Application of mathematics to other sciences

بعض النماذج والظواهر التي تبين تطبيق علم الرياضيات الواسع في بعض المجالات والميادين المختلفة:

.1

الفيزياء: نموذج المتذبذب التوافقي (Harmonic Oscillator)

المشكلة العلمية: وصف حركة جسم متصل بنابض (spring) أو بندول صغير الزاوية.

النموذج الرياضي (من قانون نيوتن الثاني $F = ma$):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

تعريف كل متغير ومعامل:

- $x(t)$: الإزاحة عن موضع التوازن في اللحظة t (بالمتر).
- t: الزمن (بالثانية).
- m: كتلة الجسم (بالكيلوغرام).
- k: معامل الصلابة (stiffness constant) للنابض (بالنيوتن/متر).
- $\omega = \sqrt{k/m}$: التردد الزاوي (angular frequency) (بالراديان/ثانية).

الافتراضات:

- قوة الاستعادة خطية تماماً ($F = -kx$).
- لا يوجد احتكاك أو قوى خارجية.
- الحركة في بعد واحد.

الحل التحليلي الكامل:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \quad \text{أو} \quad x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$$

حيث A: السعة (amplitude)، ϕ: الطور الأولي (initial phase).

التحليل: الطاقة الكلية $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ محفوظة. الدورة $T = 2\pi/\omega$ مستقلة عن السعة (isochronism).

تطبيقات حقيقية: ساعات الكوارتز، أنظمة التعليق في السيارات، نمذجة اهتزاز الجسور (مثل انهيار جسر تاكوما 1940).

البيولوجيا: نموذج لوتكا-فولتيرا (Lotka-Volterra) للتفاعل مفترس-فريسة

المشكلة: وصف التغير الزمني في أعداد نوعين متفاعلين (فريسة ومفترس).

النموذج:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = \delta xy - \gamma y \end{cases}$$

تعريف كل متغير ومعامل:

- $x(t)$: (عدد) t عدد أفراد الفريسة في اللحظة.
- $y(t)$: (عدد) t عدد أفراد المفترس في اللحظة.
- $\alpha > 0$: (باليوم$^{-1}$) معدل النمو الطبيعي للفريسة بدون مفترس.
- $\beta > 0$: (باليوم$^{-1}$ × عدد$^{-1}$) معامل معدل الافتراس (كفاءة التقاء الفريسة بالمفترس).
- $\delta > 0$: (باليوم$^{-1}$ × عدد$^{-1}$) معامل كفاءة تحويل الفريسة إلى نمو المفترس.
- $\gamma > 0$: (باليوم$^{-1}$) معدل الموت الطبيعي للمفترس بدون فريسة.

الافتراضات:

- نمو الفريسة أسي بدون مفترس.
- تناقص المفترس أسي بدون فريسة.
- معدل الافتراس يتناسب مع xy (تفاعل عشوائي).

التحليل:

- نقاط التوازن: $(0,0)$ (انقراض) و $\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right)$ (توازن دوري).
- دالة الحفاظ: $V(x,y) = \alpha \ln y - \beta y + \gamma \ln x - \delta x$ = ثابت.
- الحلول دورية (دورات مغلقة في المستوى الطوري).

تطبيقات: نمذجة أسماك القد والقروش في بحر الشمال، أو الآفات الزراعية

الطب والأوبئيات: نموذج SIR

المشكلة: نمذجة انتشار مرض معدٍ في مجتمع.

النموذج:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta\frac{SI}{N} \\ \frac{dI}{dt} = \beta\frac{SI}{N} - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases}$$

تعريف كل متغير ومعامل:

- $S(t)$: عدد الأفراد الحساسين (غير مصابين) في اللحظة t.
- $I(t)$: عدد الأفراد المصابين والمعدين في اللحظة t.
- $R(t)$: عدد الأفراد المتعافين (أو المتوفين) في اللحظة t.
- $N = S + I + R$: عدد السكان الكلي (ثابت).
- $\beta > 0$: معامل معدل الإصابة (transmission rate) (باليوم$^{-1}$).
- $\gamma > 0$: معامل معدل التعافي (recovery rate) (باليوم$^{-1}$).

