

## Limites et Continuité

### 3. Limites.

#### Définition. 3.1.

Soit  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie au voisinage du point  $x_0 \in D$ . On dit que **le nombre  $\ell$  est la limite de  $f$  lorsque  $x_0$**  et on écrit  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$  **si et seulement si,**

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Pour  $n = 2$ .

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) &= \ell \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2, \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta &\Rightarrow |f(x,y) - \ell| < \varepsilon. \end{aligned}$$

#### Remarque.

- Si **la limite existe**, elle est **unique**.
- Si  $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$  **existe** alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_{y \rightarrow x_0} f(x,y) \right)$ .

#### Exemple. 3.1. Montrer que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

#### Solution.

Il faut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y) - (0,0)\|_2 < \delta \Rightarrow \left| \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Sachant que  $x^2 + y^2 \geq y^2$ , alors

$$\left| \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{2xy^2}{y^2} \right| = 2|x| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2\|(x,y)\|_2 \leq 2\delta.$$

Il suffit de prendre  $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ .

#### Exemple. 3.2. Calculer la limite si elle existe dans les cas suivants :

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + xy + 1.$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y^2+2}{x+y-1}.$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xe^y-1}{e^x+1}.$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x^2+y^2}.$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x-y}.$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}.$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy^2}{x^2+y^2}.$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1+x^2+y^2}{y} \sin(y).$

### Solution.

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + xy + 1 = 0.$

2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y^2+2}{x+y-1} = -2.$

3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xe^y-1}{e^x+1} = -\frac{1}{2}.$

4. On a,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x^2+y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x^2+y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{-y}{y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{-1}{y} \right) = -\infty.$$

Donc,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x^2+y^2}$  n'existe pas.

5. On a,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{x-y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{-1}{y} \right) = -\infty.$$

Donc,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x-y}$  n'existe pas.

6. En utilisant une **majoration**, et comme  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: xy \leq |xy| \leq 2|xy| \leq x^2 + y^2.$

Alors,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{xy^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{(x^2 + y^2)y^2}{x^2 + y^2} \right| \leq \lim_{y \rightarrow 0} y^2 = 0.$$

7. En utilisant les coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ r > 0, \theta \in [0, 2\pi] \end{cases} \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$

Alors, on voit que,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \lim_{r \rightarrow 0} 2r \cos(\theta) (\sin(\theta))^2 = 0.$$

8.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 + x^2 + y^2}{y} \sin(y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 1 + x^2 + y^2 \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

## 4. Continuité.

### Définition. 4.1.

Une fonction  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est continue en un point  $x_0 \in D$  si **la limite de  $f$  en ce point existe** et est égale à la valeur de la fonction en  $x_0$ , i.e.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Pour  $n = 2$ .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

### Remarque.

La fonction est continue sur  $D$  si elle est continue en tout point de  $D$ .

### Exemple. 4.1.

1.  $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + 1$ , est continue sur  $\mathbb{R}^2$ . Car  $f$  est un polynôme du second degré à deux variables.

2.  $f(x,y) = e^x + xy$ , est continue sur  $\mathbb{R}^2$ . Comme somme d'une exponentielle et d'un polynôme.

### Exemple. 4.2.

On considère sur  $\mathbb{R}^2$  la fonction  $f$  définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Solution

On a sait que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ , car elle est quotient de deux fonctions continues (polynômes).

Donc, il reste de prouver la continuité en point  $(0,0)$ .

En utilisant les coordonnées polaires, posons, donc

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ r > 0, \theta \in [0, 2\pi] \end{cases} \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

Alors, on trouve

$$f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{r^4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta.$$

Par suite

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \lim_{r \rightarrow 0} (r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) = 0 = f(0,0).$$

Donc  $f$  est continue en  $(0,0)$ . D'où  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Exemple. 4.3.

On considère sur  $\mathbb{R}^2$  la fonction  $f$  définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Solution

On a sait que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  car c'est la composée de fonctions continues.. Donc, il reste de prouver la continuité en point  $(0,0)$ .

