حلول سلسلة التطبيقات رقم 2

التمرين الأول:

تذكير

• التقسيم المتساوي للمجال $[a,b]$: $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$، $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$:$\forall i \in \{1،2،3 \dots\dots\dots n-1، n\}$.

• مجموع داربوا الأصغر: $s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i$ ، مجموع داربوا الأكبر: $S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i$ حيث
$M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$ و $m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x)$

• f قابل للمكاملة بمفهوم ريمان، $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = 0$.

ا) $[a,b] = [1,2]$; $f(x) = \frac{1}{x}$

$$x_i = 1 + \frac{1}{n} i \quad \Delta x_i = \frac{1}{n}$$

بما أنَ f متناقص على المجال $[a,b]$ فإن:

$$M_i = \sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = f(x_{i-1}) = \frac{n}{n+i-1} \text{ و } m_i = \inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} f(x) = f(x_i) = \frac{n}{n+i}$$

ومنه

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i-1} \quad ; \quad s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$$

اذا

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i-1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$$

ومنه

$\lim_{n\to\infty} (S_n - s_n) = 0 \Leftarrow$ f قابل للمكاملة بمفهوم ريمان.

التمرين الثاني:

تذكير

• إذا كان التابع f قابلا للمكاملة، بمفهوم ريمان، على المجال $[a,b]$ فإن العدد $\int_a^b f(x)dx$ هو نهاية مشتركة للمتتاليتين:

$v_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{b-a}{n} k)$ ، $u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n} k)$.

ا) $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{(n+k)^2}$

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{(n+k)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n} f(a + \frac{b-a}{n} k)$$

حيث $a=1\ ;\ b=2\ ;\ f(x)=\frac{1}{x^2}$ و منه فإن:

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 \frac{1}{x^2}dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=\frac{1}{2}$$

التمرين الثالث:

تذكير

•المكاملة بتغيير المتغير في حالة التكامل المحدد:

ليكن φ تابع من الصنف C^1 على المجال $[\alpha,\beta]$ و f تابع من الصنف C^0 على المجال $\varphi([\alpha,\beta])$، عندئذ فإن:
$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))dt$، حيث $a=\varphi(\alpha), b=\varphi(\beta)$.

• المكاملة بتغيير المتغير في حالة التكامل غير المحدد:

ليكن $h: I\longrightarrow J$ ديفيومورفيزم من الصنف C^1 (difféomorphisme de classe C^1) بوضع $x=h(t)$ و $dx=h'(t)dt$عندئذ فإن: $\int f(x)\,dx=\int f\big(h(t)\big)\,h'(t)dt$.

•حساب تكامل من النوع: $\boldsymbol{J_n=\int\frac{1}{(1+t^2)^n}dt}$:نستعمل المكاملة بالتجزئة فنحصل على العلاقة التراجعية التالية:

$$J_1=Arctanx+C \text{ و } \forall\, n\geq 1:\ 2nJ_{n+1}=(2n-1)J_n+\frac{t}{(1+t^2)^n}\ \ldots\ldots\ldots(*)$$

•التكاملات من النوع $\boldsymbol{\int R(sinx,cosx)\,dx}$**، حيث** $\boldsymbol{R(x,y)}$ **كسر ناطق في المتغيرين** $\boldsymbol{y}$ و$\boldsymbol{x}$:يمكن تحويل هذا التكامل إلى تكامل كسر ناطق باستعمال التغيير في المتغير $t=tan\frac{x}{2}$ حيث $\sin x=\frac{2}{1+t^2}$; $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$

•التكاملات من النوع $\boldsymbol{\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p}{q}},\ldots\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx}$**،حيث** $R(x,y,\ldots\ldots,z)$ **كسر ناطق في المتغيرات** $\boldsymbol{x\ ,y,\ldots\ldots,z}$ **و** $\boldsymbol{\frac{m}{n},\frac{p}{q},\ldots\ldots,\frac{r}{s}}$ **أعداد ناطقة:**لحساب هذا النوع من التكاملات نستعمل التغيير في المتغير $t=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{k}}$، حيث k هو المضاعف المشترك الأصغر للأعداد: $n\ ,q\ ,\ldots\ldots\ldots,s$.

