Chapitre introductif : Notions Préliminaires

Prof. N. Merazga

30 mars 2026

Table des matières

1 Généralités

1.1 Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) décrivent la relation entre une fonction inconnue et ses dérivées. Omniprésentes en physique et en ingénierie, leur utilisation s'est étendue à des domaines variés tels que la biologie, l'informatique et la finance. Elles servent à modéliser des processus où la valeur d'une fonction en un point dépend de son voisinage immédiat. Les EDP nécessitent généralement des *conditions initiales* ou *aux limites* pour être résolues de manière unique.

L'analyse des EDP a évolué dans trois directions majeures :

1. L'approche classique (XIXe siècle) : Centrée sur la recherche de solutions explicites, elle a permis des avancées significatives en physique (optique, chaleur, électromagnétisme) grâce aux méthodes (*des caractéristiques*) de Hamilton, Fourier et Green.

2. L'ère numérique (70 dernières années) : L'avènement des ordinateurs a permis la résolution d'EDP complexes dans des géométries générales, bien que des obstacles pratiques subsistent.

3. L'analyse théorique : Elle vise à comprendre la structure et les propriétés qualitatives des solutions sans calcul complet. Cette approche reste cruciale pour les équations trop complexes même pour les supercalculateurs.

1.2 Premières définitions

EDO et EDP

Une équation différentielle est une équation qui relie les dérivées d'une fonction (scalaire) dépendant d'une ou plusieurs variables. Par exemple,

$$\frac{d^4u}{dx^4} + \frac{d^2u}{dx^2} + u^2 = \cos x \tag{1}$$

est une équation différentielle pour la fonction u dépendant d'une seule variable x, tandis que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \tag{2}$$

est une équation différentielle impliquant une fonction u de trois variables : x, y et t.

Une équation différentielle est dite <u>ordinaire</u> si la fonction u ne dépend que d'une seule variable, et <u>partielle</u> si elle dépend de plus d'une variable.

Typiquement, une EDP se présente sous la forme générale :

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, ...\right) = 0, \tag{3}$$

où u est une fonction (inconnue) des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, et $\frac{\partial u}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots$ sont ses dérivées partielles.

Ordre d'une équation

L'ordre d'une équation différentielle est celui de la dérivée d'ordre le plus élevé qui apparaît dans l'équation. Si la dérivée la plus élevée est d'ordre k, alors l'équation est dite d'ordre k. Ainsi, par exemple, (1) est une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre, tandis que (2) est une équation aux dérivées partielles du second ordre.

Notation

Il existe deux notations courantes pour les dérivées partielles, et nous les utiliserons de manière interchangeable. La première, utilisée dans (1), (2) et (3), est la notation familière de Leibniz qui emploie un d pour désigner les dérivées ordinaires de fonctions d'une seule variable, et le symbole ∂ (généralement prononcé "d rond") pour les dérivées partielles de fonctions de plus d'une variable. Une notation alternative, plus compacte, emploie des indices pour indiquer les dérivées partielles. Par exemple, u_t représente $\frac{\partial u}{\partial t}$, tandis que u_{xx} est utilisé pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, et u_{xxy} pour $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$. Ainsi, en notation indicielle, l'équation aux dérivées partielles (2) s'écrit

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} - u \tag{4}$$

et l'équation (3) s'écrit

$$F(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2} \ldots, u_{x_n x_n}, \ldots) = 0. \tag{5}$$

Nous abrégerons de même les opérateurs différentiels partiels, écrivant parfois $\partial / \partial x$ sous la forme ∂_x, tandis que $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ peut s'écrire soit ∂_x^2 soit ∂_{xx}, et $\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}$ devient $\partial_{xxy} = \partial_x^2 \partial_y$.

Équations scalaires versus systèmes d'équations

Une seule EDP avec une seule fonction inconnue est appelée une équation scalaire. En revanche, un ensemble de plusieurs équations reliant les dérivées d'une ou plusieurs fonctions est appelé un système d'équations différentielles.

Il est essentiel que toutes les fonctions apparaissant dans le système dépendent du même ensemble de variables. Les symboles représentant ces fonctions sont appelés les variables dépendantes, tandis que les variables dont elles dépendent sont appelées les variables indépendantes. Les systèmes d'équations différentielles sont dits ordinaires ou partiels selon qu'il y a une ou plusieurs variables indépendantes. L'ordre du système est la dérivée d'ordre le plus élevé apparaissant dans l'une de ses équations.
Par exemple, les équations de Navier-Stokes tridimensionnelles

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial y} + u_3\frac{\partial u_1}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right),\\
\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial y} + u_3\frac{\partial u_2}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right),\\
\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_3}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_3}{\partial y} + u_3\frac{\partial u_3}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial z^2}\right),\\
\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} &= 0.
\end{aligned} \tag{6}$$

forment un système d'équations différentielles du second ordre qui implique quatre fonctions, $u_1(t,x,y,z)$, $u_2(t,x,y,z)$, $u_3(t,x,y,z)$, $p(t,x,y,z)$, dépendant chacune de quatre variables, tandis que $\nu \geq 0$ est une constante fixée. (La fonction p dépend nécessairement de t, même si aucune dérivée de celle-ci n'apparaît dans le système). Les variables indépendantes sont t, représentant le temps, et x, y, z, représentant les coordonnées spatiales[1]. Les variables dépendantes sont u_1, u_2, u_3, p, avec $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ représentant le champ vectoriel de vitesse d'un écoulement fluide incompressible, par exemple l'eau, et p la pression associée. Le paramètre ν mesure la viscosité du fluide.

Équations linéaires Vs équations non linéaires

Les EDP sont souvent classées en différents types selon divers critères. La première classification se fait selon l'ordre de l'équation. Une autre classification divise les équations en deux groupes : équations linéaires contre équations non linéaires.
L'équation (3) est dite linéaire si F est linéaire par rapport à u et toutes ses dérivées, sinon elle est non linéaire. Ainsi, par exemple, l'équation $x^7 u_x + e^{xy} u_y + \sin(x^2+y^2)u = x^3$ est une équation linéaire, tandis que $u_x^2 + u_y^2 = 1$ est une équation non linéaire.
Une terminologie similaire est appliquée aux systèmes d'équations aux dérivées partielles. Par exemple, le système de Navier-Stokes (6) n'est pas linéaire à cause des termes $u_1\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $u_2\frac{\partial u_1}{\partial y}$, etc., bien que son équation constitutive finale soit linéaire.

[1]Pour nous, la dimension fait toujours référence au nombre de dimensions spatiales.

Les équations non linéaires sont souvent classées davantage en sous-classes selon le type de non-linéarité. Nous distinguons :

– L'EDP (3) est semi-linéaire lorsque F est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé, et les coefficients de ces dérivées ne dépendent que des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$. Ainsi, par exemple l'équation

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + G\left(x, y, u, u_x, u_y\right) = 0$$

où a, b, c désignent des fonctions des variables x et y et G une fonction définie dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$, est une EDP semi-linéaire d'ordre 2.

– L'EDP (3) est quasi-linéaire lorsque F est linéaire par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé de u, mais les coefficients peuvent dépendre uniquement des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_n$, de u et des dérivées d'ordre inférieur. Ainsi, par exemple l'équation

$$a\left(x, y, u, u_x, u_y\right) u_{xx} + b\left(x, y, u, u_x, u_y\right) u_{xy} + c\left(x, y, u, u_x, u_y\right) u_{yy} + G\left(x, y, u, u_x, u_y\right) = 0$$

où a, b, c et G sont des fonctions définies dans un ouvert de $\mathbb{R}^5$.

– L'EDP (3) est complètement non linéaire (Fully nonlinear) lorsque F dépend de manière non linéaire des dérivées d'ordre le plus élevé de u.

Difficultés typiques

Voici quelques principes généraux, certes vagues, mais utiles à garder à l'esprit :

1. Les équations non linéaires sont plus difficiles que les équations linéaires, et plus la non-linéarité affecte des dérivées d'ordre élevé, plus l'EDP est difficile.
2. Les EDP d'ordre élevé sont plus difficiles que les EDP de bas ordre.
3. Les systèmes d'EDP sont plus difficiles que les équations scalaires.
4. Les EDP faisant intervenir de nombreuses variables indépendantes sont plus difficiles que celles n'en faisant intervenir que peu.
5. Pour la plupart des EDP, il est impossible d'écrire des formules explicites pour les solutions.

Aucune de ces affirmations n'est dépourvue d'exceptions importantes.

1.3 Exemples fondamentaux

Pour donner une idée du large éventail d'applications, nous présentons une série d'exemples, suggérant l'une des interprétations possibles. Dans les exemples, x représente une variable d'espace (généralement en dimension $n = 1, 2, 3$) et t est une variable temporelle.
En particulier, les équations (7)-(10) sont fondamentales et leur théorie constitue un point de départ pour de nombreuses autres équations.

1. Équation de transport

$$u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0. \tag{7}$$

Elle décrit par exemple le transport d'une substance polluante solide le long d'un canal ; ici u est la concentration de la substance et $\mathbf{v}$ est la vitesse du courant.