En utilisant les coordonnées polaires, posons, donc

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ r > 0, \theta \in [0, 2\pi] \end{cases} \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

Alors, on trouve

$$f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = r^2 \cos \theta \sin \theta \ln(r^2).$$

Par suite

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = r^2 \cos \theta \sin \theta \ln(r^2) = 0 = f(0,0).$$

Donc  $f$  est continue en  $(0,0)$ . D'où  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Exemple. 4.3.

On considère sur  $\mathbb{R}^2$  la fonction  $f$  définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

La fonction  $f$  est-elle continue sur  $\mathbb{R}^2$  ?

### Solution

On a sait que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ , car elle est quotient de deux fonctions continues (polynômes). Donc, il reste de prouver la continuité en point  $(0,0)$ .

En utilisant une **majoration**, et comme  $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2: xy \leq |xy| \leq 2|xy| \leq x^2 + y^2$ .

Alors, on trouve

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x^2y + xy^2}{x^2 + y^2} \right| = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |xy| \left| \frac{x+y}{x^2 + y^2} \right| \leq \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x+y| = 0 = f(0,0).$$

Donc  $f$  est continue en  $(0,0)$ . D'où  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

### TD. 03

**Exercice. 3.1.** Calculer la limite si elle existe dans les cas suivants :

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ .

2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ .

3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ .

4.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2}$ .

5.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ .

6.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}$ .

7.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} (x+y) = 1$ . (Définition).

8.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .

9.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,\pi)} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ .

**Exercice. 3.2.** Montrer que

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\alpha)} \frac{\sin x - \sin y}{x-y} = \cos \alpha$ .

2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 0$ .

**Exercice. 4.1.** Etudier la continuité des fonctions suivantes

1.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ .

2.  $f(x) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ .

3.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{(x-2)^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (2,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (2,0) \end{cases}$ .

4.  $f(x) = \begin{cases} xy \left( \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ .

5.  $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (1,0) \end{cases}$ .

## Les dérivées partielles

Soit  $f(x_1, \dots, x_n)$  une fonction numérique à plusieurs variables définie sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^n$

### 5.1. Les dérivées partielles du premier ordre.

#### Définition. 5.1.

La dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $x_i$  au point  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , noté  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$  ou  $f'_{x_i}(a)$  est la dérivée en  $a_i$  de la fonction  $f$  de la seule variable  $x_i$  définie par  $x_i \rightarrow f(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n)$  et les  $n-1$  autres variables étant fixées.

#### **Exemple 5.1.**

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes après avoir précisé l'ensemble sur lequel le calcul est possible :

1.  $f(x, y) = x^3 + xy^2 + y.$

2.  $f(x, y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right).$

3.  $f(x, y) = \sin(xy).$

4.  $f(x, y) = \ln\left(\frac{y}{x}\right).$

5.  $f(x, y) = \frac{x^2y}{x-y+1}.$

6.  $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

#### Solution

1.  $f(x, y) = x^3 + xy^2 + y.$

$$D_f = \mathbb{R}^2. \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y^2. \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy + 1.$$

2.  $f(x, y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right).$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0\}. \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{x^2} \sin\left(\frac{y}{x}\right). \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{1}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right).$$

3.  $f(x, y) = \sin(xy).$

$$D_f = \mathbb{R}^2. \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos(xy). \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x \cos(xy).$$

4.  $f(x, y) = \ln\left(\frac{y}{x}\right).$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \text{ et } \frac{y}{x} > 0\}. \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x}. \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{y}.$$

5.  $f(x, y) = \frac{x^2y}{x-y+1}.$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x - y + 1 \neq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq x + 1\}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(x^2 - 2xy + 2x)y}{(x - y + 1)^2}. \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2(x + 1)}{(x - y + 1)^2}.$$

$$6. f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}.$$

## 5.2. Différentielle

Nous admettons que si une fonction est continue et possède des dérivées partielles continues, alors elle est **différentiable**.

