certes, cette méthode n'est applicable que dans des domaines simples, tels que des rectangles, des disques, des anneaux, etc., mais ces domaines sont souvent rencontrés dans les applications. Cette méthode sera évoquée dans la 5<sup>ème</sup> section.

Vers la fin du chapitre, on introduira la fonction de Green et la représentation intégrale des solutions du problème de Dirichlet et de Neumann relatifs à l'équation de Poisson.

On limitera la discussion aux fonctions  $u(x, y)$  à deux variables indépendantes, bien que la plupart des analyses puissent être facilement généralisées à des dimensions supérieures.

# 1 Concepts et Propriétés de base

**Équation de Laplace & Équation de Poisson** On désigne par  $\Omega$  un domaine plan (i.e. un **ouvert connexe** non vide dans  $\mathbb{R}^2$ ). L'équation de Laplace est donnée par

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

où  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = u(x, y)$ , est la fonction inconnue.

L'équation de Laplace est sans doute l'équation différentielle la plus importante de toutes les mathématiques. La version inhomogène ou forcée, à savoir

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (2)$$

où  $f$  est une fonction donnée, est appelée équation de Poisson <sup>(1)</sup>.

**Interprétation physique** Outre leur importance théorique, les équations de Laplace et de Poisson apparaissent comme les équations d'équilibre fondamentales dans une variété remarquable de systèmes physiques :

- $u(x, y)$  peut être interprétée comme le *déplacement d'une membrane*, par exemple, la peau d'un tambour ; l'inhomogénéité  $f(x, y)$  dans l'équation de Poisson représente un forçage externe sur la surface de la membrane.
- Dans le contexte de l'équilibre thermique des plaques planes,  $u(x, y)$  représente la *température à l'équilibre* et  $f(x, y)$  une source de chaleur externe.
- En électromagnétisme,  $u(x, y)$  pourrait aussi être interprétée comme le *potentiel électrique* en présence d'une densité de charge  $f$ .

Les homologues dynamiques de l'équation de Laplace (1) sont les versions bidimensionnelles des équations de la chaleur et des ondes.

## Fonctions harmoniques

**Définition 1** Une fonction  $u$  satisfaisant (1) est appelée une fonction harmonique.

L'espace des fonctions harmoniques peut ainsi être identifié comme le noyau de l'opérateur de Laplace (ou Laplacien pour faire court)

$$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2 : C^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}.$$

---

<sup>1)</sup> Le mathématicien français Siméon Poisson (1781–1840), qui fut l'élève de Laplace, utilisa cette équation dans ses études de divers problèmes en mécanique, gravitation, électricité et magnétisme.

Dans le cas uni-dimensionnel,  $\Omega \subset \mathbb{R}$ , les seules fonctions harmoniques sont les fonctions affines  $u(x) = ax + b$  ( $a$  et  $b$  sont des constantes réelles). L'ensemble des fonctions harmoniques est donc un sous-espace vectoriel de dimension deux.

Le cas bi-dimensionnel,  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , est beaucoup plus riche et intéressant que le cas uni-dimensionnel. En particulier, l'ensemble des fonctions harmoniques est un sous-espace vectoriel de dimension **infinie**. A titre d'exemples, les fonctions :

$$(x, y) \mapsto e^x \cos y, \quad (x, y) \mapsto \sinh x \cos y \quad \text{et} \quad (x, y) \mapsto x^2 - y^2,$$

sont harmoniques sur  $\mathbb{R}^2$ .

Avant de développer une théorie générale, mentionnons quelques fonctions harmoniques spéciales définies sur le plan entier (excepté, peut-être, pour certains points isolés).

**Définition 2** Une fonction harmonique  $P_n(x, y)$  de la forme

$$P_n(x, y) = \sum_{0 \leq i+j \leq n} a_{i,j} x^i y^j,$$

est appelée un polynôme harmonique de degré  $n$ .

Par exemple, les fonctions  $x - y$ ,  $x^2 - y^2 + 2x$ ,  $x^3 - 3xy^2 - y$  sont des polynômes harmoniques de degré 1, 2 et 3 respectivement.

La solution la plus importante de l'équation de Laplace sur le plan est la solution qui est symétrique par rapport à l'origine (la solution radiale). Dans l'Exercice 6 (TD N°1), nous avons montré qu'une telle solution est donnée par

$$v(r) = C_1 \ln r + C_2,$$

où  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes réelles arbitraires.