2. Équation de diffusion ou de la chaleur

$$u_t - k\Delta u = 0, \tag{8}$$

où $\Delta = \partial_{x_1x_1} + \partial_{x_2x_2} + \cdots + \partial_{x_nx_n}$ est l'opérateur de Laplace. Elle décrit la conduction de la chaleur à travers un milieu homogène et isotrope ; u est la température et k traduit les propriétés thermiques du matériau. Le Chapitre 3 est consacré à l'équation de la chaleur et ses variantes.

3. Équation des ondes

$$u_{tt} - c^2\Delta u = 0. \tag{9}$$

Elle décrit par exemple la propagation d'ondes transversales de petite amplitude dans une corde parfaitement élastique (par ex. un violon) si $n = 1$, ou une membrane (par ex. un tambour) si $n = 2$. Si $n = 3$, elle gouverne la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide ou des ondes sonores de petite amplitude. Ici, u peut représenter l'amplitude de l'onde et c est la vitesse de propagation.

4. Équation de Laplace ou du potentiel

$$\Delta u = 0 \tag{10}$$

où $u = u(x)$. Les équations de diffusion et des ondes modélisent des phénomènes d'évolution. L'équation de Laplace décrit l'état stationnaire correspondant, dans lequel la solution ne dépend plus du temps. Avec sa version non homogène

$$\Delta u = f \tag{11}$$

appelée équation de Poisson, elle joue également un rôle important en électrostatique. Le Chapitre 2 est consacré à ces équations.

5. Équation de Black-Scholes

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0. \tag{12}$$

Ici $u = u(x,t)$, $x \geq 0$, $t \geq 0$. Fondamentale en mathématiques financières, cette équation gouverne l'évolution du prix u d'un produit dit dérivé (par ex. une option européenne), basé sur un actif sous-jacent (une action, une devise, etc.) dont le prix est x.

6. Plaque vibrante

$$u_{tt} - \Delta^2 u = 0, \tag{13}$$

où $x \in \mathbb{R}^2$ et

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4}$$

est l'opérateur biharmonique. Dans la théorie de l'élasticité linéaire, l'équation (13) modélise les ondes transversales de petite amplitude d'une plaque isotrope homogène.

7. Équation de Burgers

$$u_t + cuu_x = 0 \quad (x \in \mathbb{R}). \tag{14}$$

Elle gouverne un flux unidimensionnel d'un fluide non visqueux ($u =$vitesse de l'écoulement) mais est aussi utilisée pour modéliser la dynamique du trafic routier ($u =$densité des véhicules). Sa variante visqueuse

$$u_t + cuu_x = \nu u_{xx} \quad (\nu > 0) \qquad (\nu = \text{viscosité}) \tag{15}$$

constitue un exemple basique de compétition entre la dissipation (due au terme νu_{xx}) et le raidissement (formation de chocs due au terme cuu_x).

8. Équation de Fisher

$$u_t - k\Delta u = ru(M-u) \tag{16}$$

(k, r, M constantes positives). Elle gouverne l'évolution d'une population de densité u, soumise à la diffusion et à une croissance logistique (représentée par le membre de droite).

9. Équation des milieux poreux

$$u_t = k \operatorname{div}(u^\gamma \nabla u) \qquad \textbf{(ou } u_t = k\,\Delta(u^\gamma)\textbf{)} \tag{17}$$

où $k > 0$, $\gamma > 1$ sont constants. Cette équation apparaît dans la description de phénomènes de filtration, par ex. le mouvement de l'eau à travers le sol.

10. Équation des surfaces minimales

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^2). \tag{18}$$

Ici $|\nabla u|$ désigne la norme euclidienne du gradient de u. Le graphe d'une solution u minimise l'aire parmi toutes les surfaces $z = v(x_1, x_2)$ dont la frontière est une courbe donnée. Par exemple, les bulles de savon sont des surfaces minimales.

11. Équation eikonale

$$|\nabla u| = c(x). \tag{19}$$

Elle apparaît en optique géométrique : si u est une solution, ses surfaces de niveau $u(x) = t$ décrivent la position d'un front d'onde lumineuse au temps t.

Donnons maintenant quelques exemples de systèmes.

12. Équation de Navier de l'élasticité linéaire

$$\rho \mathbf{u}_{tt} = \mu\Delta\mathbf{u} + (\mu+\lambda)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} \tag{20}$$

où $\mathbf{u} = \big(u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)\big)$, $x \in \mathbb{R}^3$. Le vecteur $\mathbf{u}$ représente le déplacement par rapport à l'équilibre d'un corps continu déformable de densité (constante) ρ.

13. Équations de Maxwell dans le vide

$$\begin{cases} \mathbf{E}_t - \operatorname{rot}\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{B}_t + \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 & \textbf{(Lois d'Ampère et Faraday)} \\ \operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 & \textbf{(Lois de Gauss)}, \end{cases} \tag{21}$$

où $\mathbf{E}$ est le champ électrique et $\mathbf{B}$ est le champ d'induction magnétique.

14. Équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} \\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \end{cases} \tag{22}$$

où $\mathbf{u} = \big(u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t)\big)$, $p = p(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^3$. Cette équation gouverne le mouvement d'un fluide visqueux, homogène et incompressible. Ici $\mathbf{u}$ est la vitesse du fluide, p sa pression, ρ sa densité (constante) et ν est la viscosité cinématique, donnée par le rapport entre la viscosité du fluide et sa densité. Le terme $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}$ représente l'accélération inertielle due au transport du fluide.

1.4 Solutions classiques

Généralement, une EDP est considérée dans un certain domaine D contenu dans l'espace des variables indépendantes. En général, Le domaine D sera un sous-ensemble ouvert (habituellement connexe) avec une frontière raisonnablement régulière, notée ∂D.
Supposons que l'on soit concernés par la résolution d'une EDP imposée dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ pour une fonction inconnue $u = u(x_1, \ldots, x_n)$. Par solution, nous entendons une fonction u suffisamment régulière ("smooth") sur D et qui satisfait l'EDP en tout point du domaine D.
Nous qualifierons une fonction de régulière si elle est suffisamment dérivable, au moins de sorte que toutes les dérivées apparaissant dans l'équation soient bien définies sur le domaine d'intérêt D. Plus spécifiquement, si l'EDP est d'ordre k, alors nous exigeons que la solution u soit de classe C^k, ce qui signifie qu'elle et toutes ses dérivées d'ordre $\leq k$ sont des fonctions continues dans D, et telles que l'EDP soit vérifiée dans tout D ; c'est ce que l'on appelle le cadre classique. Cependant, ce cadre peut se montrer trop restrictif : les discontinuités sont fréquentes en physique (ondes de choc, hétérogénéités), et il peut être souhaitable de placer l'EDP dans un cadre plus large où les solutions peuvent présenter des irrégularités. Dans ce cadre, on parle de solutions faibles ou solutions généralisées (ce type de solutions sera

introduit dans d'autres modules). Pour souligner la distinction, les solutions régulières décrites ci-dessus sont souvent appelées solutions classiques. Dans ce cours, le terme "solution" sans qualification supplémentaire signifiera automatiquement "solution classique".
Notez également que, en général, nous sommes tenus de résoudre un problème qui consiste en une EDP et des conditions associées. Pour qu'une solution classique de l'EDP soit aussi une solution classique du problème complet, elle doit satisfaire les conditions supplémentaires de manière régulière ("smooth way").

Exemple 1 Une solution classique de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{23}$$

est une fonction $u(t, x)$, définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$, telle que toutes les fonctions

$$u(t,x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t,x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(t,x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x),$$

soient bien définies et continues en tout point $(t, x) \in D$, de sorte que $u \in C^2(D)$ et, de plus, (23) soit vérifiée à chaque $(t, x) \in D$. Observez que, même si seuls u_t et u_{xx} apparaissent explicitement dans l'équation de la chaleur, nous exigeons la continuité de toutes les dérivées partielles d'ordre ≤ 2 pour que u soit qualifiée de solution classique ([2]).
Par exemple,

$$u(t, x) = t + \frac{1}{2}x^2 \tag{24}$$

est une solution classique de l'équation de la chaleur (23) définie sur le domaine entier $D = \mathbb{R}^2$ car elle est C^2 (en fait, elle est C^∞, i.e. indéfiniment différentiable sur tout $\mathbb{R}^2$), et de plus,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = 1 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x), \quad \forall (t,x) \in D = \mathbb{R}^2.$$

Une autre solution classique, plus compliquée, est

$$u(t, x) = \frac{e^{-x^2/(4t)}}{2\sqrt{\pi t}}. \tag{25}$$

On vérifie aisément que $u \in C^2$ et, de plus, résout l'équation de la chaleur sur le domaine $D = \{t > 0\} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$.

[2]) L'égalité des dérivées partielles mixtes découle d'un théorème général de calcul différentiel multivariables (théorème de Schwarz). Les solutions classiques jouissent automatiquement de l'égalité de toutes leurs dérivées partielles mixtes pertinentes.

Avec i désignant l'unité imaginaire, nous notons que

$$u(t,x) = e^{-t+ix} = e^{-t}\cos x + ie^{-t}\sin x, \tag{26}$$

définit une solution à valeurs complexes de l'équation de la chaleur. Il vaut la peine de souligner que tant la partie réelle, $e^{-t}\cos x$, que la partie imaginaire, $e^{-t}\sin x$, de la solution complexe (26) sont des solutions réelles individuelles.