### Définition. 5.2.

Nous ne fournissons pas de plus amples explications théoriques, c'est la généralisation de la notion de différentielle à une variable. Et nous écrivons :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

### **Exemple 5.2.**

Ecrire les différentielles  $df$  des fonctions  $f$  définies par les expressions suivantes (Exemple 5.1), après avoir précisé l'ensemble des couples  $(x, y)$  pour lesquels le calcul est possible :

### Solution

$$1. f(x, y) = x^3 + xy^2 + y.$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy = (3x^2 + y^2)dx + (2xy + 1)dy.$$

$$2. f(x, y) = \cos\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy = \left(\frac{y}{x^2} \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right) dx + \left(-\frac{1}{x} \sin\left(\frac{y}{x}\right)\right) dy.$$

$$3. f(x, y) = \sin(xy).$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy = (y \cos(xy))dx + (x \cos(xy))dy.$$

$$4. f(x, y, z) = xyz.$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)dz = yzdx + xzdy + xydz.$$

### 5.3. Les dérivées partielles du second ordre.

#### **Définition. 5.3.**

On appelle **dérivée partielle du second ordre** de  $f$  par rapport à  $x_i x_k$  au point  $a = (a_1, \dots, a_n)$ , noté  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(a)$  ou  $f''_{x_i x_k}(a)$  est la dérivée en  $a_k$  de la fonction  $x_k \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, \dots, x_k, \dots, a_n)$  de la seule variable  $x_k$  et les  $n-1$  autres variables étant fixées.

#### **Remarque**

Dans le cas d'une fonction de deux variables, on a quatre dérivées partielles deuxièmes

$$1. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

$$2. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

$$3. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

$$3. \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

#### **Exemple 5.3.**

Calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes :

$$1. f(x, y) = x^4 + y^2 + xy.$$

$$2. f(x, y) = \frac{y}{x} \ln(y^2).$$

$$3. f(x, y) = \exp\left(\frac{1}{x+y}\right).$$

#### **Solution**

$$1. f(x, y) = x^4 + y^2 + xy.$$

$$D_f = \mathbb{R}^2. \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3 + y. \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x^2. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1. \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1$$

$$2. f(x, y) = \frac{y}{x} \ln(y^2).$$

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \text{ et } y^2 > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0 \text{ et } y \neq 0\}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{1}{x^2} y \ln(y^2). \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{x} (\ln(y^2) + 2).$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{x^3} y \ln(y^2). \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2}{xy}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\frac{2}{x^2} (\ln(y^2) + 1). \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{2}{x^2} (\ln(y^2) + 1).$$

**Définition. 5.4.**

On dit que la fonction  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^k$  si toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre  $k$  existent et sont continues.

**Théorème (Schwarz)**

Soit  $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Les fonctions  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  sont définies et continues sur  $D$ , alors

$$\forall x \in D: \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x).$$

**Définition. 5.5.**

Soit  $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable sur un domaine  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ , les dérivées partielles premières de  $f$  au point  $(x_0, y_0)$  sont

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

**TD.5****Exercice 5.1.**

Calculer les dérivées partielles premières des fonctions suivantes après avoir précisé l'ensemble sur lequel le calcul est possible :

$$1. f(x, y) = \exp(xy^2 + 1). \quad 2. f(x, y) = \sin^2\left(\frac{x}{y}\right). \quad 3. f(x, y) = \sin(xy).$$

$$4. f(x, y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - x^2}). \quad 5. f(x, y) = \exp(\sqrt{x^2 - y^2}). \quad 6. f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 y^2}}.$$

$$7. f(x, y) = \tan\left(\frac{y}{x}\right).$$

**Exercice 5.2**

Ecrire les différentielles  $df$  des fonctions  $f$  définies par les expressions suivantes

$$1. f(x, y) = x^2 + xy^3. \quad 2. f(x, y) = \sin^2\left(\frac{x}{y}\right). \quad 3. f(x, y) = x^y. \quad 3. f(x, y) = \cos(x + y).$$