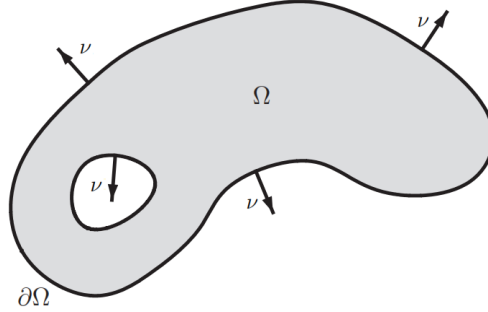
**Définition 3** La solution radiale particulière

$$v(r) = -\frac{1}{2\pi} \ln r \tag{3}$$

est appelée la solution fondamentale de l'équation de Laplace.

Nous utiliserons cette solution extensivement ultérieurement, où le titre 'fondamentale' sera justifié. Nous verrons aussi là-bas la raison d'inclure la constante multiplicative  $-1/2\pi$ . Remarquez que la solution fondamentale n'est pas définie à l'origine. La solution fondamentale décrit le potentiel électrique dû à une charge électrique ponctuelle à l'origine.

**Problèmes aux limites elliptiques** Puisque les équations de Laplace et de Poisson décrivent toutes deux des configurations d'équilibre, elles apparaissent presque toujours dans le contexte de problèmes aux limites. La solution  $u(x, y)$  de l'équation aux dérivées partielles est tenue de satisfaire des conditions appropriées sur la frontière du domaine, notée  $\partial\Omega$ , qui consistera en une ou plusieurs courbes fermées simples, comme illustré à la Figure 1 :



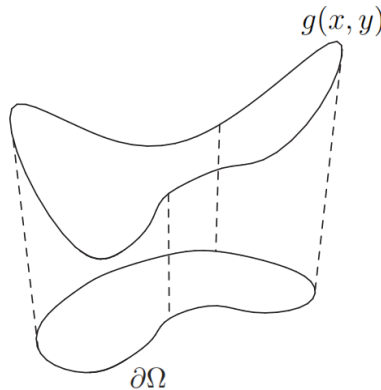
**Figure 1.** Un domaine plan avec des normales unitaires orientées vers l'extérieur sur sa frontière.

**Définition 4 (Problème de Dirichlet)** *Étant donnés les fonctions  $f$  dans  $\Omega$  et  $g$  sur  $\partial\Omega$ , on cherche  $u$  tel que*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sous de légères conditions de régularité sur le domaine  $\Omega$ , la donnée au bord  $g$ , et la fonction de forçage  $f$ , les conditions de Dirichlet servent à spécifier de manière unique la solution  $u(x, y)$  de l'équation de Laplace ou de Poisson.

Physiquement, dans le cas d'une membrane libre ou forcée, les conditions aux limites de Dirichlet correspondent au collage du bord de la membrane à un fil à la hauteur  $g(x, y)$  au-dessus de chaque point de la frontière  $(x, y) \in \partial\Omega$ , comme illustré à la Figure 2



**Figure 2.** Conditions aux limites de Dirichlet.

De manière similaire, dans la modélisation de l'équilibre thermique, une condition aux limites de Dirichlet représente l'imposition d'une distribution de température prescrite, représentée par la fonction  $g$ , le long de la frontière de la plaque.

**Définition 5 (Problème de Neumann)** *Étant donnés les fonctions  $f$  dans  $\Omega$  et  $g$  sur  $\partial\Omega$ , on cherche  $u$  tel que*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \partial_\nu u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $\nu$  désigne la normale unitaire sortante à  $\partial\Omega$  <sup>(2)</sup>, et  $\partial_\nu$  la dérivée normale (i.e.  $\partial_\nu = \nu \cdot \nabla$ ).

Par exemple, en thermomécanique, une condition aux limites de Neumann spécifie le flux de chaleur sortant d'une plaque à travers sa frontière. Les conditions aux limites de "non-flux" ou de Neumann homogènes, où  $g(x, y) \equiv 0$ , correspondent à une frontière complètement isolée.

Dans le cas d'une membrane, des conditions aux limites de Neumann homogènes correspondent à un bord libre et non attaché d'un tambour.

**Définition 6 (Problème de Robin)** *Étant donnés les fonctions  $f$  dans  $\Omega$ ,  $g$  et  $\alpha$  sur  $\partial\Omega$ , on cherche  $u$  tel que*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u + \alpha \partial_\nu u = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Les conditions aux limites de Robin sont utilisées en transfert thermique pour exprimer le fait que le flux de chaleur à travers la frontière du domaine considéré est proportionnelle à la différence entre la température  $u$  à la surface (frontière) et la température extérieure ambiante  $u_{ext}$  :

$$-k \partial_\nu u = h(u - u_{ext})$$

où  $k$  est la conductivité thermique et  $h$  le coefficient d'échange (convection).

Enfin, on peut mélanger les types précédents de conditions aux limites, en imposant, par exemple, des conditions de Dirichlet sur une partie de la frontière et des conditions de Neumann sur la partie complémentaire.