1.5 Opérateurs différentiels linéaires et principe de superposition

Les applications entre différents ensembles de fonctions sont appelées opérateurs. L'action d'un opérateur L sur une fonction u sera notée $L(u)$ ou Lu tout simplement. En particulier, nous traiterons dans ce cours des opérateurs définis par des dérivées partielles de fonctions. De tels opérateurs, qui sont en fait des applications entre différentes classes C^k, sont appelés opérateurs différentiels.

Définition 1 *Un opérateur différentiel L qui satisfait la relation*

$$L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1Lu_1 + c_2Lu_2, \tag{27}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires, et u_1 et u_2 sont des fonctions arbitraires, est appelé un opérateur linéaire.

Un tel opérateur est obtenu en sommant des opérateurs de dérivées partielles de base, avec soit des coefficients constants, soit, plus généralement, des coefficients dépendant des variables indépendantes.

Par exemple, un opérateur différentiel linéaire du second ordre dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ est défini sur les fonctions $u \in C^2(\Omega)$ par :

$$(Lu)(x,y) = a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + e(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + f(x,y)u$$

où a, b, c, d, e et f désignent des fonctions définies sur Ω. Si ces fonctions sont continues sur Ω, Lu est continue sur Ω.

La définition d'une équation différentielle linéaire homogène repose sur le concept d'opérateur différentiel linéaire.

Définition 2 *Une équation différentielle est linéaire si elle peut être exprimée sous la forme*

$$Lu = g, \tag{28}$$

où L est un opérateur différentiel linéaire, u est la fonction inconnue et g est une fonction donnée dépendant uniquement des variables indépendantes.
Dans le cas où g est identiquement nulle, i.e. $Lu = 0$, l'équation est appelée équation linéaire homogène (ou sans second membre), sinon elle est dite équation linéaire non homogène (ou avec second membre).

Exemple 2 Comme exemple simple, considérons l'opérateur différentiel du second ordre

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \text{par lequel} \quad Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pour toute fonction $u \in C^2$. La linéarité de L découle immédiatement des propriétés de base de la dérivation :

$$L(c_1 u + c_2 v) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(c_1 u + c_2 v) = c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = c_1 Lu + c_2 Lv,$$

égalité valide pour toutes fonctions u, v de classe C^2 et toutes constantes c_1, c_2. L'équation différentielle linéaire homogène correspondante $Lu = 0$ est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Exemple 3 Définissons l'opérateur $L = \partial^2/\partial x^2 - \partial^2/\partial y^2$. L'équation

$$Lu = u_{xx} - u_{yy} = 0 \tag{29}$$

est une équation linéaire homogène, tandis que l'équation

$$Lu = u_{xx} - u_{yy} = x^2 \tag{30}$$

est un exemple d'équation linéaire non homogène.

Exemple 4 L'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos(x - t)u \tag{31}$$

est une EDP linéaire homogène, alors que l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos(x - t)$$

est linéaire non homogène.

Les opérateurs linéaires jouent un rôle central en mathématiques en général, et dans la théorie des EDP en particulier. Cela résulte du fait qu'ils jouissent de deux propriétés importantes ; la première propriété appelée principe de superposition permet, dans le cas des EDP linéaires homogènes, de combiner simplement des solutions pour former de nouvelles solutions.

Théorème 1 (Principe de superposition) *Soit L un opérateur différentiel linéaire. Si pour $1 \leq i \leq k$, la fonction u_i satisfait l'équation différentielle linéaire $Lu_i = f_i$, alors la combinaison linéaire, ou superposition, $u := \sum_{i=1}^{k} c_i u_i$ satisfait l'équation $Lu = \sum_{i=1}^{k} c_i f_i$ pour tout choix de constantes $c_1, \ldots, c_k$.*
En particulier, si chacune des fonctions $u_1, u_2, ..., u_k$ satisfait l'équation homogène $Lu = 0$, alors toute combinaison linéaire de celles-ci satisfait aussi cette équation.

Preuve. La propriété découle immédiatement de la linéarité de l'équation. ■

Exemple 5 Dans le cas de l'équation de la chaleur (23), nous sommes déjà en possession de deux solutions, à savoir (24) et (25). En multipliant chacune par une constante, on produit deux familles infinies de solutions :

$$u(t,x) = c_1 \left(t + \frac{1}{2} x^2 \right)$$

et

$$u(t,x) = \frac{c_2 e^{-x^2/(4t)}}{2\sqrt{\pi t}}$$

où c_1, c_2 sont des constantes arbitraires. De plus, en additionnant ces dernières solutions, on produit une famille de solutions à deux paramètres

$$u(t,x) = c_1 \left(t + \frac{1}{2} x^2 \right) + \frac{c_2 e^{-x^2/(4t)}}{2\sqrt{\pi t}}$$

valide pour tout choix des constantes c_1, c_2.

Exemple 6 Trouver une solution de l'équation des ondes $u_{tt} - 4u_{xx} = \sin t + x^2$. Remarquez qu'on nous demande de trouver une solution, et non la solution la plus générale. Nous allons exploiter la linéarité de l'équation des ondes. Selon le principe de superposition, nous pouvons décomposer $u = v + w$, de telle sorte que v et w soient solutions de :

$$v_{tt} - 4v_{xx} = \sin t, \tag{32}$$

$$w_{tt} - 4w_{xx} = x^2. \tag{33}$$

L'avantage obtenu par cette étape est que des solutions pour chacune de ces équations peuvent être facilement obtenues :

$$v(x,t) = -\sin t,$$
$$w(x,t) = -\frac{1}{48}x^4.$$

Ainsi,

$$u(x,t) = -\sin t - \frac{x^4}{48}.$$

Remarque 1 Dans le langage de l'algèbre linéaire, le théorème 1 nous dit que les solutions d'une EDP linéaire homogène forment un espace vectoriel. Il en va de même pour les équations algébriques linéaires et les EDO linéaires. Dans ces deux dernières situations, une fois que l'on trouve un nombre suffisant de solutions indépendantes, la solution générale est obtenue comme une combinaison linéaire de celles-ci. Dans le langage de l'algèbre linéaire, l'espace des solutions est de dimension finie. En revanche, la plupart des EDP linéaires admettent un nombre infini de solutions indépendantes, ce qui signifie que l'espace des solutions est de dimension infinie, et, par conséquent, on ne peut espérer construire la solution générale en prenant des combinaisons linéaires finies. D'où la nécessité de recourir à la formation de séries infinies impliquant les solutions de base. De telles considérations nous conduiront bientôt au coeur de l'analyse de Fourier, et nécessiteront de développer les outils analytiques requis.

La deuxième propriété à laquelle tient l'importance des opérateurs différentiels linéaires concerne la technique de base que vous avez déjà apprise pour résoudre les EDO linéaires inhomogènes :

- La première étape consiste à déterminer la solution générale de l'équation homogène.
- La seconde étape consiste à trouver une solution particulière à la version inhomogène.

La solution générale de l'équation inhomogène est alors obtenue en additionnant les deux. Voici la version générale de cette procédure :

Théorème 2 *Soit v^* une solution particulière de l'équation linéaire inhomogène $Lv = f$. Alors, la solution générale de $Lv = f$ est donnée par $v = v^* + u$, où u est la solution générale de l'équation homogène correspondante $Lu = 0$.*

Preuve. Montrons d'abord que $v = v^* + u$ est également une solution dès lors que $Lu = 0$. Par linéarité,

$$Lv = L(v^* + u) = Lv^* + Lu = f + 0 = f.$$

Pour montrer que toute solution de l'équation inhomogène peut être exprimée de cette manière, supposons que v satisfait $Lv = f$. Posons $u = v - v^*$. Alors, par linéarité,

$$Lu = L(v - v^*) = Lv - Lv^* = 0,$$

et par conséquent u est une solution de l'équation différentielle homogène. Ainsi, $v = v^* + u$ possède la forme requise. ■

Les deux Théorèmes ci-dessus nous fournissent des outils puissants pour résoudre les EDP linéaires. En revanche, les EDP non linéaires sont beaucoup plus difficiles et, généralement, la connaissance de plusieurs solutions n'aide que très peu à en construire d'autres.

1.6 Conditions (initiales et aux limites) associées et notion de problème bien posé

Une EDP possède en général une infinité de solutions. Afin d'obtenir une solution unique, il est nécessaire de compléter l'équation par des conditions supplémentaires adpatées au type d'EDP considérée. Dans cette section, nous passons brièvement en revue les conditions usuelles et expliquons, à l'aide d'exemples, leur signification physique.

1.6.1 Conditions initiales

Considérons l'équation de transport en une dimension spatiale comme prototype des équations du premier ordre :

$$u_t + vu_x = 0. \tag{34}$$

La fonction inconnue u représente la concentration d'un polluant transporté par un courant de vitesse v le long d'un canal. Il est naturel de formuler un problème dans lequel on fournit la concentration en tout point x à un instant donné t_0, puis de déduire à partir de l'équation la concentration aux instants ultérieurs. Autrement dit, on résout le problème constitué de l'équation (34) et de la condition

$$u(x, t_0) = u_0(x), \qquad u_0 \text{ fonction donnée.} \tag{35}$$

Ce problème est appelé problème à valeur initiale ou problème de Cauchy.