**Exercice 5.3**

Calculer les dérivées partielles du premier ordre ainsi que les dérivées partielles du second ordre des fonctions suivantes

$$1. f(x, y) = e^x y^3. \quad 2. f(x, y) = \sin(x + y). \quad 3. f(x, y) = \cos(e^{xy}).$$

## 5.4. Les opérateurs différentiels

### Définition. 5.6.

Si  $f$  est une fonction de  $D \subset \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  admettant des dérivées partielles en point  $x$ , on appelle **gradient**  $f$  en  $x$  **le vecteur** de  $\mathbb{R}^n$  note **grad  $f(x)$**  ou  **$\nabla f(x)$**  défini par :

$$\nabla f(x) := \nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right).$$

### Définition. 5.7.

L'opérateur **Laplacien**, ou simplement **le laplacien**, est un opérateur différentiel, note  $\Delta$ , égal à la somme de toutes les deuxièmes dérivées partielles non mixtes d'une variable dépendante. Ainsi :

$$\Delta f(x) := \Delta f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

### Exemple 5.4.

Calculer  $\nabla f(x, y)$  et  $\Delta f(x, y)$ .

1.  $f(x, y) = x^3y + y^4$

2.  $f(x, y) = \cos(xy)$ .

3.  $f(x, y) = z \sin(xy)$ .

### Exemple 5.5.

Calculer  $\nabla f(x, y)$  des fonctions suivantes :

1.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

2.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ .

### Solution.

1. Pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}.$$

Pour  $(x, y) = (0, 0)$ .

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

D'où

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2+y^2)^2} \\ -\frac{y^4 + 3x^2y^2 + 2x^3y}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Pour  $(x, y) = (0, 0)$ .

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

## TD.6

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Calculer  $\nabla f(x, y)$ .
- Montrer que  $f$  admet des dérivées partielles secondes en tout point.
- Que peut-on déduire du calcul de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  ?

### Exercice 6.2.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Calculer  $\nabla f(x, y)$ .
- $f$  est-elle de classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$  ?
- Est-ce que  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  ?

### Exercice 6.3.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Calculer  $\nabla f(x, y)$ .
- $f$  est-elle de classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$  ?
- Est-ce que  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  ?

### Exercice 6.4.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right), & \text{si } y \neq 0 \\ 0, & \text{si } y = 0 \end{cases}.$$

- Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Calculer  $\nabla f(x, y)$ .
- $f$  est-elle de classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$  ?
- Est-ce que  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  ?

### Exercice 6.5.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 y \sin\left(\frac{x}{y}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

- Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Calculer  $\nabla f(x, y)$ .
- $f$  est-elle de classe  $C^1(\mathbb{R}^2)$  ?
- Est-ce que  $f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}^2$  ?

### **Solution Ex. 01**

1. On a sait que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ , car elle est quotient de deux fonctions continues (polynômes).  
Donc, il reste de prouver la continuité en point  $(0,0)$ .

En utilisant les coordonnées polaires, posons, donc

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \\ r > 0, \theta \in [0, 2\pi] \end{cases} \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)).$$

Alors, on trouve

$$f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = r^2 \cos \theta \sin \theta (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = r^2 \cos \theta \sin \theta \cos 2\theta.$$

Par suite

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \lim_{r \rightarrow 0} (r^2 \cos \theta \sin \theta \cos 2\theta) = 0.$$

Donc,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Donc  $f$  est continue en  $(0,0)$ . D'où  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

2. Calculer  $\nabla f(x,y)$ .

Pour  $(x,y) \neq (0,0)$ .

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{yx^4 - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ -\frac{xy^4 - x^5 + 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Pour  $(x,y) = (0,0)$ .

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{yx^4 - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} -\frac{xy^4 - x^5 + 4x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

### 3. Les dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \begin{cases} \frac{4xy^3(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0), & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \begin{cases} \frac{4x^3y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0), & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0), & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = 1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2 + y^2)^3}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0), & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Où

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = -1.$$

4. Comme  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$

Le théorème de Schwarz permet de conclure que les dérivées secondes croisées  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$  ne sont pas continue en  $(0, 0)$ .