---

<sup>2)</sup> i.e. le vecteur de longueur unitaire,  $|\nu| = 1$ , qui est orthogonal à la tangente à la frontière et pointe vers l'extérieur du domaine

**Définition 7 (Problème aux limites mixte)** *Étant données les fonctions  $f$  dans  $\Omega$ ,  $g$  et  $h$  sur  $\partial\Omega$ , on cherche  $u$  tel que*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \Gamma_D, \\ \partial_\nu u = h & \text{sur } \Gamma_N, \end{cases}$$

où  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  est une partition (union disjointe) de la frontière.

Par exemple, si  $u$  représente la température d'équilibre dans une plaque, alors  $\Gamma_D$  est l'endroit où la température est fixée, tandis que  $\Gamma_N$  est isolé, ou, plus généralement, a un flux de chaleur prescrit.

De manière similaire, lors de la modélisation du déplacement d'une membrane,  $\Gamma_D$  est l'endroit où le bord du tambour est attaché à un support, tandis que  $\Gamma_N$  homogène est laissé pendre librement.

**La première question fondamentale** que nous devons examiner est de savoir s'il existe une solution pour chacun des problèmes que nous venons de définir. Cette question est loin d'être simple. Elle a été étudiée par de nombreux grands mathématiciens depuis le milieu du XIXe siècle. On a découvert que lorsque le domaine  $\Omega$  est borné et « suffisamment régulier », le problème de Dirichlet, par exemple, possède effectivement une solution. Il est intéressant de souligner que dans les applications, on rencontre fréquemment des domaines avec des coins (des rectangles, par exemple). Près d'un coin, la frontière n'est pas différentiable ; ainsi, nous ne pouvons pas toujours s'attendre à ce que les solutions soient aussi lisses que nous le voudrions. Dans ce chapitre, nous considérons seulement des solutions classiques, i.e. les solutions appartenant à la classe  $C^2(\Omega)$ .

Dans certaines situations, des conditions supplémentaires sur le comportement des solutions près de la frontière sont requises. Par exemple, nous devons parfois nous limiter aux solutions dans la classe  $C^1(\overline{\Omega})$ .

Considérons maintenant le problème de Neumann. Puisque la température est à l'équilibre, le flux de chaleur à travers la frontière doit être équilibré par la production de température à l'intérieur du domaine. Cet argument simple est la manifestation physique de l'énoncé suivant qui stipule que *le problème de Neumann n'admet une solution (classique) que sous la condition de compatibilité (4)*.

**Proposition 1** *Une condition nécessaire pour l'existence d'une solution au problème de Neumann est*

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy + \int_{\partial\Omega} g(x(s), y(s)) ds = 0, \quad (4)$$

où  $(x(s), y(s))$  est une paramétrisation de  $\partial\Omega$ .

**Preuve** En intégrant les deux côtés de l'équation de Poisson (2) sur  $\Omega$ , et en utilisant l'identité de Green

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx dy = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u \, ds, \quad (5)$$

on obtient

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u \, ds = - \int_{\Omega} f \, dx dy.$$

La proposition suit des conditions aux limites.  $\square$

**Remarque 1** Pour la suite, il est utile d'observer que pour les fonctions harmoniques, i.e. les solutions de l'équation de Laplace ( $f = 0$ ), la formule (5) donne

$$\int_{\Gamma} \partial_{\nu} u \, ds = 0 \quad (6)$$

pour toute courbe fermée  $\Gamma$  qui est strictement contenue dans  $\Omega$ .

**Remarque 2 (Instabilité du problème de Cauchy)** Notez que nous n'avons fourni qu'une seule condition aux limites pour chacun des problèmes présentés (Dirichlet, Neumann, Robin et mixte). Bien qu'il s'agisse d'équations du second ordre, les conditions aux limites sont très différentes de celles fournies dans le cas hyperbolique (équation des ondes). Dans ce dernier cas, nous avons fourni deux conditions (une sur la solution et une sur sa dérivée par rapport à  $t$ ) pour chaque point sur la ligne  $t = 0$ .

L'exemple suivant (dû à Hadamard) illustre la différence entre les équations elliptiques et hyperboliques dans le demi-plan supérieur. Considérons l'équation de Laplace dans le domaine  $x \in \mathbb{R}, y > 0$ , sous les conditions de Cauchy

$$u_n(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, 0) = \frac{\sin(nx)}{n} \quad x \in \mathbb{R}, \quad (7)$$

où  $n$  est un entier naturel non nul. Il est facile de vérifier que

$$u_n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny) \quad (8)$$

est une fonction harmonique satisfaisant (7).