D'un point de vue géométrique, une solution $z = u(x, t)$ est une surface définie sur le plan (x, t) dans l'espace 3D (x, t, z) et la condition (35) détermine une courbe par laquelle la surface solution doit passer. On peut généraliser (35) en imposant une courbe Γ devant appartenir à la surface solution, de telle sorte que la projection de Γ sur le plan (x, t) ne soit pas nécessairement l'axe x.

Un autre cas où il est naturel d'imposer des conditions initiales est l'équation de la chaleur

$$u_t - k\Delta u = 0, \tag{36}$$

où $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$. On précise alors la distribution de température du corps à un instant initial (dans la plupart des cas $t = 0$) et l'on cherche sa distribution aux instants ultérieurs :

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z).$$

Les deux exemples précédents concernent des EDP comportant une seule dérivée par rapport au temps. Par analogie avec la théorie des problèmes à valeur initiale pour les EDO, on s'attend à ce que les équations comportant des dérivées secondes par rapport au temps nécessitent deux conditions initiales. C'est en effet le cas de l'équation des ondes

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \frac{1}{\rho} f(x, t) \tag{37}$$

qui décrit par exemple la propagation d'ondes transversales de petite amplitude dans une corde parfaitement élastique. Il est donc naturel de fournir deux conditions initiales : l'une pour la position initiale de la corde, et l'autre pour sa vitesse initiale :

$$u(x, 0) = u_0(x), \qquad u_t(x, 0) = u_1(x).$$

Ainsi, pour les EDP modélisant des processus dynamiques (ou évolutifs, i.e. dans lesquels le temps est l'une des variables indépendantes), la solution doit être spécifiée par une ou plusieurs conditions initiales. Le nombre de conditions initiales requises dépend de la dérivée temporelle d'ordre *le plus élevé* qui apparaît dans l'équation.

1.6.2 Conditions aux limites

Les EDP modélisant des phénomènes d'équilibre (*équations stationnaires*) nécessitent des conditions aux limites (ou conditions au bord ou conditions frontières) pour spécifier leurs solutions de manière unique. Ce sont des conditions portant sur le comportement de la solution (et/ou de ses dérivées) sur le bord du domaine (spatiale) considéré. Ces conditions peuvent être de nature très différente et influent fortement sur l'existence et la forme des solutions. Le problème obtenu en associant une condition aux limites appropriée à une EDP est appelée un problème aux limites.

A titre d'exemple illustratif, considérons l'équation de Laplace restreinte à un domaine spatial borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$\Delta u = 0, \qquad (x, y, z) \in \Omega. \tag{38}$$

Cette équation décrit l'état stationnaire de la diffusion (de la chaleur), dans lequel la solution ne dépend plus du temps.
Afin d'obtenir une solution unique, il est nécessaire de fournir des informations sur le comportement de u sur le bord $\partial\Omega$. Dans les applications, on rencontre principalement l'un des quatre types de conditions aux limites :

1. Le premier type consiste à imposer la valeur de la température u sur le bord :

$$u(x, y, z) = g(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in \partial\Omega. \tag{39}$$

   On parle alors de condition de Dirichlet ([3]). Le problème (38)-(39) est appelé problème de Dirichlet.

2. Une autre possibilité consiste à imposer la dérivée normale de la température sur le bord :

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) = g(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in \partial\Omega. \tag{40}$$

   Cette condition est appelée condition de Neumann ([4]). La dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n}$ représente le flux de chaleur à travers le bord. Ainsi, une paroi isolante est modélisée par la condition (40) avec $g \equiv 0$. Le problème (38)-(40) est appelé problème de Neumann.

3. Un troisième type de condition aux limites impose une relation entre la valeur de u et celle de sa dérivée normale sur le bord :

$$\alpha(x, y, z)\frac{\partial u}{\partial n}(x, y, z) + u(x, y, z) = g(x, y, z), \qquad (x, y, z) \in \partial\Omega. \tag{41}$$

   On parle alors de condition du troisième type, ou de condition de Robin ([5]) ou encore de condition de Fourier (ou même de Newton). En thermique, cette condition exprime la loi de refroidissement de Newton : le flux de chaleur à la surface $\partial\Omega$ (donné par la loi de Fourier, d'où le nom) est proportionnel à la différence de température entre la surface et le milieu extérieur. Le problème (38)-(41) est appelé problème de Fourier-Robin.

[3]) en l'honneur du mathématicien allemand Johann Lejeune Dirichlet (1805–1859).
[4]) du nom du mathématicien allemand Carl Neumann (1832–1925).
[5]) en référence au mathématicien français Victor Gustave Robin (1855-1897).

4. Une quatrième alternative consiste à imposer une condition de Dirichlet sur une partie Γ du bord et une condition de Neumann sur le reste :

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= g_1(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in \Gamma \subsetneqq \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y,z) &= g_2(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in \partial\Omega \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

   Ce type de condition est appelé condition mixte ou mêlée et le problème résultant est appelé problème aux limites mixte ou problème mêlé.

Il existe d'autres types de conditions aux limites : conditions obliques, ou encore conditions non locales reliant le flux thermique en chaque point du bord à l'intégrale de la température sur l'ensemble du bord ...

Remarque 2 Dans le cas où l'ouvert Ω est non borné, l'EDP est généralement complétée par un comportement asymptotique à l'infini de la solution ; par exemple en demandant qu'elle reste bornée ou qu'elle s'annule à l'infini ...

Lorsque l'équation considérée est une EDP d'évolution posée dans un domaine spatio-temporel de type

$$D = \Omega \times]t_0, +\infty[$$

où Ω est un ouvert de l'espace $\mathbb{R}^n$ (en pratique $n = 1, 2, 3$) et $]t_0, +\infty[$ est l'intervalle temporel d'étude, t_0 étant l'instant initial (souvent pris égal à 0), alors elle est souvent complétée par des conditions initiales (en nombre convenable) en $t = t_0$ et des conditions aux limites (sur $\partial\Omega$). On a alors un *problème de Cauchy en temps* et *un problème aux limites en espace* que l'on appelle également problème mixte (mixed problem or initial-boundary value problem : IBVP).

A titre d'exemple, pour l'équation de la chaleur (8) restreinte à un domaine spatial borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, on peut envisager les différents problèmes mixtes suivants :

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u, & (x,y,z) \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,y,z,t) = g(x,y,z,t), & (x,y,z) \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z), & (x,y,z) \in \Omega. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u, & (x,y,z) \in \Omega,\ t > 0, \\ \partial_n u(x,y,z,t) = g(x,y,z,t), & (x,y,z) \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z), & (x,y,z) \in \Omega. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u, & (x,y,z) \in \Omega,\ t > 0, \\ \alpha(x,y,z)\partial_n u(x,y,z,t) + u(x,y,z,t) = g(x,y,z,t), & (x,y,z) \in \partial\Omega,\ t > 0, \\ u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z), & (x,y,z) \in \Omega. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u, & (x,y,z) \in \Omega,\ t > 0, \\ u(x,y,z,t) = g_1(x,y,z,t), & (x,y,z) \in \Gamma \subsetneqq \partial\Omega,\ t > 0, \\ \partial_n u(x,y,z,t) = g_2(x,y,z,t), & (x,y,z) \in \partial\Omega \smallsetminus \Gamma,\ t > 0, \\ u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z), & (x,y,z) \in \Omega. \end{cases}$$

Remarque 3 Une considération supplémentaire est que, outre toute régularité requise par l'EDP à l'intérieur du domaine, la solution et ses dérivées spécifiées dans toute condition initiale ou aux limites doivent également être continues en tout point initial ou frontière où la condition est imposée. Par exemple, si la condition initiale spécifie la valeur de la fonction $u(x,0)$ pour $a < x < b$, tandis que les conditions aux limites spécifient les dérivées $\dfrac{\partial u}{\partial x}(a,t)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial x}(b,t)$ pour $t > 0$, alors, en plus de toute régularité requise à l'intérieur du domaine $\{a < x < b, t > 0\}$, nous exigeons également que u soit continue en tous les points initiaux $(x,0)$, et que sa dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ soit continue en tous les points frontières (a,t) et (b,t), afin que $u(x,t)$ soit qualifiée de solution classique au problème mixte.

1.6.3 Problème bien posé

En général, une EDP provient d'un modèle d'un problème physique ou d'ingénierie. Il n'est pas automatiquement évident que le modèle soit effectivement cohérent au sens où il conduit à une EDP *résoluble*. Par ailleurs, il est souhaitable dans la plupart des cas que la solution soit *unique*, et qu'elle soit *stable* sous de petites perturbations des données : *la solution (unique) ne varie que faiblement lorsque les conditions spécifiant le problème varient faiblement*.

La question théorique fondamentale consiste à savoir si ces conditions sont satisfaites pour le problème constitué de l'équation et de ses conditions auxiliaires associées. Dans ce contexte, Jacques Hadamard ([6]) a introduit la notion de "problème bien posé".

