

Travaux Dirigés : Stratégies de Pivotement pour la Méthode d'Élimination de Gauss

Partie 1 : Méthode d'élimination de Gauss avec pivotement partiel

Exercice 1 : Le problème du pivot nul

Soit le système linéaire $Ax = b$ suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. Expliquer pourquoi la méthode de Gauss naïve échoue à la première étape.
2. Résoudre ce système en appliquant la méthode de Gauss avec pivotement partiel. Détailler les matrices intermédiaires.

Exercice 2 : Instabilité numérique et erreurs d'arrondi

On considère le système suivant, où ϵ est un nombre réel très petit (par exemple $\epsilon = 10^{-4}$) :

$$\begin{pmatrix} \epsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre le système analytiquement pour obtenir la solution exacte.
2. Simuler une résolution par Gauss naïve en supposant une arithmétique à virgule flottante limitée (où $1/\epsilon$ domine les autres termes).
3. Montrer comment le pivotement partiel corrige cette instabilité et permet de retrouver une approximation correcte de la solution.

Exercice 3 : Résolution d'un système d'ordre 4

Appliquer l'algorithme de Gauss avec pivotement partiel pour triangulariser la matrice suivante et résoudre $Ax = b$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Préciser les permutations de lignes effectuées à chaque étape k .

Exercice 4 : Calcul du déterminant

Le pivotement partiel modifie le déterminant de la matrice triangulaire supérieure résultante U en fonction du nombre de permutations de lignes P .

1. Exprimer $\det(A)$ en fonction des éléments diagonaux de U et du nombre d'échanges de lignes.
2. Appliquer cette formule pour calculer le déterminant de la matrice A de l'Exercice 1.

Exercice 5 : Application à un modèle discrétisé

Lors de la discrétisation d'une équation différentielle (par exemple, un modèle de diffusion simple), on obtient le système tridiagonal suivant, légèrement perturbé :

$$\begin{pmatrix} 0.1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Résoudre ce système avec pivotement partiel et justifier pourquoi le choix du pivot à la première étape est crucial pour la précision des concentrations x_i .

Partie 2 : Pivotement partiel avec mise à l'échelle des lignes

Exercice 6 : Le piège des ordres de grandeur

Soit la matrice A et le vecteur b :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 100000 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 100000 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Quel pivot serait choisi par la méthode de pivotement partiel classique à l'étape 1 ?
2. Calculer le vecteur des facteurs d'échelle s .
3. Quel pivot est sélectionné par la méthode avec mise à l'échelle ? Conclure.

Exercice 7 : Résolution pas à pas avec vecteur d'échelle

On donne le système $Ax = b$:

$$\begin{pmatrix} 3 & -13 & 9 \\ -6 & 4 & 1 \\ 12 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le vecteur d'échelle initial $s = (s_1, s_2, s_3)^T$.
2. Dérouler l'algorithme d'élimination en calculant les ratios à chaque étape k . Indiquer clairement les permutations effectuées sur A , b et s .

Exercice 8 : Comparaison des stratégies

Soit la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & 12 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Triangulariser A en utilisant uniquement le pivotement partiel.
2. Triangulariser A en utilisant le pivotement partiel avec mise à l'échelle.
3. Comparer les matrices triangulaires supérieures U obtenues. Sont-elles identiques ?

Exercice 9 : Analyse théorique de l'algorithme

Dans la méthode de mise à l'échelle, les facteurs s_i sont calculés une seule fois au début de l'algorithme à partir de la matrice initiale A .

1. Expliquer pourquoi on ne recalcule pas le vecteur s à chaque étape k sur la sous-matrice restante.
2. Quel serait l'impact sur la complexité algorithmique globale si l'on devait recalculer les s_i à chaque itération ?

Exercice 10 : Système mal conditionné et suivi des indices

Soit le système :

$$\begin{pmatrix} 0.003 & 59.14 \\ 5.291 & -6.130 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59.17 \\ 46.78 \end{pmatrix}$$

Résoudre ce système en utilisant une arithmétique à 4 chiffres significatifs avec arrondi. Appliquer le pivotement partiel simple, puis le pivotement avec mise à l'échelle. Comparer les résultats avec la solution exacte $x = (10, 1)^T$.

Partie 3 : Pivot complet

Exercice 11 : Recherche du pivot optimal et permutations

Considérons la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Identifier le premier pivot choisi par la stratégie du pivot complet.
2. Écrire la matrice $A^{(2)}$ obtenue après la première étape d'élimination (incluant les permutations de lignes et de colonnes).
3. Quel est le vecteur de suivi des colonnes pos après cette première étape ?

Exercice 12 : Résolution complète et réorganisation

Résoudre le système $Ax = b$ suivant par la méthode du pivot complet :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Montrer explicitement l'évolution du vecteur de permutation des inconnues et la réorganisation du vecteur solution final.

Exercice 13 : Détection de la singularité

Soit la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quel est le rang de cette matrice ?
2. Appliquer l'algorithme du pivot complet. Que se passe-t-il lors du choix du pivot à la deuxième étape d'élimination ?
3. En quoi le pivot complet est-il plus robuste que le pivot partiel pour identifier le rang exact d'une matrice numériquement perturbée ?

Exercice 14 : Complexité algorithmique

1. Dénombrer le nombre de comparaisons nécessaires pour trouver le pivot à l'étape k dans la méthode du pivotement partiel pour une matrice $n \times n$.
2. Dénombrer le nombre de comparaisons pour la méthode du pivot complet à la même étape.
3. En déduire l'ordre de grandeur de la complexité asymptotique (en $\mathcal{O}$) pour la recherche des pivots dans les deux méthodes sur l'ensemble de l'algorithme. Justifier pourquoi le pivot complet est rarement utilisé en pratique pour de très grands systèmes.

Exercice 15 : Matrice de Hilbert

Les matrices de Hilbert sont tristement célèbres pour leur très mauvais conditionnement. Soit H_3 la matrice de Hilbert d'ordre 3, dont les éléments sont $h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$.

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Soit $b = (11/6, 13/12, 47/60)^T$ (la solution exacte est $x = (1, 1, 1)^T$).

Appliquer la méthode du pivot complet pour résoudre ce système en gardant les fractions exactes. Identifier les éléments maximaux à chaque étape de la sous-matrice.