Analyse de la stabilité : En choisissant  $n$  très grand, les conditions initiales (7) décrivent **une perturbation arbitrairement petite de la donnée initiale nulle**  $\frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0$  donnant la

solution triviale  $u = 0$ . En revanche, la solution (8) n'est pas du tout bornée dans le demi-plan  $y > 0$ . En effet, pour tout  $y > 0$ , la valeur de

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u_n(x, y)| = \frac{1}{n^2} \sinh(ny) \sim \frac{1}{2} e^{ny}$$

croît exponentiellement lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Ainsi, une perturbation arbitrairement petite de la donnée initiale entraîne une modification gigantesque de la solution. Le problème de Cauchy pour l'équation de Laplace est **instable** et donc **mal posé** par rapport aux données initiales.

**Propriétés d'invariance** Il est très intéressant de noter que l'équation de Laplace possède certaines propriétés d'invariance que l'on évoque dans le résultat suivant.

**Proposition 2** *Supposons que  $u(x, y)$  est une fonction harmonique dans un domaine  $\Omega$ . Alors,*

1. *Invariance par translation du système de coordonnées : toute translatée*

$$v(x, y) = u(\tau(x, y)) = u(x - a, y - b), \quad \text{où } a, b \in \mathbb{R},$$

*est également harmonique dans  $\tau^{-1}(\Omega)$  ;*

2. *Invariance par rotation du système de coordonnées : la fonction tournée*

$$w(x, y) = u(\rho(x, y)) = u(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta), \quad \text{où } -\pi < \theta \leq \pi$$

*est encore harmonique dans  $\rho^{-1}(\Omega)$ .*

3. *Invariance par dilatation du système de coordonnées : la fonction redimensionnée*

$$U(x, y) = u(x/\alpha, y/\alpha)$$

*pour toute constante  $\alpha > 0$ , est aussi harmonique dans  $\alpha\Omega$ .*

## 2 Propriété de la valeur moyenne

Établissons l'une des propriétés les plus merveilleuses et fondamentales des fonctions harmoniques qui stipule que la valeur d'une fonction harmonique  $u$  en un point arbitraire  $(x_0, y_0)$  de son domaine est égale à la moyenne de ses valeurs sur tout cercle centré en ce point.

**Théorème 1 (Principe de la valeur moyenne)** Soit  $u$  une fonction harmonique dans un domaine plan  $\Omega$ , et soit  $(x_0, y_0)$  un point dans  $\Omega$ . Supposons que  $B_R$  est un disque de rayon  $R$  centré en  $(x_0, y_0)$  et strictement contenu dans  $\Omega$  (i.e.  $\overline{B_R} \subset \Omega$ ). Alors la valeur de  $u$  en  $(x_0, y_0)$  est égale à la moyenne des valeurs de  $u$  sur le cercle  $C_R$  (et dans le disque  $B_R$ ) :

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{C_R} u(x(s), y(s)) ds = \frac{1}{\pi R^2} \int_{B_R} u(x, y) dx dy.$$

**Preuve** Décomposons la démonstration en quatre étapes.

**Étape 1 : Définition de la fonction de moyenne  $V(r)$**  On définit, pour  $0 < r \leq R$ , la moyenne de  $u$  sur le cercle  $C_r$  de rayon  $r$  centré en  $(x_0, y_0)$  par :

$$V(r) := \frac{1}{2\pi r} \oint_{C_r} u(x(s), y(s)) ds. \tag{9}$$

En passant en coordonnées polaires centrées en  $(x_0, y_0)$  :

$$x = x_0 + r \cos \theta, \quad y = y_0 + r \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi[ ,$$

on peut réécrire cette intégrale avec un domaine d'intégration fixe :

$$V(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta.$$

L'objectif est de montrer que  $V(r)$  est constante (indépendante de  $r$ ). Pour ce faire, nous calculons sa dérivée  $V'(r)$ .

**Étape 2 : Dérivation par rapport au rayon et utilisation de l'harmonicité** Puisque les bornes d'intégration (0 et  $2\pi$ ) ne dépendent pas de  $r$ , et que la fonction  $u$  est supposée suffisamment lisse (classe  $C^2$ ), nous pouvons appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètre (règle de Leibniz).

$$\begin{aligned} V'(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} u(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla u(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) \cdot (\cos \theta, \sin \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nabla u(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) \cdot \nu d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta) d\theta, \end{aligned}$$

où  $\nu$  est la normale unitaire sortante au cercle  $C_r$  au point  $(r, \theta)$ . Revenant à l'intégrale curviligne, on écrit

$$V'(r) := \frac{1}{2\pi r} \oint_{C_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x(s), y(s)) ds.$$