Définition 3 *Un problème donné pour une EDP est dit <u>bien posé</u> (well-posed) ou <u>stable</u> s'il satisfait aux trois critères suivants :*

1. ***Existence :*** *Le problème admet effectivement une solution.*
2. ***Unicité :*** *Il n'y a pas plus d'une solution.*

[6]) Mathématicien français (1865-1963).

3. ***Stabilité :*** *la solution dépend continûment des données du problème, i.e. un "petit" changement dans les données de l'équation ou des conditions auxiliaires donne lieu à un "petit" changement dans la solution.*

Si un ou plusieurs des critères ci-dessus ne sont pas remplis, nous dirons que le problème est mal posé. Lorsque nous sommes confrontés à un tel problème, la première étape devrait être de le modifier de manière appropriée afin de le rendre bien posé.

2 Classification des équations aux dérivées partielles semi-linéaires d'ordre 2

Les EDP du second ordre sont omniprésentes en physique mathématique et leur étude est cruciale.
Classer les EDP est essentiel car le type d'équation détermine les propriétés qualitatives, les conditions aux limites admissibles et les méthodes de résolution appropriées.
Dans cette section, nous procédons à la classification des équations semi-linéaires du second ordre (d'abord à deux variables, puis à n variables) et montrons comment les ramener à une forme canonique associée à son type par un changement de variables.

2.1 Équations à deux variables indépendantes

Une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes x, y se met sous la forme :

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \tag{42}$$

Nous nous concentrons dans ce § sur les EDP semi-linéaires du second ordre pour des fonctions de deux variables indépendantes x, y. De telles équations se présentent sous la forme

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{43}$$

où a, b et c sont des fonctions données définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, F est une fonction donnée définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^5$ et $u(x, y)$ est la fonction inconnue. Nous avons introduit le facteur 2 devant le coefficient b par commodité. Nous supposons que les coefficients a, b, c ne s'annulent pas simultanément.

Il s'avère que de nombreuses propriétés fondamentales des solutions de (43) sont déterminées par sa partie principale

$$L_0[u] = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy}$$

et plus précisément, par le signe du discriminant réduit

$$\delta := b^2 - ac$$

de l'équation. Nous classifions l'équation selon le signe de δ.

2.1.1 Classification et caractéristiques

Définition 4 *L'équation (43) est dite*

- *hyperbolique en un point (x, y) si $\delta(x, y) > 0$,*
- *parabolique en (x, y) si $\delta(x, y) = 0$,*
- *elliptique en (x, y) si $\delta(x, y) < 0$.*

Soit D un domaine dans $\mathbb{R}^2$ (i.e. un ensemble ouvert connexe). L'équation est hyperbolique (resp., parabolique, elliptique) dans D, si elle est hyperbolique (resp., parabolique, elliptique) en tout point $(x, y) \in D$.
Le caractère hyperbolique, parabolique ou elliptique d'une équation s'appelle son type, ou son genre ou sa nature. Il ne dépend que des termes de la partie principale de l'équation *et nous vérifierons qu'il ne dépend pas du système de coordonnées.*
Lorsque a, b et c sont des constantes, la nature de (43) est celle de la cônique d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$.

Définition 5 *La transformation $(\xi, \eta) = (\varphi(x, y), \psi(x, y))$ est appelée un changement de coordonnées (ou une transformation non singulière) dans un domaine D de $\mathbb{R}^2$ si le Jacobien*

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D((x, y)} = \det J(x, y) := \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$$

de la transformation ne s'annule en aucun point $(x, y) \in D$.

Si φ et ψ sont de classe C^1, on sait (par le théorème d'inversion locale) qu'il existe alors dans un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$ de classe C^1 également telles que $x = \widetilde{\varphi}(\xi, \eta)$ et $y = \widetilde{\psi}(\xi, \eta)$ $\forall\, (\xi, \eta) \in U$.
Nous supposerons que nos changements de coordonnées vérifient la condition $\det J \neq 0$.

Remarque 4 Soit u une quantité qui dépend de x et y, elle peut être également exprimée en fonction de ξ et η, naturellement les fonctions ne sont pas les mêmes mais on convient le plus souvent de toujours noter u la quantité exprimée soit en fonction de x et y, soit en fonction de ξ et η et on écrit :

$$u(x,y) = u(\widetilde{\varphi}(\xi,\eta), \widetilde{\psi}(\xi,\eta)) = u(\xi,\eta).$$

Lemme 1 *Le type d'une EDP semi-linéaire du second ordre à deux variables est invariant sous un changement de coordonnées. En d'autres termes, le type de l'équation est une propriété intrinsèque de l'équation et est indépendant du système de coordonnées particulier utilisé.*

Preuve. Soit $(\xi,\eta) = (\varphi(x,y), \psi(x,y))$ une transformation non singulière. Nous allons chercher la nouvelle forme de (43) dans le système ξ, η. Écrivons $u(x,y) = u(\xi,\eta)$. En utilisant la règle de la chaîne, on trouve que

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.
\end{aligned}$$

En substituant ces formules dans (43), nous voyons que u satisfait l'équation semi-linéaire suivante :

$$Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + G(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0, \tag{44}$$

où les coefficients de la partie principale de l'équation sont donnés par

$$\begin{aligned}
A(\xi,\eta) &= a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2, &(45)\\
B(\xi,\eta) &= a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y, &(46)\\
C(\xi,\eta) &= a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2. &(47)
\end{aligned}$$

Un calcul élémentaire montre que ces coefficients satisfont l'équation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{pmatrix}$$

Notons $\det J$ le Jacobien de la transformation. En prenant le déterminant des deux côtés de l'équation matricielle ci-dessus, nous trouvons

$$AC - B^2 = (\det J)^2 \, (ac - b^2).$$

Comme $\det J \neq 0$, le signe de la quantité $b^2 - ac$ donnant le type de l'équation est invariant sous des transformations non singulières. ■

Définition 6 (Caractéristiques) *L'équation différentielle ordinaire :*

$$a(dy)^2 - 2b\,dxdy + c(dx)^2 = 0 \tag{48}$$

est appelée <u>équation caractéristique</u> de l'EDP (43), et ses intégrales sont appelées <u>courbes carac -téristiques</u>.

Si la fonction a n'est pas identiquement nulle, l'équation caractéristique (48) se met sous la forme

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2b\frac{dy}{dx} + c = 0. \tag{49}$$

Si la fonction c n'est pas identiquement nulle, l'équation caractéristique (48) se met sous la forme

$$c\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 2b\frac{dx}{dy} + a = 0. \tag{50}$$

Si les fonctions a et c sont identiquement nulles, l'équation caractéristique (48) se réduit à

$$dxdy = 0, \tag{51}$$

et les courbes caractéristiques sont les droites $x = const.$ et $y = const.$
On voit que la recherche de caractéristiques dans le cas non trivial $a \neq 0$ (resp. $c \neq 0$) se ramène à la résolution d'un problème du second degré en $\frac{dy}{dx}$ (resp. $\frac{dx}{dy}$).
L'existence de solutions réelles dépend alors du signe du discriminant réduit $\delta = b^2 - ac$ qui caractérise la nature de l'équation (43). Pour $a \neq 0$, on a

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} & \text{si } b^2 - ac > 0, \\[2ex] \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a} & \text{si } b^2 - ac = 0, \\[2ex] \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a} \pm i\dfrac{\sqrt{ac - b^2}}{a} & \text{si } b^2 - ac < 0, \end{cases} \tag{52}$$

où $i^2 = 1$. Ainsi,

Théorème 3 *Soit D un domaine de $\mathbb{R}^2$.*

- *Si l'équation (43) est hyperbolique dans D, elle admet deux familles de courbes caractéristiques réelles dans D.*
- *Si l'équation (43) est parabolique dans D, elle admet une seule famille de courbes caractéristiques réelles dans D.*
- *Si l'équation (43) est elliptique dans D, elle admet deux familles de courbes caractéristiques complexes conjuguées dans D (pas de caractéristiques réelles).*

Exemple 7 L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

est une équation pour laquelle $b^2 - ac = 0 - (-1) = 1 > 0$. Elle est donc hyperbolique dans $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Ses caractéristiques sont les solutions de l'équation :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 1 = 0.$$

Il y a deux familles solutions de

$$\frac{dx}{dt} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{dx}{dt} = -1,$$

ce sont les droites

$$x - t = C_1 \quad \text{et} \quad x + t = C_2$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles arbitraires.

Exemple 8 L'équation de la diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

est parabolique dans $\mathbb{R}^2$ car $b^2 - ac = 0 - 0 = 0$.

Ses caractéristiques sont les solutions de l'équation :

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 = 0.$$

Il existe une seule famille solutions de $\frac{dt}{dx} = 0$, ce sont les droites $t = C$, où C est une constante réelle arbitraire.

Exemple 9 L'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

est elliptique dans $\mathbb{R}^2$ car $b^2 - ac = 0 - (1) = -1 < 0$.
Ses caractéristiques sont les solutions de l'équation :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0,$$

soit

$$\frac{dy}{dx} = i \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = -i.$$

Il y a deux familles de caractéristiques complexes

$$y - ix = C_1 \quad \text{et} \quad y + ix = C_2,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes complexes arbitraires.