ا) $I=\int\frac{1}{3\sqrt[3]{x+1}-x+1}dx$

نضع$t=(x+1)^{\frac{1}{3}}$ ومنه $x+1=t^3 \Leftarrow dx=3t^2dt$

إذا$I=\int\frac{1}{3t-t^3+2}3t^2dt=\int\frac{3t^2}{-t^3+3t+2}dt$.

لدينا: $-t^3+3t+2=(2-t)(t+1)^2$

نضع $\frac{3t^2}{3t-t^3+2}=\frac{3t^2}{(2-t)(t+1)^2}=\frac{a}{2-t}+\frac{b}{t+1}+\frac{c}{(t+1)^2}$

بعد تبسيط الطرف الثاني و المطابقة نتحصل على: $a=\frac{4}{3}, b=-\frac{5}{3}, c=1$ و منه

$$I=-\frac{4}{3}\int\frac{1}{t-2}dx-\frac{5}{3}\int\frac{1}{t+1}dx+\int\frac{1}{(t+1)^2}dx$$

$$I=-\frac{4}{3}ln|t-2|-\frac{5}{3}ln|t+1|-\frac{1}{t+1}+C\ .$$

بتعويض $t=(x+1)^{\frac{1}{3}}$ نحصل على النتيجة التالية:

$$.I=-\frac{4}{3}ln\left|\sqrt[3]{x+1}-2\right|-\frac{5}{3}ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right|-\frac{1}{\sqrt[3]{x+1}+1}+C$$

ب) $J=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\sqrt{x^2+2x+5}\,dx$

لدينا: $x^2+2x+5=(x+1)^2+2^2$، نضع $x+1=2\,sinh\,t$ ومنه $dx=2\,cosh\,t\,dt$

$$x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow(-1+2\,sinh\,t=-1)\Leftrightarrow t=0$$

$$x=-1\Leftrightarrow(-1+2\,sinh\,t=-1)\Leftrightarrow t=ln2$$

إذا

$$J=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\sqrt{x^2+2x+5}\,dx=\int_0^{ln2}\sqrt{4sinh^2t+4}\,(2\,cosh\,t\,dt)=4\int_0^{ln2}\sqrt{cosh^2t}\,cosh\,t\,dt$$

وبما أنَ: $\forall t\in\ [0,ln2]:\ cosh\,t>0$ فإن:

$$J=4\int_0^{ln2}cosh^2t\,\mathrm{dt}=4\int_0^{ln2}\frac{cosh\,2t+1}{2}dt=[sinh\,2t+2t]_0^{ln2}=sinh(2ln2)+2ln2$$

$$.J=2ln2+\frac{15}{8}$$

جـ) $.k=\int\frac{sin\,x}{1+sin\,x}dx$

بوضع $t=tan\frac{x}{2}$ و $dx=\frac{2}{1+t^2}dt\ \ ;\ \ sin\,x=\frac{2t}{1+t^2}$ فإنَ:

$$.k=\int\frac{sin\,x}{1+sin\,x}dx=\int\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2}dt$$

نضع

$$\frac{4t}{(t^2+1)(t+1)^2}=\frac{at+b}{t^2+1}+\frac{c}{t+1}+\frac{d}{(t+1)^2}$$

بعد تبسيط الطرف الثاني و المطابقة نتحصل على: $d=-2$، $c=0$ ، $b=2$ ،$a=0$ و منه

$$k=2\int\frac{1}{t^2+1}dx-2\int\frac{1}{(t+1)^2}dx=2Arc\,tan\,t+\frac{2}{t+1}+C$$

بتعويض $t=tan\frac{x}{2}$ نحصل على النتيجة التالية:

$$.k=x+\frac{2}{tan\frac{x}{2}+1}+C$$

التمرين الرابع:

تذكير

•المكاملة بالتجزئة في حالة التكامل المحدد:

ليكن v, u توابع من الصنف C^1 على المجال $[a, b]$، عندئذ فإن:

$$\int_a^b uv'\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'v\,dx$$

• المكاملة بالتجزئة في حالة التكامل غير المحدد:

ليكن I مجال من $\mathbb{R}$ و v, u توابع من الصنف C^1 على المجال I، عندئذ فإن:

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx.$$

ا) $I = \int x^2 ln\frac{x-1}{x}dx$.