Appliquant l'identité (6) avec  $\Gamma = C_r$  à la fonction  $u$  supposée harmonique dans le domaine  $\Omega$ , il vient

$$V'(r) = \oint_{C_r} \partial_\nu u ds = 0.$$

**Étape 3 : Conclusion par passage à la limite** Puisque  $V'(r) = 0$  pour tout  $0 < r \leq R$ , la fonction  $V$  est constante (indépendante de  $r$ ) sur l'intervalle  $]0, R]$ . Ainsi,

$$V(R) = V(r) = \lim_{\rho \rightarrow 0} V(\rho), \quad \text{pour tout } 0 < r \leq R.$$

Or, par **continuité** de  $u$  au centre  $(x_0, y_0)$ , on a :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} V(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + \rho \cos \theta, y_0 + \rho \sin \theta) d\theta = u(x_0, y_0).$$

On en déduit la première propriété :

$$u(x_0, y_0) = V(r) = V(R).$$

**Étape 4 : Moyenne sur le disque** Pour obtenir la moyenne sur le disque  $B_R$ , on intègre les moyennes sur tous les cercles  $C_r$  de rayons  $r$  allant de 0 à  $R$ . On utilise les coordonnées polaires :

$$\int_{B_R} u dx dy = \int_0^R \left( \oint_{C_r} u ds \right) dr.$$

Comme nous venons de prouver que  $\oint_{C_r} u ds = 2\pi r u(x_0, y_0)$ , il vient par substitution :

$$\int_{B_R} u dx dy = \int_0^R 2\pi r u(x_0, y_0) dr = \pi u(x_0, y_0) [r^2]_0^R = \pi R^2 u(x_0, y_0),$$

d'où,

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{\pi R^2} \int_{B_R} u dx dy.$$

La démonstration est ainsi achevée. □

**Remarque 3** On note que l'énoncé inverse est aussi vrai, i.e. une fonction continue qui satisfait la propriété de la valeur moyenne dans un domaine  $\Omega$  est harmonique dans  $\Omega$ .

Prouvons un résultat légèrement plus faible.

**Théorème 2** Soit  $u$  une fonction dans  $C^2(\Omega)$  satisfaisant la propriété de la valeur moyenne en chaque point dans  $\Omega$ . Alors  $u$  est harmonique dans  $\Omega$ .

**Preuve** Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il y a un point  $(x_0, y_0)$  dans  $\Omega$  où  $\Delta u(x_0, y_0) \neq 0$ . Sans perte de généralité supposons  $\Delta u(x_0, y_0) > 0$ . Puisque  $\Delta u$  est une fonction continue, alors pour un  $R > 0$  suffisamment petit il existe dans  $\Omega$  un disque  $B_R$  de rayon  $R$ , centré en  $(x_0, y_0)$ , tel que  $\Delta u > 0$  en chaque point dans  $B_R$ . Désignons la frontière  $\partial B_R$  de ce disque par  $C_R$ . Il suit que grâce à l'identité de Green (5) :

$$\begin{aligned}
 0 < \frac{1}{2\pi} \int_{B_R} \Delta u \, dx dy &= \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \\
 &= \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial R} u(x_0 + R \cos \theta, y_0 + R \sin \theta) d\theta \\
 &= R \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + R \cos \theta, y_0 + R \sin \theta) d\theta \right] \\
 &= R \frac{\partial}{\partial R} [u(x_0, y_0)] = 0,
 \end{aligned} \tag{10}$$

où dans la quatrième égalité dans (10) nous avons utilisé l'hypothèse que  $u$  satisfait la propriété de la valeur moyenne.  $\square$

### 3 Principe du maximum et conséquences

L'un des outils centraux dans la théorie des EDP elliptiques (du second ordre) est le principe du maximum. Nous présentons d'abord une forme 'faible' de ce principe.

**Théorème 3 (Principe du maximum faible)** Soit  $\Omega$  un domaine borné, et soit  $u(x, y) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  une fonction harmonique dans  $\Omega$ . Alors le maximum de  $u$  dans  $\Omega$  est atteint sur la frontière  $\partial\Omega$ .

Cela s'écrit :

$$\max_{(x,y) \in \bar{\Omega}} u(x, y) = \max_{(x,y) \in \partial\Omega} u(x, y).$$

**Preuve** La preuve repose sur une technique classique en analyse des EDP : la *méthode de perturbation*. L'idée générale est de construire une fonction auxiliaire  $v$  sous-harmonique (i.e.  $\Delta v > 0$ ), de prouver le résultat désiré pour  $v$  (très facile), puis de revenir à  $u$  par un passage à la limite.

La démonstration se déroule en trois étapes.

**Étape 1 : Cas d'une fonction strictement sous-harmonique** Considérons une fonction quelconque  $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  satisfaisant  $\Delta v \geq 0$  dans  $\Omega$ . Montrons que  $v$  ne peut pas avoir un point de maximum local dans  $\Omega$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $v$  atteint un maximum local en un point intérieur  $(x_0, y_0) \in \Omega$ . D'après les conditions nécessaires d'optimalité du calcul différentiel à plusieurs variables, la matrice Hessienne  $H_v(x_0, y_0)$  doit être semi-définie négative, i.e.