Exemple 10 L'équation de Tricomi :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{53}$$

correspond à $b^2 - ac = -x$.
L'équation (53) est hyperbolique pour $x < 0$, i.e. dans $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$, auquel cas l'équation caractéristique est

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x = 0,$$

et ses solutions sont

$$3y - 2(-x)^{3/2} = C_1 \quad \text{et} \quad 3y + 2(-x)^{3/2} = C_2,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes réelles arbitraires.
L'équation (53) est elliptique pour $x > 0$, i.e. dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, auquel cas l'équation caractéristique est

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = i^2 x,$$

et ses solutions sont

$$3y - 2x^{3/2}i = C_1 \quad \text{et} \quad 3y + 2x^{3/2}i = C_2,$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes complexes arbitraires.
L'équation (53) est parabolique sur l'axe $x = 0$.

Les courbes caractéristiques permettent de définir un changement de variables conduisant à une forme simple de l'équation (43) (forme dite canonique ou standard) où certains coefficients parmi A, B et C donnés par (45)-(47) seront annulés.

2.1.2 Réduction à la forme canonique

Théorème 4 *Considérons l'équation (43) dans un domaine plan D.*

1. *Supposons que (43) soit hyperbolique dans D. Soient $\varphi_1(x,y) = C_1$ et $\varphi_2(x,y) = C_2$ ses deux familles de courbes caractéristiques. En posant :*

$$\xi = \varphi_1(x,y) \qquad \text{et} \qquad \eta = \varphi_2(x,y), \tag{54}$$

l'équation (43) se réduit à la forme :

$$u_{\xi\eta} = G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{55}$$

Ensuite, le changement (linéaire) de coordonnées

$$\alpha = \xi + \eta \qquad \text{et} \qquad \beta = \xi - \eta, \tag{56}$$

([7]) *permet de ramener l'équation (55) à la forme :*

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = H(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta). \tag{57}$$

Ce sont les deux formes canoniques d'une EDP hyperbolique.

2. *Supposons que (43) soit parabolique dans D. Soit $\varphi(x,y) = C$ son unique famille de courbes caractéristiques et soit ψ est une fonction arbitraire définie sur D indépendante de φ (i.e. $\frac{D(\varphi,\psi)}{D(x,y)} \neq 0$). Alors, en posant :*

$$\xi = \varphi(x,y) \qquad \text{et} \qquad \eta = \psi(x,y), \tag{58}$$

l'équation (43) se réduit à la forme :

$$u_{\eta\eta} = G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{59}$$

3. *Supposons que (43) soit elliptique dans D. Soient $\varphi_1(x,y) = C_1$ et $\varphi_2(x,y) = C_2$ ses deux familles de courbes caractéristiques lesquelles sont complexes conjuguées. En posant :*

$$\xi = Re\ \varphi_1 \qquad \text{et} \qquad \eta = Im\ \varphi_1, \tag{60}$$

[7]) i.e. $\xi = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et $\eta = \frac{\alpha-\beta}{2}$.

l'équation (43) se réduit à la forme :

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = G(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta). \tag{61}$$

Exemple 11 *Considérons l'équation de Tricomi :*

$$u_{xx} + x u_{yy} = 0, \quad x < 0$$

Trouver un changement de coordonnées $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$ qui transforme l'équation en sa forme canonique, et présenter l'équation dans ce système de coordonnées.
Les équations caractéristiques sont

$$\frac{dy_\pm}{dx} = \pm\sqrt{-x},$$

et leurs solutions sont $3y \pm 2(-x)^{3/2} = constante$. Ainsi, les nouvelles variables indépendantes sont

$$\xi = 3y + 2(-x)^{3/2}, \quad \eta = 3y - 2(-x)^{3/2}$$

Clairement,

$$\xi_x = -3(-x)^{1/2}, \quad \eta_x = 3(-x)^{1/2}, \quad \xi_y = \eta_y = 3.$$

Par la règle de la chaîne

$$\begin{aligned} u_x &= -3(-x)^{1/2} u_\xi + 3(-x)^{1/2} u_\eta, \quad u_y = 3(u_\xi + u_\eta) \\ u_{xx} &= -9x u_{\xi\xi} - 9x u_{\eta\eta} + 2(9) x u_{\xi\eta} + \frac{3}{2}(-x)^{-1/2}(u_\xi - u_\eta), \\ u_{yy} &= 9(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}). \end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans l'équation de Tricomi, nous obtenons

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u_\xi - u_\eta).$$

Exemple 12 *Prouver que l'équation*

$$x^2 u_{xx} - 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + x u_x + y u_y = 0 \tag{62}$$

est parabolique et trouver sa forme canonique ; trouver la solution générale sur le demi-plan $x > 0$.
Nous identifions $a = x^2$, $b = -xy$, $c = y^2$; par conséquent, $b^2 - ac = x^2y^2 - x^2y^2 = 0$ et l'équation est parabolique.

Sur l'axe $x = 0$, l'équation (62) s'écrit $y^2 u_{yy} + y u_y = 0$ soit

$$u_{yy} + (1/y) u_y = 0,$$

ce qui est la forme canonique désirée.
En dehors de l'axe $x = 0$, l'équation pour les caractéristiques est

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \iff xdy + ydx = 0 \iff d(xy) = 0,$$

et la solution est $xy = constante$. Par conséquent, nous définissons $\eta(x, y) = xy$. La seconde variable peut être simplement choisie comme $\xi(x, y) = x$. On vérifie que ξ et η sont indépendantes $\left(\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} \neq 0\right)$ pour $x \neq 0$. En substituant les nouvelles coordonnées ξ et η dans (62), nous obtenons

$$x^2(y^2 u_{\eta\eta} + 2y u_{\xi\eta} + u_{\xi\xi}) - 2xy(u_\eta + xy u_{\eta\eta} + x u_{\xi\eta}) + x^2 y^2 u_{\eta\eta} + xy u_\eta + x u_\xi + xy u_\eta = 0.$$

Ainsi,

$$\xi^2 u_{\xi\xi} + \xi u_\xi = 0$$

ou

$$u_{\xi\xi} + (1/\xi) u_\xi = 0,$$

et ceci est la forme canonique désirée en dehors de l'axe $\xi = x = 0$.
En posant $v = u_\xi$, nous arrivons à l'EDO du premier ordre $v_\xi + (1/\xi)v = 0$ soit en multipliant par ξ :

$$\xi v_\xi + v = 0$$

ou encore $(\xi v)_\xi = 0$. La solution est $\xi v = f(\eta)$, ou $v = f(\eta)/\xi$. Donc, u satisfait

$$u = \int u_\xi d\xi = \int v d\xi = \int \frac{f(\eta)}{\xi} d\xi = f(\eta) \ln \xi + g(\eta).$$

Par conséquent, la solution générale $u(x, y)$ de (62) dans le demi-plan $x > 0$ est $u(x, y) = f(xy) \ln x + g(xy)$, où $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ sont des fonctions réelles arbitraires.

Exemple 13 *Considérons l'équation de Tricomi :*

$$u_{xx} + x u_{yy} = 0, \quad x > 0$$

Trouver une transformation canonique $\xi = \varphi_1(x, y)$, $\eta = \varphi_2(x, y)$ et la forme canonique correspondante.

Les équations différentielles pour les "caractéristiques" sont $dy/dx = \pm i\sqrt{x}$, et leurs solutions sont $3y \pm 2(x)^{3/2} i = constante$. Par conséquent, les variables canoniques sont

$$\xi = 3y \quad \text{et} \quad \eta = 2(x)^{3/2}.$$

Clairement,

$$\xi_x = 0, \quad \xi_y = 3, \quad \eta_x = 3(x)^{1/2}, \quad \eta_y = 0.$$

D'où,

$$\begin{aligned} u_x &= 3(x)^{1/2} u_\eta, \quad u_y = 3u_\xi, \\ u_{xx} &= 9x u_{\eta\eta} + \frac{3}{2}(x)^{-1/2} u_\eta, \\ u_{yy} &= 9u_{\xi\xi}. \end{aligned}$$

En substituant ceci dans l'équation de Tricomi, nous obtenons la forme canonique

$$\frac{1}{x} u_{xx} + u_{yy} = 9u_{\eta\eta} + 9u_{\xi\xi} + \frac{3}{2(x)^{3/2}} u_\eta = 0,$$

soit enfin

$$u_{\eta\eta} + u_{\xi\xi} + \frac{1}{3\eta} u_\eta = 0.$$

2.1.3 Équations linéaires à coefficients constants

Dans le cas de deux variables indépendantes, une équation linéaire du second ordre à coefficients constants a la forme :

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u = F(x, y) \tag{63}$$

où a, b, c, d, e et f sont des constantes. Il lui correspond une équation caractéristique à coefficients constants, et les courbes caractéristiques sont des droites.

A l'aide de la transformation de variables appropriée, l'équation (63) se réduit à l'une des formes simples :

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = d' u_\xi + e' u_\eta + f' u + F \qquad \text{(type elliptique)} \tag{64}$$

$$\left.\begin{array}{r} u_{\xi\eta} = d'u_\xi + e'u_\eta + f'u + F \\ \text{ou} \\ u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = d'u_\xi + e'u_\eta + f'u + F \end{array}\right\} \quad \text{(type hyperbolique)} \tag{65}$$

$$u_{\xi\xi} = d'u_\xi + e'u_\eta + f'u + F \qquad \text{(type parabolique).} \tag{66}$$

Dans ce cas, à l'aide d'un changement de fonction inconnue, on peut simplifier davantage les formes réduites ci-dessus en éliminant les termes contenant des dérivées premières.