$$\begin{cases} v' = x^2 \\ u = ln\dfrac{x-1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{1}{3}x^3 \\ u' = \dfrac{1}{x(x-1)} \end{cases}$$

$$I = uv - \int u'v\,dx = \frac{1}{3}x^3 ln\frac{x-1}{x} - \int \frac{1}{x(x-1)}\frac{1}{3}x^3\,dx$$

$$I = \frac{1}{3}x^3 ln\frac{x-1}{x} - \frac{1}{3}\int \frac{x^2}{x-1}dx$$

بالقسمة الإقليدية لـ x^2 على $x-1$ نحصل على الآتي: $\frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ومنه

$$I = \frac{1}{3}x^3 ln\frac{x-1}{x} - \frac{1}{3}\int \left(x + 1 + \frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$I = \frac{1}{3}x^3 ln\frac{x-1}{x} - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}ln|x-1| + C.$$

ب) $J = \int_0^1 xArc\,tan\,x\,dx$.

$$\begin{cases} v' = x \\ u = Arc\,tan\,x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \dfrac{1}{2}x^2 \\ u' = \dfrac{1}{x^2+1} \end{cases}$$

$$J = \int_0^1 uv'\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 Arc\,tan\,x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}x^2\,dx$$

$$J=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}\int_0^1 1-\frac{1}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}[x-Arc\tan x]_0^1$$

$$.J=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

<u>التمرين الخامس:</u>.

ا) $.\int \frac{x^5+3x^4+3x}{(x^2+1)(x+2)^2}\,dx$

بالقسمة الإقليدية لـ x^5+3x^4+3x على $(x^2+1)(x+2)^2$ نحصل على الآتي:

$$\frac{x^5+3x^4+3x}{(x^2+1)(x+2)^2}=x-1+\frac{-x^3+x^2+3x+4}{(x^2+1)(x+2)^2}$$

نضع:

$$\frac{-x^3+x^2+3x+4}{(x^2+1)(x+2)^2}=\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{c}{x+2}+\frac{d}{(x+2)^2}$$

بعد تبسيط الطرف الثاني و المطابقة نتحصل على: $d=2$، $c=-1$ ، $b=1$ ،$a=0$ و منه

$$I=\int\left(x-1+\frac{1}{x^2+1}+\frac{-1}{x+2}+\frac{2}{(x+2)^2}\right)dx$$

$$.I=\frac{1}{2}\,x^2-x+Arc\tan x-\ ln|x+2|-\frac{2}{x+2}+C$$

ب) $.J=\int_1^3 \sqrt{x}ln\frac{x+1}{x}\,dx$

$$\begin{cases} v'=\sqrt{x} \\ u=ln\dfrac{x+1}{x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} v=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \\ u'=\dfrac{-1}{x^2+x}\end{cases}$$

$$J=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}ln\frac{x+1}{x}\right]_1^3-\frac{2}{3}\int_1^3\frac{-1}{x^2+x}x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$J=2\sqrt{3}ln\frac{4}{3}-\frac{2}{3}ln2+\frac{2}{3}\underbrace{\int_1^3\frac{\sqrt{x}}{x+1}\,dx}_{A}$$

حساب التكامل A: نضع $t=\sqrt{x}$ومنه $x=t^2$ و $dx=2tdt$

$$x=3\Leftrightarrow\left(t^2=3\right)\Leftrightarrow t=\sqrt{3}\,;\ t=-\sqrt{3}\ \text{(مرفض)}$$

$$x = 1 \Leftrightarrow \left(t^2 = 1\right) \Leftrightarrow t = 1 \; ; \; t = -1 \text{ (مرفض)}$$

$$A = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1} 2tdt = 2\int_1^{\sqrt{3}} 1 - \frac{1}{t^2+1} dt$$

$$A = 2[x - Arc\tan x]_1^{\sqrt{3}} = 2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3} - 2 - \frac{\pi}{6}$$

إذا

$$.J = 2\sqrt{3}ln\frac{4}{3} - \frac{2}{3}ln2 + \frac{4}{3}\sqrt{3} - \frac{4}{3} - \frac{\pi}{9}$$

جـ) $.k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos x+\sin x} dx$

$$k = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos x+\sin x} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \sin x}{1+\cos x+\sin x} dx$$