الافتراضات:

- السكان مغلقون (لا ولادة أو هجرة).
- التفاعل عشوائي (mass action law).

التحليل:

- رقم التناسل الأساسي: $R_0 = \frac{\beta}{\gamma}$.
- إذا $R_0 > 1$ ← انتشار؛ إذا $R_0 < 1$ ← انحسار.
- ذروة الوباء عند $S = \frac{\gamma N}{\beta}$.

تطبيقات: نمذجة كوفيد-19 (منظمة الصحة العالمية 2020-2022) وتحديد موعد الإغلاق واللقاح.

الكيمياء الحيوية: نموذج مايكليس-مينتن

المشكلة: سرعة تفاعل إنزيم مع ركيزة.

الاشتقاق المختصر:

$$E + S \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} ES \xrightarrow{k_2} E + P$$

بعد افتراض حالة مستقرة (quasi-steady-state):

$$v = \frac{V_{\max}[S]}{K_m + [S]}$$

تعريف كل متغير ومعامل:

- $[S]$: تركيز الركيزة (بالمول/لتر).
- v: سرعة التفاعل (معدل تكون المنتج) (بالمول/لتر/ثانية).
- $V_{\max} = k_2[E]_0$: السرعة القصوى عند تشبع الإنزيم.
- $[E]_0$: تركيز الإنزيم الكلي (ثابت).
- $K_m = \frac{k_{-1}+k_2}{k_1}$: ثابت مايكليس (تركيز الركيزة الذي يعطي $v = V_{\max}/2$).
- k_1, k_{-1}, k_2: معاملات السرعة للخطوات (باللتر/مول/ثانية أو ثانية$^{-1}$).

التحليل: منحنى هيبربولي: خطي عند [S] منخفض، مشبع عند [S] عالي.

تطبيقات: تصميم أدوية مثبطة للإنزيمات (مثل أدوية الضغط أو السرطان).

الاقتصاد: نموذج البرمجة الخطية (Linear Programming)

المشكلة: تخصيص موارد محدودة لتحقيق هدف أقصى (ربح).

النموذج العام:

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

مع قيود:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = 1, \dots, m), \quad x_j \ge 0$$

تعريف كل متغير ومعامل:

- x_j: كمية المنتج j المنتجة (متغيرات القرار).
- c_j: ربح الوحدة من المنتج j (بالدينار/وحدة).
- a_{ij}: كمية المورد i المستهلكة لإنتاج وحدة واحدة من x_j.
- b_i: كمية المورد i المتوفرة (القيد).
- z: الدالة الهدف (الربح الكلي).

التحليل: طريقة السمبلكس (Simplex) أو البرمجة الداخلية.

التطبيق : في ميدان النقل ومجال الإنتاج وفي مجال التوزيع ومجال البحوث العملياتية.

.6

علوم البيئة: معادلة الانتشار والحمل (Advection-Diffusion Equation)

المشكلة: انتشار ملوث في نهر أو جو.

النموذج:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - kC$$

تعريف كل متغير ومعامل:

- $C(x,t)$: تركيز الملوث في المكان x والزمن t (بالملغ/لتر).
- u: سرعة التيار أو الرياح (advection velocity) (بالم/ثانية).
- $D > 0$: معامل الانتشار (diffusion coefficient) (بالم²/ثانية).
- $k > 0$: معامل التحلل أو التحلل البيولوجي (decay rate) (بالثانية⁻¹).

الافتراضات:

- تدفق أحادي البعد.
- انتشار فيك (Fick's law).

التحليل: حلول عددية (Finite Difference) أو تحويل لابلاس.

التطبيق: في كل ظواهر الانتشار والتدفق.