Théorème 5 *Soit (E) une équation linéaire à coefficients constants sous l'une des formes réduites précédentes. On peut alors trouver* λ *et* μ *(constantes) telles que en posant :*

$$u(\xi,\eta) = v(\xi,\eta)e^{\lambda\xi+\mu\eta} \tag{67}$$

(E) devienne :

a) $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} = \gamma v + G(\xi,\eta)$ *si (E) est elliptique.*

b) $v_{\xi\eta} = \gamma_1 v + G_1(\xi,\eta)$ *ou* $v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} = \gamma_2 v + G_2(\xi,\eta)$ *si (E) est hyperbolique.*

c) $v_{\xi\xi} = \gamma v + G(\xi,\eta)$ *si (E) est parabolique.*

Exemple 14 Soit l'équation

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2. \tag{68}$$

L'équation des caractéristiques est

$$4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 5\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

c'est à dire $\frac{dy}{dx} = 1$ et $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}$ dont les solutions sont $y - x = C_1$ et $y - \frac{x}{4} = C_2$. On pose donc

$$\xi = y - x, \qquad \eta = y - \frac{x}{4}.$$

On vérifie que (68) devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{3}\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{8}{9}. \tag{69}$$

Soit alors

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) &= v(\xi,\eta)e^{\lambda\xi+\mu\eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(\mu v + \frac{\partial v}{\partial \eta}\right) \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\left(\lambda\mu v + \lambda\frac{\partial v}{\partial\eta} + \mu\frac{\partial v}{\partial\xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}\right).$$

Substituant dans (69), on obtient :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} + \lambda\frac{\partial v}{\partial\eta} + \mu\frac{\partial v}{\partial\xi} + \lambda\mu v = \frac{1}{3}\frac{\partial v}{\partial\eta} + \mu\frac{v}{3} - \frac{8}{9}e^{-(\lambda\xi+\mu\eta)}.$$

En choisissant $\lambda = \frac{1}{3}$ et $\mu = 0$, cette dernière équation devient :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = -\frac{8}{9}e^{-\frac{\xi}{3}}.$$

Il se trouve qu'on sait la résoudre :

$$v(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta) + \frac{8\eta}{3}e^{-\frac{\xi}{3}}$$

ou

$$u(x,y) = \frac{8}{3}\left(y - \frac{x}{4}\right) + e^{\frac{y-x}{3}}\left(f(y-x) + g\left(y - \frac{x}{4}\right)\right).$$

2.2 Équations à plusieurs variables indépendantes

Considérons dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ une EDP semi-linéaire du second ordre de la forme

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, u_{x_i x_j} + F = 0 \qquad \text{avec } a_{ij} = a_{ji}\ , \tag{70}$$

([8]) où a_{ij} sont n^2 fonctions données des n variables indépendantes $x_1, ..., x_n$, $u = u(x_1, ..., x_n)$ est la fonction inconnue et F est une fonction donnée des variables $x_1, ..., x_n$, de u et de ses dérivées premières u_{x_i} $(i = 1, ..., n)$.

Soit $M_0(x_1^0, ..., x_n^0)$ un point arbitraire du domaine D. Notons $a_{ij}^0 = a_{ij}(M_0)$. La classification de l'équation (70) au point M_0 se fait suivant la nature des valeurs propres de la matrice réelle symétrique $(a_{ij}^0)_{ij}$.

Définition 7 *L'équation (70) est dite :*

- *du type elliptique au point M_0 si la matrice $(a_{ij}^0)_{ij}$ a n valeurs propres non nulles et de même signe ;*

[8]) Cela n'exclut pas le cas général quitte à remplacer a_{ij} par $\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$ (le résultat étant indépendant de l'ordre de dérivation : $u_{x_i x_j} = u_{x_j x_i}$).

- *du* <u>*type hyperbolique*</u> *au point* M_0 *si la matrice* $(a_{ij}^0)_{ij}$ *a* $n-1$ *valeurs propres non nulles de même signe, et une valeur propre de signe opposé ;*
- *du* <u>*type ultrahyperbolique*</u> *si la matrice* $(a_{ij}^0)_{ij}$ *a* n *valeurs propres non nulles parmi lesquelles* m *valeurs propres sont strictement positives et* $n-m$ *valeurs propres sont strictement négatives* $(1 < m < n-1)$ *;*
- *du* <u>*type parabolique*</u> *au point* M_0 *si la matrice* $(a_{ij}^0)_{ij}$ *a au moins une valeur propre nulle.*

Exemple 15 L'équation de Laplace

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

est elliptique dans $\mathbb{R}^n$ du moment que

$$(a_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, ..., 1).$$

Exemple 16 L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u := \frac{\partial u}{\partial t} - k \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \qquad (k > 0)$$

est parabolique dans $\mathbb{R}^{n+1}$ du moment que

$$(a_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} -k & & & \\ & \ddots & & \\ & & -k & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(-k, ..., -k, 0).$$

Exemple 17 L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \qquad (c > 0)$$

est hyperbolique dans $\mathbb{R}^{n+1}$ du moment que

$$(a_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} -c^2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -c^2 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(-c^2, ..., -c^2, 1)$$

Dans le cas où les coefficients de l'équation (70) sont **constants** dans D, cette dernière peut être ramenée, grâce à un changement de variables linéaire convenable, à l'une des formes canoniques suivantes selon le type :

1. **Type elliptique**

$$\sum_{i=1}^{n} u_{y_i y_i} + \Phi = 0.$$

2. **Type hyperbolique :**

$$u_{y_1 y_1} - \sum_{i=2}^{n} u_{y_i y_i} + \Phi = 0.$$

3. **Type ultrahyperbolique :**

$$\sum_{i=1}^{m} u_{y_i y_i} - \sum_{i=m+1}^{n} u_{y_i y_i} + \Phi = 0 \qquad (1 < m < n-1).$$

4. **Type parabolique :**

$$\sum_{i=1}^{n-m} (\pm u_{y_i y_i}) + \Phi = 0 \qquad (0 < m < n).$$

3 Équation de transport linéaire

3.1 Cas homogène

L'équation aux dérivées partielles la plus simple est probablement l'équation de transport linéaire homogène à coefficients constants. Il s'agit de l'EDP

$$u_t + b \cdot \nabla u = 0 \qquad \text{dans }]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n, \tag{71}$$

où $b = (b_1, \ldots, b_n)$ est un vecteur non nul fixé de $\mathbb{R}^n$, et où $u :]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est l'inconnue, $u = u(t, x)$. Ici $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ désigne un point de l'espace, et $t \geq 0$ un instant. Nous notons

$$\nabla u = \nabla_x u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})$$

le gradient de u par rapport aux variables spatiales.
L'équation (71) modélise, entre autre, le transport d'une substance, par exemple un polluant (ou un colorant, etc), dans un écoulement de fluide uniforme se déplaçant à la vitesse b. Dans

ce modèle, la solution $u(t,x)$ représente la concentration du polluant à l'instant t et à la position spatiale x.

Quelles fonctions u résolvent (71) ? Pour répondre à cette question, supposons pour le moment que l'on dispose d'une solution régulière u (i.e. $u \in C^1(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n)$) et tentons de la déterminer. Pour ce faire, il faut tout d'abord remarquer que l'équation aux dérivées partielles (71) exprime le fait que la dérivée directionnelle de u en tout point de $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$ dans la direction $(1,b)\in\mathbb{R}^{n+1}$ est nulle. Pour exploiter cette propriété, fixons un point $(t,x)\in\ ]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$ et définissons la fonction :

$$z(s) = u\big((t,x)+s(1,b)\big) = u(t+s,x+sb) \quad \text{pour } s\in\mathbb{R}. \tag{72}$$

En dérivant z par rapport à s, il vient par la règle de la chaîne :

$$z'(s) = u_t(t+s,x+sb) + b\cdot\nabla u(t+s,x+sb). \qquad \left(' = \frac{d}{ds}\right)$$

D'après l'équation (71), nous avons $z'(s)=0$. Cela signifie que la fonction z est constante par rapport à s. Par conséquent, pour chaque point (t,x), la fonction u est **constante** le long de la droite passant par (t,x) et dirigée par le vecteur $(1,b)\in\mathbb{R}^{n+1}$, autrement dit

$$u(t+s,x+sb) = u(t,x), \qquad \forall s\in\mathbb{R}.$$

Définition 8 *Les droites dans l'espace-temps dirigées par le vecteur $(1,b)\in\mathbb{R}^{n+1}$ sont appelées droites caractéristiques de l'équation de transport (71).*

Ainsi, on vu que

Proposition 1 *Les solutions de l'équation de transport (71) sont constantes le long de chaque droite caractéristique.*

Il s'ensuit que si l'on connaît la valeur de u en un point quelconque de chacune des droites caractéristiques, on connaît sa valeur partout dans $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n$.