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x \ y)H_v(x_0, y_0)(x \ y)^T \leq 0. \quad (11)$$

En particulier, les dérivées secondes pures (les éléments diagonaux de  $H_v(x_0, y_0)$ ) doivent être négatives ou nulles :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0.$$

D'où,

$$\Delta v(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0.$$

Ceci est en **contradiction** avec l'hypothèse de départ  $\Delta v > 0$  partout dans  $\Omega$ .

**Conclusion :** Le maximum de  $v$  ne peut pas être à l'intérieur. Puisque  $\bar{\Omega}$  est compact et  $v$  est continue, le maximum global est nécessairement atteint sur la frontière  $\partial\Omega$ .

**Étape 2 : Construction de la Fonction Perturbée** Perturbons légèrement notre fonction harmonique  $u$  en introduisons une fonction auxiliaire  $v_\varepsilon$  dépendant d'un paramètre réel  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit :

$$v_\varepsilon(x, y) = u(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2).$$

Alors,

$$\Delta v_\varepsilon = \Delta u + \varepsilon \Delta(x^2 + y^2) = 4\varepsilon > 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

La fonction  $v_\varepsilon$  est donc *strictement sous-harmonique*. Par conséquent, en vertu du résultat de l'étape précédente, le maximum de  $v_\varepsilon$  sur  $\bar{\Omega}$  est atteint sur la frontière  $\partial\Omega$  :

$$\max_{\bar{\Omega}} v_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} v_\varepsilon.$$

**Étape 3 : Passage à la Limite** Puisque le maximum de  $v_\varepsilon$  est sur la frontière, on a :

$$v_\varepsilon(x, y) \leq \max_{\partial\Omega} v_\varepsilon, \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}. \quad (12)$$

Posons

$$M := \max_{\partial\Omega} u(x, y), \quad L := \max_{\partial\Omega} (x^2 + y^2).$$

Alors,

$$v_\varepsilon(x, y) = u(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2) \leq M + \varepsilon L, \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega,$$

d'où, compte tenu de (12),

$$u(x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2) \leq M + \varepsilon L, \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega},$$

par suite,

$$u(x, y) \leq M + \varepsilon L - \varepsilon(x^2 + y^2), \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega},$$

et donc

$$u(x, y) \leq M + \varepsilon L, \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega}.$$

Cette inégalité est vraie pour **tout**  $\varepsilon > 0$ , aussi petit soit-il. En faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ , il vient

$$u(x, y) \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (M + \varepsilon L) = M, \quad \forall (x, y) \in \overline{\Omega},$$

autrement dit,

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u.$$

Comme  $\partial\Omega$  est incluse dans  $\overline{\Omega}$ , l'inégalité inverse est triviale, ce qui conclut la démonstration :

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

□

**Remarque 4** *Le même raisonnement s'applique au minimum en considérant la fonction  $-u$ . Puisque  $u$  est harmonique,  $-u$  est aussi harmonique. Le maximum de  $-u$  est sur la frontière. Mais pour tout ensemble  $A$  et pour toute fonction  $u$  nous avons  $\min_A u = -\max_A(-u)$ . Par conséquent, le minimum de  $u$  est aussi sur la frontière  $\partial\Omega$ .*

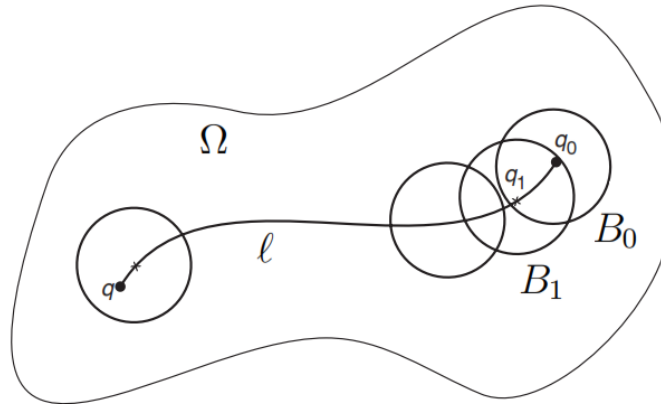
*Il en résulte que si de plus  $u$  est positive sur le bord  $\partial\Omega$ , alors elle est positive partout dans  $\Omega$ .*

Le théorème que nous venons de prouver n'exclut toujours pas la possibilité que le maximum (ou minimum) de  $u$  soit aussi atteint en un point intérieur. Nous prouverons maintenant un résultat plus fort qui affirme que si  $u$  n'est pas constante, alors le maximum (et minimum) ne peut, en fait, être obtenu en aucun point intérieur. Ce résultat est une conséquence du théorème de la valeur moyenne.

