Université d'Oum El Bouaghi — Année universitaire 2025/2026
Master 1 - Mathématiques appliquées — Équations aux dérivés partielles

FEUILLE DE TD N°1

1 Généralités

Exercice 1 Classifiez chacune des équations différentielles suivantes comme ordinaire ou aux dérivées partielles, et d'équilibre ou dynamique ; puis écrivez son ordre.
(a) $\frac{du}{dx}+xu=1$, (b) $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=x$, (c) $u_{tt}=9u_{xx}$, (d) $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2+y^2$, (e) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial x}$, (f) $\frac{d^2u}{dt^2}+3u=\sin t$, (g) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+(x^2+y^2+z^2)u=0$, (h) $u_{xx}=x+u^2$, (i) $\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0$, (j) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=u$, (k) $u_{tt}=u_{xxxx}+2u_{xxyy}+u_{yyyy}$.

Exercice 2 En deux dimensions spatiales, le Laplacien est défini comme l'opérateur aux dérivées partielles du second ordre $\Delta=\partial_x^2+\partial_y^2$. Écrivez les équations aux dérivées partielles suivantes en utilisant (i) la notation de Leibniz ; (ii) la notation indicielle :
(a) l'équation de Laplace $\Delta u=0$ (b) l'équation de Poisson $-\Delta u=f$ (c) l'équation de la chaleur en deux dimensions $\partial_t u=\Delta u$; (d) l'équation des plaques de von Karman $\Delta^2 u=0$.

Exercice 3 Répondez à l'exercice précédent pour le Laplacien tridimensionnel $\Delta=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2$.

Exercice 4 Identifiez les variables indépendantes, les variables dépendantes et l'ordre des systèmes d'équations aux dérivées partielles suivants:
(a) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$; (b) $u_{xx}+v_{yy}=\cos(x+y)$, $u_xv_y-u_yv_x=1$; (c) $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; (d) $u_t+uu_x+vu_y=p_x$, $v_t+uv_x+vv_y=p_y$, $u_x+v_y=0$; (e) $u_t=v_{xxx}+v(1-v)$, $v_t=u_{xxy}+vw$, $w_t=u_x+v_y$.

Exercice 5 Montrez que les fonctions $u(x,y)$ suivantes définissent des solutions classiques à l'équation de Laplace en deux dimensions $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$. Prenez soin de spécifier un domaine approprié.
(a) $e^x\cos y$, (b) $1+x^2-y^2$, (c) x^3-3xy^2, (d) $\ln(x^2+y^2)$, (e) $\arctan(y/x)$, (f) $\frac{x}{x^2+y^2}$.

Exercice 6 Trouvez toutes les solutions $u=f(r)$ de l'équation de Laplace bidimensionnelle $u_{xx}+u_{yy}=0$ qui ne dépendent que de la coordonnée radiale $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

Exercice 7 Trouvez toutes les solutions (réelles) à l'équation de Laplace en deux dimensions $u_{xx}+u_{yy}=0$ de la forme $u=\ln p(x,y)$ où $p(x,y)$ est un polynôme quadratique.

Exercice 8 Trouvez toutes les solutions polynomiales $p(t,x)$ de l'équation de la chaleur $u_t=u_{xx}$ avec $\deg p\le 3$.

Exercice 9 Montrez que chacune des fonctions $u(t,x)$ suivantes est une solution de l'équation des ondes $u_{tt}=4u_{xx}$:
(a) $4t^2+x^2$; (b) $\cos(x+2t)$; (c) $\sin 2t\cos x$; (d) $e^{-(x-2t)^2}$.

Exercice 10 Trouvez toutes les solutions polynomiales $p(t,x)$ de l'équation des ondes $u_{tt} = u_{xx}$ avec
(a) $\deg p \leq 2$, (b) $\deg p = 3$.

Exercice 11 Supposons que $u(t,x)$ et $v(t,x)$ soient des fonctions de classe C^2 définies sur $\mathbb{R}^2$ qui satisfont le système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre $u_t = v_x$, $v_t = u_x$. Montrez que u et v sont toutes deux des solutions classiques de l'équation des ondes $u_{tt} = u_{xx}$. Quel résultat du calcul différentiel à plusieurs variables devez-vous utiliser pour justifier cette conclusion ?

Exercice 12 Soit $u(x,y)$ définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$. Peut-on en conclure que $u \in C^2(D)$ si l'on sait que :
(a) toutes ses dérivées partielles du second ordre, u_{xx}, u_{xy}, u_{yx}, u_{yy}, sont définies et continues sur tout D ?
(b) les dérivées u_{xx}, u_{yx}, u_{yy}, sont définies et continues sur tout D.

Exercice 13 Classifiez les équations différentielles suivantes comme étant soit (i) linéaires homogènes ; (ii) linéaires inhomogènes ; ou (iii) non linéaires :
(a) $u_t = x^2 u_{xx} + 2xu_x$; (b) $-u_{xx} - u_{yy} = \sin u$; (c) $u_{xx} + 2yu_{yy} = 3$; (d) $u_t + uu_x = 3u$; (e) $e^y u_x = e^x u_y$; (f) $u_t = 5u_{xxx} + x^2 u + x$.

Exercice 14 Écrivez toutes les solutions possibles de l'équation de Laplace que vous pouvez construire à partir des diverses solutions fournies dans l'Exercice 5 en utilisant la superposition linéaire.

Exercice 15 Le déplacement $u(t,x)$ d'une corde de violon forcée est modélisé par l'équation aux dérivées partielles $u_{tt} = 4u_{xx} + F(t,x)$. Lorsque la corde est soumise au forçage externe $F(t,x) = \cos x$, la solution est $u(t,x) = \cos(x-2t) + \frac{1}{4}\cos x$, tandis que lorsque $F(t,x) = \sin x$, la solution est $u(t,x) = \sin(x-2t) + \frac{1}{4}\sin x$. Trouvez une solution lorsque la fonction de forçage $F(t,x)$ est :
(a) $\cos x - 5\sin x$, (b) $\sin(x-3)$.

Exercice 16 (a) Montrer qu'il existe une solution unique du système

$$\begin{cases} u_x = 3x^2 y + y, \\ u_y = x^3 + x, \end{cases} \tag{1}$$

associé à la condition initiale $u(0,0) = 0$.
(b) Montrer que le système

$$\begin{cases} u_x = 2.999999\, x^2 y + y, \\ u_y = x^3 + x, \end{cases} \tag{2}$$

n'admet aucune solution.
(c) Que peut-on conclure pour le système (1) ?