

Exercice : Soient les quatre systèmes linéaires $A_i X = b_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & -9 & 0 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 \\ 4 & 5 & -4 \\ -7 & -3 & 8 \end{pmatrix},$$

Etudier la convergence des méthodes de *Jacobi* et *Gauss-Seidel* appliquées à chaque système, pour tout choix de $X^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, en utilisant le rayon spectral des matrices d'itérations. Conclure.

Exercice : Résoudre le système suivant

$$\begin{pmatrix} 4 & 0.24 & -0.08 \\ 0.09 & 3 & -0.15 \\ 0.04 & -0.08 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix},$$

par la méthode des approximations successives avec trois décimales exactes.

Exercice : Résoudre le système suivant par la méthode de *Gauss-Seidel*

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix},$$

Prendre pour approximation initiales $X^{(0)} = [1, 2, 0, 0]^t$ et obtenir la solution avec quatre décimales exactes.

Exercice : Résoudre le système suivant

$$\begin{pmatrix} 4 & 0.24 & -0.08 \\ 0.09 & 3 & -0.15 \\ 0.04 & -0.08 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{pmatrix},$$

par la méthode des approximations successives avec trois décimales exactes.

Exercice : Résoudre le système suivant par la méthode de *Gauss-Seidel*

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{pmatrix},$$

Prendre pour approximation initiales $X^{(0)} = [1.2, 0, 0]^t$ et obtenir la solution avec quatre décimales exactes.

Exercice : Lequel des systèmes suivants est un système à dominante strictement diagonale ?

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Exercice : Étant donné la matrice $A = I - (L + U)$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

où L et U sont respectivement des matrices triangulaires strictement inférieures et supérieures, décidez si les méthodes (a) de Jacobi et (b) de Gauss-Seidel convergent vers la solution de $Ax = b$.

Exercice : Montrer que la méthode de Gauss-Seidel pour résoudre le système d'équations diverge : i.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ii.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice : Résoudre l'ensemble suivant d'équations linéaires à l'aide de la méthode SOR avec relaxation paramètre $\omega = 1.1$.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 99.875 \\ -99.6875 \\ 0.3125 \\ 0.25 \end{pmatrix}.$$

Exercice : Résolvez le système tridiagonal d'équations linéaires suivant avec une précision de 0.000001 en utilisant la méthode de Gauss-Seidel.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -19 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Résolvez également le système en utilisant la méthode SOR avec un paramètre de relaxation, $\omega = 1.2$. Prendre en compte approximation initiale $x^{(0)} =$

$[0 \ 0 \ 0]^T$. Calculer le paramètre de relaxation optimal pour le système d'équations linéaires.

Exercice : Résolvez le système d'équations linéaires suivant à l'aide de la forme matricielle de relaxation méthode avec déplacement successif

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Utiliser le vecteur d'approximation initial $x^{(0)} = [0, 0, 0]^t$ et le paramètre de relaxation, $\omega = 1.02943725$.

Exercice : Pour les systèmes suivants d'équations données:

i.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ii.

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a. Trouvez le paramètre de relaxation optimal ω^* pour le schéma d'itération SOR. Aussi, déterminez

le taux de convergence de ce schéma

b. Écrivez le schéma d'itération SOR sous forme de vecteur résiduel. A partir de $x^{(0)} = [0.5, 0.5, 0.5]^T$, itérer quatre fois.