**Théorème 4 (Principe du maximum fort)** *Soit  $u$  une fonction harmonique dans un domaine  $\Omega$  (ici nous autorisons aussi le cas  $\Omega$  non borné). Si  $u$  atteint son maximum (minimum) en un point intérieur de  $\Omega$ , alors  $u$  est constante.*

**Preuve** Supposons que  $u$  obtient son maximum en un point intérieur  $q_0$ . Soit  $q \neq q_0$  un point arbitraire dans  $\Omega$ . Désignons par  $\ell$  une courbe lisse dans  $\Omega$  connectant  $q_0$  et  $q$  (voir Figure 4). De plus, désignons par  $d$  la distance entre  $\ell$  et  $\partial\Omega$  :

$$d = \text{dist}(\ell, \partial\Omega) = \inf_{\substack{(x', y') \in \ell \\ (x, y) \in \partial\Omega}} |(x', y') - (x, y)|.$$



**Figure 4.** Une construction pour la preuve du principe du maximum fort.

Considérons un disque  $B_0$  de rayon  $d/2$  autour de  $q_0$ . De la définition de  $d$  et du théorème de la valeur moyenne, nous inférons que  $u$  est constante dans  $B_0$  (puisque la moyenne d'un ensemble ne peut pas être supérieure à tous les éléments de l'ensemble). Sélectionnons maintenant un point  $q_1$  dans  $\ell \cap B_0$ , et désignons par  $B_1$  le disque de rayon  $d/2$  centré en  $q_1$ . De notre construction il suit que  $u$  atteint aussi sa valeur maximale en  $q_1$ . Ainsi nous obtenons que  $u$  est constante aussi dans  $B_1$ .

Nous continuons de cette façon jusqu'à ce que nous atteignons un disque qui inclut le point  $q$ . Nous concluons  $u(q) = u(q_0)$ , et puisque  $q$  est arbitraire, il s'ensuit que  $u$  est constante dans  $\Omega$ .

Remarquez que nous pouvons choisir les points  $q_0, q_1, \dots$ , tels que le processus implique un nombre fini de disques  $B_0, B_1, \dots, B_{n_\ell}$  parce que la longueur de  $\ell$  est finie, et parce que tous les disques ont le même rayon.  $\square$

**Remarque 5** *Le théorème du maximum fort garantit effectivement que les fonctions harmoniques **non constantes** ne peuvent pas obtenir leur maximum ou minimum dans  $\Omega$ . Remarquez que dans les domaines non bornés le maximum (minimum) de  $u$  n'est pas nécessairement obtenu dans  $\overline{\Omega}$ . Par exemple, la fonction  $\ln(x^2 + y^2)$  est harmonique et strictement positive à l'extérieur du disque unité, et elle s'annule sur la frontière du domaine.*

*On note aussi que la première preuve du principe du maximum peut être facilement généralisée à une grande classe de problèmes elliptiques, tandis que le principe de la valeur moyenne est vrai seulement pour les fonctions harmoniques.*

Nous illustrerons l'importance du principe du maximum en l'utilisant pour prouver l'unicité et la stabilité de la solution du problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson.

**Théorème 5** *Étant donné un domaine borné  $\Omega$ , le problème de Dirichlet :*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y) & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = g(x, y) & (x, y) \in \partial\Omega, \end{cases}$$

*avec  $f \in C(\Omega)$  et  $g \in C(\partial\Omega)$ , admet au plus une solution dans  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ .*

**Preuve** Supposons qu'il existe deux solutions  $u_1$  et  $u_2$ . Désignons leur différence par  $v = u_1 - u_2$ . La linéarité du problème implique que  $v$  est harmonique dans  $\Omega$ , et qu'elle s'annule sur  $\partial\Omega$ . Le principe du maximum faible implique, alors,  $0 \leq v \leq 0$ . Ainsi  $v \equiv 0$ .  $\square$

Notons que la bornitude de  $\Omega$  est **essentielle**. Considérons, par exemple, le problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x^2 + y^2 > 4, \\ u(x, y) = 1 & x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que les fonctions  $u_1 \equiv 1$  et  $u_2(x, y) = (\ln \sqrt{x^2 + y^2}) / \ln 2$  résolvent toutes deux le problème.