بوضع $t = tan\frac{x}{2}$ فإنَ:

$$x = \frac{1}{2} \Longrightarrow t = tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$x = 0 \Longrightarrow t = tan\, 0 = 0$$

$$k = 2\int_0^1 \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}} \left(\frac{2}{1+t^2}dt\right) = \int_0^1 \frac{-4t(t-1)}{(t^2+1)^2} dt$$

نضع

$$\frac{-4t(t-1)}{(t^2+1)^2} = \frac{at+b}{t^2+1} + \frac{ct+d}{(t^2+1)^2}$$

بعد تبسيط الطرف الثاني و المطابقة نتحصل على: $d = 4$، $c = 4$ ، $b = -4$ ، $a = 0$ و منه

$$k = \int_0^1 \frac{-4}{t^2+1} + \frac{4t+4}{(t^2+1)^2} dt = \int_0^1 \frac{-4}{t^2+1} + \frac{4t}{(t^2+1)^2} + \frac{4}{(t^2+1)^2} dt$$

$$.k = \left[-4Arc\tan t + \frac{-2}{t^2+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{4}{(t^2+1)^2} dt = -\pi + 1 + 4\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1)^2} dt}_{B}$$

لحساب التكامل B نستعمل المكاملة بالتجزئة أو يمكن استخدام العلاقة التراجعية $(*)$.

بتعويض $n = 1$ في العلاقة $(*)$ نحصل على: $2J_2 = J_1 + \frac{t}{(1+t^2)^1} = Arctanx + \frac{t}{1+t^2}$ ومنه

$$J_2 = \int \frac{1}{(t^2+1)^2}dt = \frac{1}{2}Arctant + \frac{t}{2(t^2+1)}$$

إذا $k = -\pi + 1 + 4\left[\frac{1}{2}Arc\tan t + \frac{t}{2(t^2+1)}\right]_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}$

التمرين السادس 06

1) لدينا f مستمرة في المجالين $]0,+\infty[$ و $]-\infty,0[$.

و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}}\left(\sqrt{x^2-2x}\right) = 0 = f(0)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\left(\sqrt{x}\ln(x+1)\right) = 0 = f(0)$ و منه f مستمرة عند 0.

2) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} f(x)\,dx}_{I} + \underbrace{\int_{0}^{1} f(x)\,dx}_{J}$.

$I = \int_{-1}^{0}\sqrt{x^2-2x}\,dx = \int_{-1}^{0}\sqrt{(x-1)^2-1}\,dx$ نضع $x-1 = -\cosh t$ و منه

$x = 0 \Leftrightarrow t = 0$

$x = -1 \Leftrightarrow t = \ln(\sqrt{3}+2)$ أو $\mathrm{t} = \ln(-\sqrt{3}+2)$ و منه

$$I = \int_{\ln(\sqrt{3}+2)}^{0}\sqrt{\cosh^2 t - 1}\,(-\sinh t\mathrm{dt}) = \int_{0}^{\ln(\sqrt{3}+2)}\sqrt{\cosh^2 t - 1}\,\mathrm{sinhdt}$$

في المجال $]0,+\infty[$ فإن $\sinh t > 0$ ومنه

$$I = \int_0^{\ln(\sqrt{3}+2)}\sinh^2 t\,dt = \int_0^{\ln(\sqrt{3}+2)}\frac{\cosh 2t - 1}{2}dt = \left[\frac{\sinh 2t + 2t}{4}\right]_0^{\ln(\sqrt{3}+2)} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{3}+2)$$

حساب التكامل $J = \int_0^1 \sqrt{x}\ln(x+1)\,dx$.

$$\begin{cases} v' = \sqrt{x} \\ u = \ln(x+1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \\ u' = \frac{1}{x+1} \end{cases}$$

$$J = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{1}{x+1}x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$J = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{2}{3}\underbrace{\int_0^1 \frac{x\sqrt{x}}{x+1}dx}_{A}$$

حساب التكامل A.

نضع $t = \sqrt{x}$ و منه $dx = 2tdt$.

$$A = \int_0^1 \frac{t^3}{t^2+1} 2t\,dt = 2\int_0^1 \frac{t^4}{t^2+1} dt = 2\int_0^1 \frac{1}{t^2+1} + t^2 - 1dt = 2\left[Arc\tan t + \frac{1}{3}t^3 - t\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{3}$$

و منه $J = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\pi + \frac{8}{9}$.

إذن $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(\sqrt{3}+2) + \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\pi + \frac{8}{9}$.