Problème à valeur initiale Puisque l'équation de transport implique le temps, ses solutions se distinguent par leurs valeurs initiales. S'agissant d'une équation du premier ordre, il nous suffit de spécifier la valeur de la solution à un instant initial t_0, ce qui conduit à un problème à valeur initiale.

Pour fixer les idées, considérons le problème à valeur initiale pour l'équation de transport

$$\begin{cases} u_t(t,x) + b\cdot\nabla u(t,x) = 0 & \text{dans }]0,+\infty[\times\mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{73}$$

Ici $u_0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est la donnée initiale, et le problème consiste à calculer u.

Proposition 2 *Supposons que $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Alors, il existe une unique solution C^1 au problème à valeur initiale (73). Il s'agit de la fonction u définie sur $[0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ par*

$$u(t,x) = u_0(x - tb). \tag{74}$$

Preuve. Supposons que u est une solution C^1 de (73). Soit (t, x) un point arbitraire fixé de $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$ et soit $z(s)$ la fonction définie par (72). Puisque $z(s)$ est constante, nous avons en particulier $z(0) = z(-t)$. En remplaçant dans la définition de z :

- Pour $s = 0$: $z(0) = u(t, x)$.
- Pour $s = -t$: $z(-t) = u(t - t, x - tb) = u(0, x - tb)$.

Comme $u(0, x-tb)$ correspond à la condition initiale u_0 évaluée au point $x-tb$, nous obtenons la formule explicite :

$$u(t,x) = u_0(x - tb) \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0).$$

Ainsi, si le problème (73) admet une solution suffisamment régulière u, celle-ci doit nécessairement être donnée par (74). Réciproquement, il est facile de vérifier directement que si u_0 est de classe C^1, alors la fonction u définie par (74) est bien une solution C^1 de (73). En effet,

- u est de classe C^1 comme composée de deux fonctions de classe C^1 :

$$(t, x) \mapsto x - tb \mapsto u_0(x - tb).$$

- u vérifie clairement la condition initiale : $u(0, x) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^n$.
- u vérifie l'équation de transport en tout point de $]0, +\infty[\times \mathbb{R}^n$:

$$u_t(t,x) = \partial_t\big(u_0(x - tb)\big) = -b \cdot \nabla\big(u_0(x - tb)\big) = -b \cdot \nabla u(t, x).$$

∎

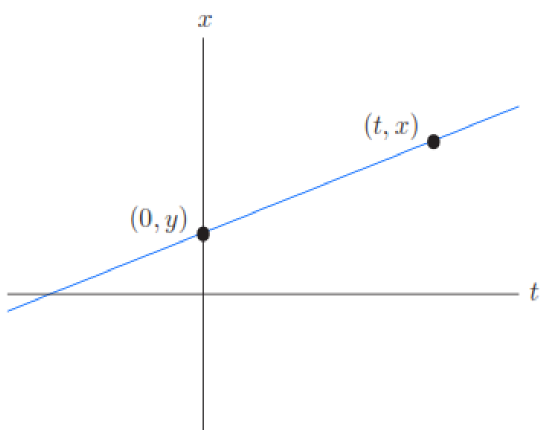
Exemple 18 La solution du problème à valeur initiale particulier

$$u_t + 2u_x = 0, \qquad u(0,x) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

est

$$u(t,x) = \frac{1}{1 + (x - 2t)^2}.$$

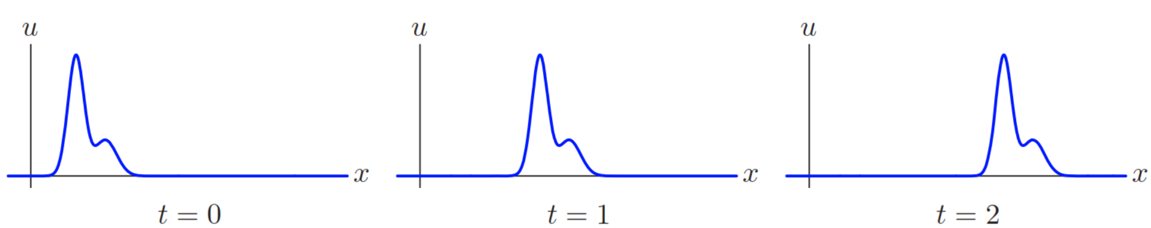
Remarque 5 À tout instant t donné, la valeur de la solution à la position x ne dépend que de sa valeur initiale sur la droite caractéristique passant par (t, x). On dit que : *les signaux se propagent le long des caractéristiques*. En effet, une perturbation à un point initial $(0, y)$ n'affecte la valeur de la solution qu'aux points (t, x) qui se trouvent sur la droite caractéristique provenant de $(0, y)$, comme illustré à la figure ci-dessous :



Droite caractéristique.

Interprétation L'expression $u(t, x) = u_0(x - tb)$ indique que la forme de la donnée initiale u_0 se déplace (est transportée) à une vitesse constante b sans se déformer. La solution (74) apparaît donc comme une onde progressive de forme invariable se déplaçant à la vitesse constante b (b vecteur vitesse d'onde).

Dans le cas unidimensionnel ($n = 1$), lorsque $b > 0$, l'onde se translate vers la droite comme illustré dans la figure suivante



Onde progressive avec $b > 0$.

Lorsque $b < 0$, l'onde se translate vers la gauche, tandis que $b = 0$ correspond à une forme d'onde stationnaire qui reste fixe à son emplacement d'origine. À $t = 0$, l'onde a le profil initial

$$u(0,x) = u_0(x).$$

Remarque 6 Si u_0 n'est pas de classe C^1 (par exemple discontinue), il n'existe évidemment pas de solution C^1 de (73). Cependant, même dans ce cas, la formule (74) fournit un candidat raisonnable à une solution — et en fait le seul — . Nous pouvons donc déclarer de manière informelle que la fonction

$$u(t,x) = u_0(x - tb) \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0)$$

est une ***solution faible*** de (73).

3.2 Cas non homogène

Considérons maintenant le problème non homogène

$$\begin{cases} u(t,x) + b \cdot \nabla u(t,x) = f(t,x) & (t,x) \in \,]0,+\infty[\, \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{75}$$

où $f : [0,+\infty[\, \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

Proposition 3 *Supposons $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et f continue sur $[0,+\infty[\, \times \mathbb{R}^n$ et C^1 par rapport à x (i.e. ∇f existe et est continu sur $[0,+\infty[\, \times \mathbb{R}^n$). Alors, l'unique solution C^1 de (75) est donnée par la <u>formule de Duhamel</u> :*

$$u(t,x) = u_0(x - tb) + \int_0^t f\big(s, x + (s-t)b\big)\, ds, \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0). \tag{76}$$

Preuve. Supposons $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $f \in C([0,+\infty[\, \times \mathbb{R}^n)$. Supposons que u soit une solution C^1 de (75). Comme précédemment, pour $(t,x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, et en s'inspirant des calculs ci-dessus, posons

$$z(s) := u(t+s, x+sb), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$z'(s) = u_t(t+s, x+sb) + b \cdot \nabla u(t+s, x+sb) = f(t+s, x+sb).$$

Comme f est continue sur $[0,+\infty[\, \times \mathbb{R}^n$, par composition, la fonction $s \mapsto f(t+s, x+sb)$ est continue sur $[-t,+\infty[$ et donc z est de classe C^1 sur $[-t,+\infty[$, et le théorème fondamental du calcul intégral est donc applicable donnant

$$\begin{aligned} u(t,x) - u_0(x-tb) &= z(0) - z(-t) = \int_{-t}^{0} z'(s)\,ds \\ &= \int_{-t}^{0} f\left(t+s, x+sb\right)\,ds = \int_0^t f\big(s, x+(s-t)b\big)\,ds, \end{aligned}$$

([9]) et donc

$$u(t,x) = u_0(x-tb) + \int_0^t f\big(s, x+(s-t)b\big)\,ds, \qquad (x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0).$$

Ainsi, si le problème à valeur initiale (75) admet une solution classique, cette dernière est donnée par (76).

Réciproquement, il est aisé de vérifier directement que si les conditions de régularité évoquées dans le théorème sont satisfaites, alors la fonction u définie par (76) est bien une solution C^1 du problème à valeur initiale (75). A cette fin, on a besoin du théorème de Leibniz (aussi appelé théorème de dérivation sous le signe intégral) qui régit la dérivation des intégrales à paramètres et qui s'énonce comme suit :

Théorème 6 *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $g : I \times J \to \mathbb{R}$ et $\alpha, \beta : I \to J$.*
On suppose que :

- *Les fonctions $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ sont dérivables sur I ;*
- *La fonction $g(t,s)$ est continue sur $I \times J$;*
- *La dérivée partielle par rapport au paramètre, $\dfrac{\partial g}{\partial t}(t,s)$, existe et est continue sur $I \times J$.*

Alors la fonction $t \mapsto \displaystyle\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t,s)\,ds$ est dérivable sur I et :

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(t,s)\,ds = g(t,\beta(t)).\beta'(t) - g(t,\alpha(t)).\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial g}{\partial t}(t,s)\,ds, \qquad t \in I.$$

■

[9]) La dernière égalité est obtenue via le changement de variable $s' = s + t$.