**Théorème 6** *Soit  $\Omega$  un domaine borné, et soient  $u_1$  et  $u_2$  des fonctions dans  $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$  qui sont des solutions de l'équation de Poisson  $-\Delta u = f$  avec les conditions de Dirichlet  $g_1$  et  $g_2$ , respectivement. Alors*

$$\max_{\Omega} |u_1(x, y) - u_2(x, y)| \leq \max_{\partial\Omega} |g_1(x, y) - g_2(x, y)|.$$

**Preuve** Définissons  $v = u_1 - u_2$ . La construction implique que  $v$  est harmonique dans  $\Omega$  satisfaisant  $v = g_1 - g_2$  sur  $\partial\Omega$ . Par conséquent le principe du maximum (et minimum) implique

$$\min_{\partial\Omega}(g_1 - g_2) \leq v(x, y) \leq \max_{\partial\Omega}(g_1 - g_2) \quad \forall (x, y) \in \Omega,$$

et le théorème s'ensuit. □

## 4 Identités de Green

Nous développons maintenant un autre outil important pour l'analyse des problèmes elliptiques – les identités de Green. Nous utiliserons cet outil pour fournir une preuve d'unicité alternative pour le problème de Dirichlet, et, de plus, nous prouverons l'unicité des solutions au problème de Neumann et aux problèmes de Robin.

Le point de départ est le théorème de Gauss :

**Théorème 7 (Formule de la divergence-flux)** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  lisse par morceaux, et soit  $\vec{\psi} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$  où  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  (i.e.  $\vec{\psi} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^1$  sur  $\Omega$  et continue jusqu'à la frontière). Alors on a*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{\psi}(x, y) \, dx dy = \int_{\partial\Omega} \vec{\psi}(x(s), y(s)) \cdot \nu \, ds, \quad (13)$$

où  $\nu$  désigne la normale unitaire à  $\partial\Omega$  orientée vers l'extérieur, tandis que  $ds$  désigne l'élément de longueur d'arc le long de la courbe frontière de  $\Omega$ .

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions arbitraires dans  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ . Nous considérons plusieurs options pour  $\vec{\psi}$  dans le théorème de Gauss. En sélectionnant

$$\vec{\psi} = \nabla u,$$

nous obtenons en observant que  $\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u$  :

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dx = \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u \, ds. \quad (14)$$

La sélection  $\vec{\psi} = v\nabla u - u\nabla v$  mène à

$$\int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v) \, dx dy = \int_{\partial\Omega} (v\partial_{\nu} u - u\partial_{\nu} v) \, ds. \quad (15)$$

Une troisième identité de Green

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\partial\Omega} v \partial_{\nu} u \, ds - \int_{\Omega} v \Delta u \, dx, \quad (16)$$

est laissée comme exercice.

Nous avons appliqué la première identité de Green (14) pour prouver le principe de la valeur moyenne. A présent, nous appliquons la dernière identité de Green (16) pour établir le théorème d'unicité général pour l'équation de Poisson.

**Théorème 8** *Soit  $\Omega$  un domaine lisse.*

- (a) *Le problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson a au plus une solution.*
- (b) *Si  $\alpha \geq 0$ , alors le problème de Robin a au plus une solution.*
- (b) *Si  $u$  résout le problème de Neumann, alors toute autre solution est de la forme  $v = u + c$ , où  $c \in \mathbb{R}$ .*

**Preuve** Nous commençons avec la partie (b) (la partie (a) est un cas particulier de la partie (b)). Supposons que  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions du problème de Robin. Posez  $v = u_1 - u_2$ . Il est facile de voir que  $v$  est une fonction harmonique dans  $\Omega$ , satisfaisant sur  $\partial\Omega$  la condition aux limites  $v + \alpha \partial_{\nu} v = 0$ .

En substituant  $v = u$  dans la troisième identité de Green (16), nous obtenons

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx dy = - \int_{\partial\Omega} \alpha (\partial_{\nu} v)^2 \, ds. \quad (17)$$

Puisque le côté gauche de (17) est non négatif, et le côté droit est non positif, il suit que les deux côtés doivent s'annuler. Donc  $\nabla v = 0$  dans  $\Omega$  et  $\alpha \partial_{\nu} v = -v = 0$  sur  $\partial\Omega$ . Par conséquent  $v$  est constante dans  $\Omega$  et elle s'annule sur  $\partial\Omega$ . Ainsi  $v \equiv 0$ , et  $u_1 \equiv u_2$ .

La preuve de la partie (c) est similaire. Nous remarquons d'abord que l'on ne peut pas attendre l'unicité dans le sens des parties (a) et (b), puisque si  $u$  est une solution au problème de Neumann, alors  $u + c$  est une solution aussi pour toute constante  $c$ . En effet, nous obtenons maintenant de l'identité (16)

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx dy = 0,$$

impliquant que  $v$  est constante. D'un autre côté, puisque nous n'avons pas de contrainte sur la valeur de  $v$  sur  $\partial\Omega$ , nous ne pouvons pas déterminer la constante. Nous obtenons ainsi  $u_1 - u_2 = \text{constante}$ . □